Autour du théorème de Pascal

Daniel PERRIN

Journée Tangente, 3 décembre 2023

Mode d'emploi

Le fichier est partiellement interactif. En cliquant sur le début des mots qui sont suivis d'une étoile on ouvre le fichier correspondant si c'est un fichier pdf ou on le télécharge si c'est un fichier GeoGebra.

L'essay pour les coniques

- En 1640, Blaise Pascal, alors âgé de seize ans, publie un *Essay pour les coniques*. Il s'agit d'un texte très court* qui se présente sous forme d'une affiche de 35×43 cm, tirée à 50 exemplaires et bourrée de fautes d'impression.

L'essay pour les coniques

- En 1640, Blaise Pascal, alors âgé de seize ans, publie un *Essay pour les coniques*. Il s'agit d'un texte très court* qui se présente sous forme d'une affiche de 35×43 cm, tirée à 50 exemplaires et bourrée de fautes d'impression.
- Dans ce texte, après quelques définitions, le lemme 1 est le théorème de Pascal pour le cercle (dit de façon un peu différente). Suit un lemme élémentaire de géométrie dans l'espace, puis la variante du théorème de Pascal (lemme 3) pour une section de cône. Il n'y a pas de démonstrations.

L'essay pour les coniques

- En 1640, Blaise Pascal, alors âgé de seize ans, publie un *Essay pour les coniques*. Il s'agit d'un texte très court* qui se présente sous forme d'une affiche de 35×43 cm, tirée à 50 exemplaires et bourrée de fautes d'impression.
- Dans ce texte, après quelques définitions, le lemme 1 est le théorème de Pascal pour le cercle (dit de façon un peu différente). Suit un lemme élémentaire de géométrie dans l'espace, puis la variante du théorème de Pascal (lemme 3) pour une section de cône. Il n'y a pas de démonstrations.
- Pour toutes précisions, on pourra consulter l'article de René Taton : $\ll$ *L'essay pour les coniques* $\gg$ *de Pascal*, Revue d'histoire des sciences et de leurs applications, tome 8, N° 1,1955, pp. 1-18.

Le lemme 1 en version originale

Si dans le plan M, S, Q*, du point* M *partent les deux droites* MK, MV*, et du point* S*, partent les deux droites* SK, SV*, et que* K *soit le concours des droites* MK, SK*, et* V*, le concours des droites* MV, SV*, et* A*, le concours des droites* MK, SV *et* μ*, le concours des droites* MV, SK*, et que par deux des 4 points* A, K, μ, V*, qui ne soient point en même droite avec les points* M, S*, comme par les points* K, V*, passe la circonférence d'un cercle coupant les droites* MV, MK, SV, SK*, es points* O, P, Q, N*, je dis que les droites* MS, NO, PQ *sont de même ordre* [sont concourantes]. Figure*

Le lemme 2

Si par la même droite passent plusieurs plans qui soient coupés par un autre plan, toutes les lignes des sections de ces plans sont de même ordre [sont concourantes] *avec la droite par laquelle passent lesdits plans.* Figure*

Le lemme 3

Ces deux Lemmes posés et quelques faciles conséquences d'iceux, nous démontrerons que les mêmes choses étant posées qu'au premier Lemme, si par les points K, V, passe une quelconque section de cône qui coupe les droites MK, MV, SK, SV, es points P, O, N, Q, les droites MS, NO, PQ seront de même ordre, cela sera un troisième Lemme. Figure*

Le théorème dit en langage moderne

Soit Γ *un cercle et* A, B, C, A', B', C' *six points distincts de* Γ*. Soient* D, E, F *les points d'intersection de* (BC') *et* $(B'C)$*,* (CA') *et* $(C'A)$*,* (AB') *et* $(A'B)$ *respectivement. Alors, les points* D, E, F *sont alignés.* Figure*

Dans ce théorème, comme le dit Pascal, on peut remplacer le mot cercle par conique.

