L'ensemble triadique de Cantor

L'ensemble triadique de Cantor $K \subset [0,1]$ est défini comme une intersection $K = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} K_n$ où les ensembles K_n sont définis par récurrence. On part de $K_0 = [0,1]$. Pour passer à K_1 on retire à K_0 un intervalle ouvert central (central signifie ici symétrique par rapport au milieu du segment initial) de longueur $1/3$, précisément l'intervalle $]1/3, 2/3[$. L'ensemble K_1 est donc réunion de deux segments de longueur $1/3$: $[0,1/3]$ et $[2/3,1]$. Pour passer à K_2 on retire à chacun de ces segments un intervalle ouvert central de largeur $1/9$. On obtient une réunion de 4 segments disjoints, chacun de longueur $1/9$, précisément : $[0,1/9]$, $[2/9, 1/3 = 3/9]$, $[2/3 = 6/9, 7/9]$ et $[8/9, 1 = 9/9]$. On construit ainsi par récurrence K_n qui est réunion de 2^n segments disjoints, chacun de longueur $\dfrac{1}{3^n}$, et on passe à K_{n+1} en retirant à chacun des segments constitutifs de K_n un intervalle ouvert central de largeur $1/3^{n+1}$.

0.1 Définition. *L'ensemble* $K = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} K_n$ *est appelé* **ensemble triadique de Cantor**.

Le lemme suivant explicite les segments qui composent K_n :

0.2 Lemme. *Soit n un entier ≥ 1. L'ensemble K_n est réunion des 2^n segments $I_{q_n} = \left[\dfrac{q_n}{3^n}, \dfrac{q_n+1}{3^n}\right]$ où q_n est un entier de la forme : $q_n = \sum_{i=1}^{n} a_i 3^{n-i}$ (autrement dit, $q_n = a_1 \dots a_{n-1}a_n$ en base 3), avec $a_i = 0$ ou $a_i = 2$. Précisément, si $I_{q_{n+1}}$ est un segment de K_{n+1}, contenu dans I_{q_n}, q_{n+1} est obtenu à partir de q_n en ajoutant à droite de son écriture en base 3 un chiffre des unités égal à 0 ou 2.*

Démonstration du lemme. On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 1$, on a $K_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$ et la propriété est vérifiée. Supposons qu'elle le soit au cran n et passons à $n+1$. On enlève donc le tiers central de chaque segment $\left[\dfrac{q_n}{3^n}, \dfrac{q_n+1}{3^n}\right]$. Pour cela on écrit ce segment sous la forme $\left[\dfrac{3q_n}{3^{n+1}}, \dfrac{3q_n+3}{3^{n+1}}\right]$ et il reste les deux segments $\left[\dfrac{3q_n}{3^{n+1}}, \dfrac{3q_n+1}{3^{n+1}}\right]$ et $\left[\dfrac{3q_n+2}{3^{n+1}}, \dfrac{3q_n+3}{3^{n+1}}\right]$. Si on écrit $q_n = a_1 \dots a_{n-1}a_n$ en base 3, on a $3q_n = a_1 \dots a_{n-1}a_n 0$ et $3q_n + 2 = a_1 \dots a_{n-1}a_n 2$, c'est-à-dire la forme annoncée pour q_{n+1}.

On peut maintenant décrire K_n et K :

0.3 Proposition.
1) La somme des longueurs des segments constitutifs de K_n est $\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot$ Cette quantité est positive (de sorte que K_n est non vide) et a pour limite 0 quand n tend vers l'infini.
2) L'ensemble K est compact, non vide, contenu dans $[0,1]$, d'intérieur vide (ce qui, dans le cas d'une partie de $\mathbf{R}$, équivaut à totalement discontinu).

Démonstration. Le point 1) est clair. Il est clair aussi que K_n est compact (fermé borné). Il est non vide car il contient 0 et 1. Montrons qu'il ne contient pas d'intervalle non réduit à un point. Si K contenait un intervalle de largeur $\epsilon > 0$, cet intervalle serait contenu dans K_n, donc dans l'un des segments qui le constituent et sont ses composantes connexes. Or, la longueur des intervalles constitutifs de K_n tend vers 0 avec n et elle est $< \epsilon$ pour n assez grand.

0.4 Théorème. *Tout élément x de K s'écrit de manière unique sous la forme (dite triadique) :*

$$(*) \qquad x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$$

où les a_i sont égaux à 0 ou 2. Réciproquement, tout nombre de cette forme est dans K. On note (par analogie avec les écritures décimales illimitées) :

$$x = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

Démonstration. Montrons d'abord l'unicité de l'écriture. Supposons que x admette deux écritures $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$ et $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}$ avec les a_i et les b_i égaux à 0 ou 2. Soit n le plus petit entier tel que $a_n \neq b_n$ et supposons, par exemple, $a_n = 0$ et $b_n = 2$. On a alors d'une part, avec l'écriture en a_i :

$$x \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{0}{3^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^n}$$

et d'autre part, avec l'écriture en b_i :

$$x \geq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{2}{3^n}$$

et c'est absurde.

Montrons ensuite que les nombres x de la forme $(*)$ sont dans K. En effet, si on a $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$ avec des a_i égaux à 0 ou 2, et si on pose $q_n = \sum_{i=1}^{n} a_i 3^{n-i}$, on a l'encadrement : $\frac{q_n}{3^n} \leq x \leq \frac{q_n + 1}{3^n}$ (car on a $\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} = \frac{1}{3^n}$) ce qui montre que x est dans K_n en vertu du lemme 0.2. Comme cela vaut pour tout n, x est bien dans K.

Montrons enfin que, si x est dans K, il s'écrit sous la forme $(*)$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on considère le segment I_{q_n} de K_n qui contient x, et sa borne inférieure $x_n = \frac{q_n}{3^n}\cdot$ On a $|x - x_n| \leq \frac{1}{3^n}$, ce qui montre que la suite x_n converge vers x. Appelons a_n le chiffre des unités de q_n en base 3. On sait que ce chiffre est égal à 0 ou 2 en vertu de 0.2 et on montre par récurrence sur n qu'on a $q_n = a_1 \dots a_n$. En effet, le passage de q_n à q_{n+1} résulte du lemme 0.2. Le nombre x est donc limite de la suite $x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i}$, c'est-à-dire la somme de la série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}\cdot$

0.5 Corollaire. *L'ensemble triadique de Cantor n'est pas dénombrable.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde en supposant K dénombrable. Cela signifie qu'on pourrait numéroter les éléments de K : $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, cette suite les épuisant tous. On va montrer que ceci est impossible en construisant un élément de K, distinct de tous ceux de la suite (x_n).

Pour cela on écrit $x_1, \dots x_n, \dots$ sous forme triadique et on construit x en se donnant son développement triadique $x = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ comme suit. On choisit $a_1 \in \{0, 2\}$ différent du premier chiffre après la virgule de x_1, disons $x_{1,1}$. C'est possible : si $x_{1,1}$ vaut 0 on pose $a_1 = 2$, si $x_{1,1}$ vaut 2 on pose $a_1 = 0$. On choisit ensuite $a_2 \in \{0, 2\}$ distinct du deuxième chiffre après la virgule de x_2, et ainsi de suite, on choisit $a_n \in \{0, 2\}$ distinct du n-ième chiffre après la virgule de x_n. On a construit ainsi un élément de K. De plus, il est différent de tous les termes de la suite. En effet, il est différent de x_1 car ils n'ont pas le même premier chiffre après la virgule, de x_2 à cause du deuxième chiffre, de x_n à cause du n-ième chiffre : cqfd.