Autour du théorème de Bertini

Daniel PERRIN

1 Introduction

Ce que j'ai envie d'appeler théorème de Bertini est le résultat suivant :

1.1 Théorème. *On note X l'espace projectif $\mathbf{P}_k^N$ avec k algébriquement clos de caractéristique zéro et $N \geq 1$. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux faisceaux localement libres sur X, de rangs respectifs q et $q+1$. On suppose que le faisceau $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ est engendré par ses sections globales. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ un homomorphisme et soit Z le sous-schéma de X, lieu de dégénérescence de f. Alors, pour f général dans $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, Z est lisse de codimension 2 dans X.*

2 Matrices de rang r

On a le résultat suivant :

2.1 Théorème. *Soient p, q des entiers > 0 et r un entier $\leq \mathrm{Min}\,(p,q)$. Soit $\mathbf{M} := \mathbf{M}_{p,q}$ l'espace des matrices $p \times q$ à coefficients dans k, muni de sa structure de variété affine, et soit C_r (resp. C'_r) l'ensemble des matrices de rang $\leq r$ (resp. $= r$). L'ensemble C_r est un fermé de $\mathbf{M}$ et C'_r est un ouvert de C_r. La variété C_r est irréductible et de codimension $(p-r)(q-r)$ et l'ouvert C'_r est lisse.*

Démonstration. Il est clair que C_r est un fermé de $\mathbf{M}_{p,q}$ car il est défini par l'annulation des mineurs $(r+1) \times (r+1)$ et C'_r en est un ouvert pour la même raison. Pour montrer que C_r est irréductible, on considère la matrice $J = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où I_r désigne la matrice identité d'ordre r. L'ensemble C_r est alors l'image du morphisme $\varphi : \mathbf{M}_{p,p} \times \mathbf{M}_{q,q} \to C_r$ qui au couple (P,Q) associe PJQ. Comme les $\mathbf{M}$ sont des espaces affines, cela montre que C_r est irréductible. De plus, l'image de la restriction de φ à $GL(p,k) \times GL(q,k)$ est égale à C'_r et ses fibres sont toutes isomorphes à l'ensemble des couples (P,Q) qui vérifient $PJ = JQ$. Un calcul par blocs montre que P et Q sont de la forme suivante :

$$P = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} A & 0 \\ G & H \end{pmatrix}$$

où A est une matrice $r \times r$. La dimension des fibres est donc $i := p^2 + q^2 + r^2 - pr - qr$ et on en déduit que la dimension de C_r vaut $p^2 + q^2 - i = pr + qr - r^2$ comme annoncé.

Pour montrer la lissité de C'_r, comme c'est un espace homogène sous le groupe $GL(p) \times GL(q)$, il suffit de montrer qu'il est réduit, ce que j'admets provisoirement.

2.2 *Exemple.* Dans le cas $p = q+1$ et $r = q-1$, on voit que C'_{q-1} est lisse de codimension 2 dans $\mathbf{M}_{q+1,q}$.

3 Lieu de dégénérescence

Avec les notations du théorème, le lieu de dégénérescence de f est le schéma dont l'ensemble sous-jacent est formé des points en lesquels le rang de f est $\leq q-1$. Pour la structure de schéma, voir [H].

4 Engendré par ses sections

On suppose désormais qu'on est sur un espace projectif $\mathbf{P}^N$ et que les faisceaux $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont dissociés de rangs respectifs r et $r+1$. On a donc $\mathcal{E} = \bigoplus_{j=1}^r \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-m_j)$ et $\mathcal{F} = \bigoplus_{j=0}^r \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n_i)$. Alors, le faisceau $Hom_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ est isomorphe à $Hom_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{E}^\vee) \simeq \bigoplus_{i,j} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(m_j - n_i)$ et il est engendré par ses sections si et seulement si on a $m_j \geq n_i$ pour tous i, j.

5 La preuve du théorème

On pose $H = \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ et on considère le produit $H \times X$ et, dans ce produit, le sous-schéma Z des (f, x) tels que $f(x)$ est dégénéré. On montre que Z est lisse de codimension 2 dans $H \times X$. Il en résulte, par le théorème de lissité générique, que ses fibres le sont aussi. Pour voir la lissité, on montre que la projection sur $\mathbf{P}^2$ de Z est lisse et c'est parce que c'est un fibré (de fibres les C_r.