L'ancêtre de Pascal : Pappus

- *Soient* A, B, C *trois points d'une droite* Δ *et* A', B', C' *de* Δ'. *Soient* D, E, F *les points d'intersection de* (BC') *et* $(B'C)$, (CA') *et* $(C'A)$, (AB') *et* $(A'B)$ *respectivement. Alors, les points* D, E, F *sont alignés.* Figure* On peut le voir comme un cas particulier de Pascal (celui de "l'angle rectiligne"). Figure*

L'ancêtre de Pascal : Pappus

- *Soient A, B, C trois points d'une droite Δ et A', B', C' de Δ'. Soient D, E, F les points d'intersection de (BC') et $(B'C)$, (CA') et $(C'A)$, (AB') et $(A'B)$ respectivement. Alors, les points D, E, F sont alignés.* Figure* On peut le voir comme un cas particulier de Pascal (celui de "l'angle rectiligne"). Figure*
- Pappus vivait à Alexandrie au IV-ième siècle de notre ère. Ce résultat apparaît dans ses *Collections mathématiques*, avec une preuve identique à celle que je vais donner. Ce texte était sans doute mal connu à l'époque de Pascal, et même au-delà, voir Hilbert*, et cette preuve n'est sans doute pas celle de Pascal.

Mesures algébriques et rapports

- Si on choisit un vecteur unitaire $\vec{v}$ sur une droite, la mesure algébrique $\overline{AB}$ du segment orienté $[AB]$ est le réel tel que $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\vec{v}$.

Mesures algébriques et rapports

- Si on choisit un vecteur unitaire $\vec{v}$ sur une droite, la mesure algébrique $\overline{AB}$ du segment orienté $[AB]$ est le réel tel que $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\vec{v}$.
- C'est simplement la longueur AB si $\overrightarrow{AB}$ est dans le sens de $\vec{v}$ et l'opposé s'il est de sens contraire.

Mesures algébriques et rapports

- Si on choisit un vecteur unitaire $\vec{v}$ sur une droite, la mesure algébrique $\overline{AB}$ du segment orienté $[AB]$ est le réel tel que $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\vec{v}$.
- C'est simplement la longueur AB si $\overrightarrow{AB}$ est dans le sens de $\vec{v}$ et l'opposé s'il est de sens contraire.
- La mesure algébrique dépend du choix de $\vec{v}$ mais les rapports de mesure algébriques sur une même droite n'en dépendent pas. Si l'on se donne A, B, le point M est déterminé* par le rapport $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$.

Mesures algébriques et rapports

- Si on choisit un vecteur unitaire $\vec{v}$ sur une droite, la mesure algébrique $\overline{AB}$ du segment orienté $[AB]$ est le réel tel que $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\vec{v}$.
- C'est simplement la longueur AB si $\overrightarrow{AB}$ est dans le sens de $\vec{v}$ et l'opposé s'il est de sens contraire.
- La mesure algébrique dépend du choix de $\vec{v}$ mais les rapports de mesure algébriques sur une même droite n'en dépendent pas. Si l'on se donne A, B, le point M est déterminé* par le rapport $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$.
- Cela permet notamment de formuler le théorème de Thalès* et sa réciproque sans se soucier des positions.

Birapport

- Quand on a quatre points sur une droite on définit leur birapport (ou rapport anharmonique) comme suit :

$$[\![A, B, C, D]\!] = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \times \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}}$$

Birapport

- Quand on a quatre points sur une droite on définit leur birapport (ou rapport anharmonique) comme suit :

$$[\![A, B, C, D]\!] = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \times \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}}$$

- Si trois des points sont donnés, la donnée de $[\![A, B, C, D]\!]$ détermine le quatrième.

Birapport

- Quand on a quatre points sur une droite on définit leur birapport (ou rapport anharmonique) comme suit :

$$[\![A, B, C, D]\!] = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \times \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}}$$

- Si trois des points sont donnés, la donnée de $[\![A, B, C, D]\!]$ détermine le quatrième.
- À propos des grandeurs orientées (mesures algébriques, rapports, birapports, angles, aires).

Birapport et perspectives

- Le théorème principal sur le birapport est le suivant (théorème de la perspective, dû à Pappus, voire à Euclide dans ses fameux *Porismes*) :

Birapport et perspectives

- Le théorème principal sur le birapport est le suivant (théorème de la perspective, dû à Pappus, voire à Euclide dans ses fameux *Porismes*) :
- Soient A, B, C, D (resp. A', B', C', D') quatre points de Δ (resp. Δ'). On suppose que (AA'), (BB'), (CC') et (DD') concourent* en M. Alors on a $[\![A, B, C, D]\!] = [\![A', B', C', D']\!]$.

Birapport et perspectives

- Le théorème principal sur le birapport est le suivant (théorème de la perspective, dû à Pappus, voire à Euclide dans ses fameux *Porismes*) :
- Soient A, B, C, D (resp. A', B', C', D') quatre points de Δ (resp. Δ'). On suppose que (AA'), (BB'), (CC') et (DD') concourent* en M. Alors on a $[\![A, B, C, D]\!] = [\![A', B', C', D']\!]$.
- La perspective de centre M est l'application de Δ sur Δ' qui envoie P sur P', intersection de (MP) et Δ'. Le théorème affirme qu'une perspective conserve* le birapport.

Birapport et perspectives

- Le théorème principal sur le birapport est le suivant (théorème de la perspective, dû à Pappus, voire à Euclide dans ses fameux *Porismes*) :
- Soient A, B, C, D (resp. A', B', C', D') quatre points de Δ (resp. Δ'). On suppose que (AA'), (BB'), (CC') et (DD') concourent* en M. Alors on a $[\![A, B, C, D]\!] = [\![A', B', C', D']\!]$.
- La perspective de centre M est l'application de Δ sur Δ' qui envoie P sur P', intersection de (MP) et Δ'. Le théorème affirme qu'une perspective conserve* le birapport.
- On en déduit une preuve de Pappus*.

Calcul du birapport et preuve du théorème de la perspective

- Deux rappels sur les aires : le lemme des proportions qui affirme qu'on a $CA/CB = \mathscr{A}(MCA)/\mathscr{A}(MCB)$ (avec une variante orientée) et le calcul des aires* par la formule $\mathscr{A}(MCA) = \frac{1}{2}MC \times MA \times \sin\widehat{CMA}$ (là encore avec une variante orientée).

Calcul du birapport et preuve du théorème de la perspective

- Deux rappels sur les aires : le lemme des proportions qui affirme qu'on a $CA/CB = \mathscr{A}(MCA)/\mathscr{A}(MCB)$ (avec une variante orientée) et le calcul des aires* par la formule $\mathscr{A}(MCA) = \frac{1}{2}MC \times MA \times \sin \widehat{CMA}$ (là encore avec une variante orientée).
- Si l'on a quatre points A, B, C, D alignés sur une droite Δ et un point M extérieur, on a la formule* (avec des angles orientés) : $[\![A, B, C, D]\!] = \dfrac{\sin \widehat{CMA}}{\sin \widehat{CMB}} : \dfrac{\sin \widehat{DMA}}{\sin \widehat{DMB}}$.

Calcul du birapport et preuve du théorème de la perspective

- Deux rappels sur les aires : le lemme des proportions qui affirme qu'on a $CA/CB = \mathscr{A}(MCA)/\mathscr{A}(MCB)$ (avec une variante orientée) et le calcul des aires* par la formule $\mathscr{A}(MCA) = \frac{1}{2}MC \times MA \times \sin\widehat{CMA}$ (là encore avec une variante orientée).
- Si l'on a quatre points A, B, C, D alignés sur une droite Δ et un point M extérieur, on a la formule* (avec des angles orientés) : $[\![A, B, C, D]\!] = \dfrac{\sin\widehat{CMA}}{\sin\widehat{CMB}} : \dfrac{\sin\widehat{DMA}}{\sin\widehat{DMB}}$.
- On en déduit le théorème de la perspective*.

Birapport sur le cercle

- Si l'on a quatre points A, B, C, D sur un cercle Γ on choisit un point $M \in \Gamma$ et on définit* le birapport $[\![A, B, C, D]\!]$ par la même formule : $[\![A, B, C, D]\!] = \dfrac{\sin \widehat{CMA}}{\sin \widehat{CMB}} : \dfrac{\sin \widehat{DMA}}{\sin \widehat{DMB}}$.

Birapport sur le cercle

- Si l'on a quatre points A, B, C, D sur un cercle Γ on choisit un point $M \in \Gamma$ et on définit* le birapport $[\![A, B, C, D]\!]$ par la même formule : $[\![A, B, C, D]\!] = \dfrac{\sin \widehat{CMA}}{\sin \widehat{CMB}} : \dfrac{\sin \widehat{DMA}}{\sin \widehat{DMB}}$.
- Si N est un autre point du cercle on a $\widehat{CMA} = \widehat{CNA}$ par le théorème de l'angle inscrit* ce qui montre que le birapport ne dépend pas du choix de M.

La perspective "mixte"

- On considère un cercle Γ, cinq points $M; A, B, C, D$ sur ce cercle Γ et une droite Δ qui coupe (MA), (MB), (MC), (MD) en A', B', C', D'. Alors on a* l'égalité $[\![A, B, C, D]\!] = [\![A', B', C', D']\!]$.

La perspective "mixte"

- On considère un cercle Γ, cinq points $M; A, B, C, D$ sur ce cercle Γ et une droite Δ qui coupe (MA), (MB), (MC), (MD) en A', B', C', D'. Alors on a* l'égalité $[\![A, B, C, D]\!] = [\![A', B', C', D']\!]$.
- Cela résulte des formules avec les sinus. On parlera de la perspective "mixte" de centre M (sur le cercle) de Δ sur Γ. Elle conserve le birapport.

La perspective "mixte"

- On considère un cercle Γ, cinq points $M; A, B, C, D$ sur ce cercle Γ et une droite Δ qui coupe (MA), (MB), (MC), (MD) en A', B', C', D'. Alors on a* l'égalité $[\![A, B, C, D]\!] = [\![A', B', C', D']\!]$.
- Cela résulte des formules avec les sinus. On parlera de la perspective "mixte" de centre M (sur le cercle) de Δ sur Γ. Elle conserve le birapport.
- On en déduit une preuve de Pascal sur le cercle en copiant la preuve de Pappus*.

Preuve de Pascal sur la conique

- On a une conique C avec 6 points a, b, c, a', b', c' et on veut montrer que $d = (bc') \cap (b'c)$, $e = (ca') \cap (c'a)$ et $f = (ab') \cap (a'b)$ sont alignés.

Preuve de Pascal sur la conique

- On a une conique C avec 6 points a, b, c, a', b', c' et on veut montrer que $d = (bc') \cap (b'c)$, $e = (ca') \cap (c'a)$ et $f = (ab') \cap (a'b)$ sont alignés.
- La conique est tracée sur un cône* à base circulaire de sommet O. On la projette sur un cercle du cône. Les points deviennent $A, \ldots, C'$, D, E, F.

Preuve de Pascal sur la conique

- On a une conique C avec 6 points a, b, c, a', b', c' et on veut montrer que $d = (bc') \cap (b'c)$, $e = (ca') \cap (c'a)$ et $f = (ab') \cap (a'b)$ sont alignés.
- La conique est tracée sur un cône* à base circulaire de sommet O. On la projette sur un cercle du cône. Les points deviennent $A, \dots, C'$, D, E, F.
- Par le théorème de Pascal sur le cercle, D, E, F sont alignés.

Preuve de Pascal sur la conique

- On a une conique C avec 6 points a, b, c, a', b', c' et on veut montrer que $d = (bc') \cap (b'c)$, $e = (ca') \cap (c'a)$ et $f = (ab') \cap (a'b)$ sont alignés.
- La conique est tracée sur un cône* à base circulaire de sommet O. On la projette sur un cercle du cône. Les points deviennent $A, \ldots, C'$, D, E, F.
- Par le théorème de Pascal sur le cercle, D, E, F sont alignés.
- Comme O, d, D, etc. sont alignés, on en déduit que d, e, f sont alignés. (On utilise le lemme 2 de Pascal.)

Pappus et Pascal par liaison

- Deux ensembles finis V, W du plan sont liés par deux courbes (algébriques) C_1, C_2 si leur réunion est l'intersection $C_1 \cap C_2$.

Pappus et Pascal par liaison

- Deux ensembles finis V, W du plan sont liés par deux courbes (algébriques) C_1, C_2 si leur réunion est l'intersection $C_1 \cap C_2$.
- Un cas particulier du théorème de Davis-Geramita-Orecchia (1985) affirme que si V, W sont des ensembles finis du plan liés par deux courbes algébriques de degrés d et e, alors pour un entier n, W est spécial en degré n si et seulement si V l'est en degré $d + e - n - 3$.

Pappus et Pascal par liaison

- Deux ensembles finis V, W du plan sont liés par deux courbes (algébriques) C_1, C_2 si leur réunion est l'intersection $C_1 \cap C_2$.
- Un cas particulier du théorème de Davis-Geramita-Orecchia (1985) affirme que si V, W sont des ensembles finis du plan liés par deux courbes algébriques de degrés d et e, alors pour un entier n, W est spécial en degré n si et seulement si V l'est en degré $d+e-n-3$.
- Exemple : $d = e = 3$, $n = 1$, $d + e - n - 3 = 2$.

Pappus et Pascal par liaison

- Deux ensembles finis V, W du plan sont liés par deux courbes (algébriques) C_1, C_2 si leur réunion est l'intersection $C_1 \cap C_2$.
- Un cas particulier du théorème de Davis-Geramita-Orecchia (1985) affirme que si V, W sont des ensembles finis du plan liés par deux courbes algébriques de degrés d et e, alors pour un entier n, W est spécial en degré n si et seulement si V l'est en degré $d + e - n - 3$.
- Exemple : $d = e = 3$, $n = 1$, $d + e - n - 3 = 2$.
- Dans le cas de Pascal*, on applique cela avec $V = \{A, B, C, A', B', C'\}$ et $W = \{D, E, F\}$, qui sont liés par les cubiques ($d = e = 3$) réunions des droites rouges et bleues. Être spécial en degré $n = 1$ pour trois points c'est être aligné, être spécial pour six points en degré $d + e - n - 3 = 2$ c'est être sur une conique.

- Pappus of Alexandria, *Book 7 of the collection, Part. 1 and 2* Edited and translated by Alexander Jones, Springer, 1986.
- Perrin Daniel, *Livre de géométrie projective, Parties I et III.* https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~daniel.perrin/Livregeometrie/DPPartie1.pdf
- Perrin Daniel, *Le théorème de Pascal* https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~daniel.perrin/Conferences/Perrin-Pascal.pdf
- Taton René, *L'essay pour les coniques de Pascal*, Revue d'histoire des sciences et de leurs applications, tome 8, N°1, 1955, p. 1-18.

Je vous remercie de votre attention.

Bonus

La preuve originelle de Pascal ?

- On ne sait pas comment Pascal prouvait son théorème dans le cas du cercle. On peut penser qu'il utilisait le théorème de Ménélaüs* et la puissance* d'un point par rapport à un cercle, voir Figure*.
- On applique Ménélaüs au triangle PQR avec les transversales rouges.
- Puis on utilise les puissances de P, Q, R par rapport au cercle et on conclut par la réciproque de Ménélaüs.
- Pourquoi je pense que c'est ça que faisait Pascal*.

La preuve de Pappus du théorème de la perspective

- On reprend la situation du théorème* de la perspective.

La preuve de Pappus du théorème de la perspective

- On reprend la situation du théorème* de la perspective.
- On trace les parallèles à (OA) passant par B et B'. Elles coupent (OC) en γ, γ' et (OD) en δ, δ'.

La preuve de Pappus du théorème de la perspective

- On reprend la situation du théorème* de la perspective.
- On trace les parallèles à (OA) passant par B et B'. Elles coupent (OC) en γ, γ' et (OD) en δ, δ'.
- Par Thalès on a $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \dfrac{\overline{AO}}{\overline{B\gamma}}$, $\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \dfrac{\overline{AO}}{\overline{B\delta}}$, $\dfrac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}} = \dfrac{\overline{A'O}}{\overline{B'\gamma'}}$ et $\dfrac{\overline{D'A'}}{\overline{D'B'}} = \dfrac{\overline{A'O}}{\overline{B'\delta'}}$,

La preuve de Pappus du théorème de la perspective

- On reprend la situation du théorème* de la perspective.
- On trace les parallèles à (OA) passant par B et B'. Elles coupent (OC) en γ, γ' et (OD) en δ, δ'.
- Par Thalès on a $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \dfrac{\overline{AO}}{\overline{B\gamma}}$, $\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \dfrac{\overline{AO}}{\overline{B\delta}}$, $\dfrac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}} = \dfrac{\overline{A'O}}{\overline{B'\gamma'}}$ et $\dfrac{\overline{D'A'}}{\overline{D'B'}} = \dfrac{\overline{A'O}}{\overline{B'\delta'}}$,
- donc $r = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \dfrac{\overline{B\delta}}{\overline{B\gamma}}$ et $r' = \dfrac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}} : \dfrac{\overline{D'A'}}{\overline{D'B'}} = \dfrac{\overline{B'\delta'}}{\overline{B'\gamma'}}$ et ces rapports sont égaux car on a $\dfrac{\overline{B\gamma}}{\overline{B'\gamma'}} = \dfrac{\overline{B\delta}}{\overline{B'\delta'}} = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OB'}}$ par Thalès.

La preuve de Pascal du théorème de la perspective ?

- On reprend la situation du théorème* de la perspective, dans le cas particulier $A = A'$ (le cas général s'en déduit aisément).

La preuve de Pascal du théorème de la perspective ?

- On reprend la situation du théorème* de la perspective, dans le cas particulier $A = A'$ (le cas général s'en déduit aisément).
- On applique Ménélaüs au triangle ABB' avec les transversales (CC') et (DD'). On trouve :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \times \frac{\overline{MB}}{\overline{MB'}} \times \frac{\overline{C'B'}}{\overline{C'A}} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \times \frac{\overline{MB}}{\overline{MB'}} \times \frac{\overline{D'B'}}{\overline{D'A}} = 1$$

La preuve de Pascal du théorème de la perspective ?

- On reprend la situation du théorème* de la perspective, dans le cas particulier $A = A'$ (le cas général s'en déduit aisément).
- On applique Ménélaüs au triangle ABB' avec les transversales (CC') et (DD'). On trouve :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \times \frac{\overline{MB}}{\overline{MB'}} \times \frac{\overline{C'B'}}{\overline{C'A}} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \times \frac{\overline{MB}}{\overline{MB'}} \times \frac{\overline{D'B'}}{\overline{D'A}} = 1$$

- En divisant on a exactement $[\![A, B, C, D]\!] = [\![A, B', C', D']\!]$.

La preuve de Pascal du théorème de la perspective ?

- On reprend la situation du théorème* de la perspective, dans le cas particulier $A = A'$ (le cas général s'en déduit aisément).
- On applique Ménélaüs au triangle ABB' avec les transversales (CC') et (DD'). On trouve :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \times \frac{\overline{MB}}{\overline{MB'}} \times \frac{\overline{C'B'}}{\overline{C'A}} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \times \frac{\overline{MB}}{\overline{MB'}} \times \frac{\overline{D'B'}}{\overline{D'A}} = 1$$

- En divisant on a exactement $[\![A, B, C, D]\!] = [\![A, B', C', D']\!]$.
- Comme Desargues utilise souvent Ménélaüs, on peut penser que c'est ainsi que Pascal procédait.

Ce que Pascal doit à Desargues

Nous démontrerons aussi cette propriété, dont le premier inventeur est M. Desargues Lyonnais, un des grands esprits de ce temps, et des plus versés aux Mathématiques, et entre autres aux Coniques, dont les écrits sur cette matière, quoiqu'en petit nombre, en ont donné un ample témoignage à ceux qui en auront voulu recevoir l'intelligence et [je] veux bien avouer que je dois le peu que j'ai trouvé sur cette matière à ses écrits, et que j'ai tâché d'imiter autant qu'il m'a été possible sa méthode sur ce sujet, qu'il a traité sans se servir du triangle par l'axe.

Ce qu'en dit Descartes

Avant que d'en avoir lu la moitié, j'ai jugé qu'il avait appris de M. Desargues : ce qui m'a été confirmé, incontinent après, par la confession qu'il en fit lui-même.

Les définitions de Pascal

Quand plusieurs lignes droites concourent à même point, ou sont toutes parallèles entre elles, toutes ces lignes sont dites de même ordre ... (Desargues dit plutôt de même ordonnance).

Par le mot section de Cône, nous entendons la circonférence du Cercle, l'Ellipse, l'Hyperbole, la Parabole et l'angle rectiligne, ... Figure*

Pappus et Pascal dans une même formule

- On a la relation :

$$[(b \wedge c') \wedge (b' \wedge c), (c \wedge a') \wedge (c' \wedge a), (a \wedge b') \wedge (a' \wedge b)] =$$

$$[b', c', a][c', a', b][a', b', c][a, b, c] - [b, c, a'][c, a, b'][a, b, c'][a', b', c'].$$

Pappus et Pascal dans une même formule

- On a la relation :

$$[(b \wedge c') \wedge (b' \wedge c), (c \wedge a') \wedge (c' \wedge a), (a \wedge b') \wedge (a' \wedge b)] =$$

$$[b', c', a][c', a', b][a', b', c][a, b, c] - [b, c, a'][c, a, b'][a, b, c'][a', b', c'].$$

- On en déduit que les points d'intersection de (bc') et $(b'c)$; (ca') et $(c'a)$; (ab') et $(a'b)$ sont alignés, c'est-à-dire le théorème de Pappus*.

Pappus et Pascal dans une même formule

- On a la relation :

$$[(b \wedge c') \wedge (b' \wedge c), (c \wedge a') \wedge (c' \wedge a), (a \wedge b') \wedge (a' \wedge b)] =$$

$$[b', c', a][c', a', b][a', b', c][a, b, c] - [b, c, a'][c, a, b'][a, b, c'][a', b', c'].$$

- On en déduit que les points d'intersection de (bc') et $(b'c)$; (ca') et $(c'a)$; (ab') et $(a'b)$ sont alignés, c'est-à-dire le théorème de Pappus*.
- On montre que a, b, c, a', b', c' sont sur une même conique est équivalent à :

$$[a, b, c][a, b', c'][a', b', c][a', b, c'] - [a, b', c][a, b, c'][a', b, c][a', b', c'] = 0.$$

On en déduit le théorème de Pascal*.

Les autres résultats de Pascal

- Il y a dans l'Essay d'autres résultats annoncés (sans démonstration) conséquences selon lui du "théorème de Pascal".

Les autres résultats de Pascal

- Il y a dans l'Essay d'autres résultats annoncés (sans démonstration) conséquences selon lui du "théorème de Pascal".
- La définition du birapport sur une conique.

Les autres résultats de Pascal

- Il y a dans l'Essay d'autres résultats annoncés (sans démonstration) conséquences selon lui du "théorème de Pascal".
- La définition du birapport sur une conique.
- Le théorème de la perspective. (Ce qui montre que la preuve de Pascal pour le cercle n'est sans doute pas celle que je propose.)

Les autres résultats de Pascal

- Il y a dans l'Essay d'autres résultats annoncés (sans démonstration) conséquences selon lui du "théorème de Pascal".
- La définition du birapport sur une conique.
- Le théorème de la perspective. (Ce qui montre que la preuve de Pascal pour le cercle n'est sans doute pas celle que je propose.)
- Le théorème "de Carnot", voir ci-dessous.

Les autres résultats de Pascal

- Il y a dans l'Essay d'autres résultats annoncés (sans démonstration) conséquences selon lui du "théorème de Pascal".
- La définition du birapport sur une conique.
- Le théorème de la perspective. (Ce qui montre que la preuve de Pascal pour le cercle n'est sans doute pas celle que je propose.)
- Le théorème "de Carnot", voir ci-dessous.
- Le théorème de Desargues sur les pinceaux de coniques.

Les autres résultats de Pascal

- Il y a dans l'Essay d'autres résultats annoncés (sans démonstration) conséquences selon lui du “théorème de Pascal”.
- La définition du birapport sur une conique.
- Le théorème de la perspective. (Ce qui montre que la preuve de Pascal pour le cercle n'est sans doute pas celle que je propose.)
- Le théorème “de Carnot”, voir ci-dessous.
- Le théorème de Desargues sur les pinceaux de coniques.
- Quelques résultats autour des diamètres.

Pascal et le birapport

- La notion de birapport (ou rapport anharmonique), si elle n'est pas vraiment définie à l'époque de Pascal est tout de même sous-jacente, voici ce qu'il dit un peu plus loin dans l'Essay :

Pascal et le birapport

- La notion de birapport (ou rapport anharmonique), si elle n'est pas vraiment définie à l'époque de Pascal est tout de même sous-jacente, voici ce qu'il dit un peu plus loin dans l'Essay :
- *... la raison composée des raisons de la droite PM, à la droite MA, et de la droite AS, à la droite SQ , est la même que la composée des raisons de la droite PL, à la droite LA, et de la droite AT à la droite TQ.*

Pascal et le birapport

- La notion de birapport (ou rapport anharmonique), si elle n'est pas vraiment définie à l'époque de Pascal est tout de même sous-jacente, voici ce qu'il dit un peu plus loin dans l'Essay :
- *... la raison composée des raisons de la droite PM, à la droite MA, et de la droite AS, à la droite SQ , est la même que la composée des raisons de la droite PL, à la droite LA, et de la droite AT à la droite TQ.*
- Cela signifie : $\dfrac{PM}{MA} \times \dfrac{AS}{SQ} = \dfrac{PL}{LA} \times \dfrac{AT}{TQ}$ soit encore $\dfrac{MP}{MA} : \dfrac{LP}{LA} = \dfrac{TA}{TQ} : \dfrac{SA}{SQ}$, soit (en faisant abstraction des signes) $[\![P, A, M, L]\!] = [\![A, Q, T, S]\!]$.

Le théorème de Carnot

Soit ABC un triangle et $P, P'; Q, Q'; R, R'$ des points situés respectivement sur les côtés (BC), (CA), (AB) et distincts des sommets. Alors, P, P', Q, Q', R, R' sont sur une même conique si et seulement si on a la relation :

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{P'C}}{\overline{P'B}} \times \frac{\overline{QA}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{Q'A}}{\overline{Q'C}} \times \frac{\overline{RB}}{\overline{RA}} \times \frac{\overline{R'B}}{\overline{R'A}} = 1.$$

Figure*