Riemann contre Lebesgue

Dans ces quelques lignes, j'essaie de dire ce qui fait la différence, au fond, entre Riemann et Lebesgue, et pourquoi Lebesgue c'est mieux que Riemann.

Pour simplifier, plaçons-nous dans un cas simple, celui d'une fonction $f : [a, b] \to [A, B]$, définie sur un intervalle compact et bornée sur cet intervalle. On supposera même $f \geq 0$ pour pouvoir s'appuyer sur la notion intuitive d'aire. L'idée de base de l'intégrale c'est celle que l'on apprend en terminale : l'intégrale c'est l'aire sous la courbe représentative de f, mais il s'agit de la calculer, voire pour des fonctions qui peuvent être compliquées, de la définir. Dans les deux cas on va utiliser deux ingrédients :

• L'aire du rectangle : si on a une partie $A \times B$ de $\mathbf{R}^2$, son aire c'est $l(A) \times l(B)$, où l désigne la longueur. C'est la formule *longueur* $\times$ *largeur* de l'école primaire. Encore faut-il savoir ce qu'on entend par longueur si A et B sont des parties de $\mathbf{R}$ un peu compliquées (on pense aux ensembles de Cantor, par exemple).

• La croissance de l'aire : si on a $E \subset F$, l'aire de E est plus petite que celle de F. Euclide disait ça sous la forme “le tout est plus grand que la partie”.

Riemann

La voie Riemann consiste à prendre sur l'axe des x des parties simples, pour lesquelles le calcul de la longueur ne pose pas de problème : les intervalles. Cela signifie qu'on découpe $[a, b]$ avec une subdivision S : $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b$ et que l'on encadre f sur les intervalles de la subdivision (comme f est bornée il n'y a pas de problème) par ses bornes m_i et M_i. On obtient alors les sommes de Darboux : $\sigma(S, f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (s_{i+1} - s_i)\, m_i$ et $\Sigma(S, f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (s_{i+1} - s_i)\, M_i$, qui correspondent aux sommes des aires des rectangles (des vrais, ici) et qui encadrent l'aire sous la courbe f. L'intégrale est alors la limite commune de ces sommes, si toutefois elle veut bien exister, ou plutôt la borne supérieure des σ et inférieure des Σ, pour autant qu'elles coïncident. On dit qu'on calcule l'intégrale en **piles**.

On peut encore dire cela en termes de fonctions en escalier : la fonction f est encadrée par les fonctions $esc(S, m_i)$ et $esc(S, M_i)$ et l'intégrale est encadrée par les intégrales de fonctions en escalier.

L'avantage de Riemann c'est qu'il n'y a pas besoin d'être bien savant pour mesurer des longueurs sur $\mathbf{R}$: les intervalles suffisent. L'inconvénient de Riemann c'est qu'on n'a pas assez de fonctions intégrables pour avoir les bons théorèmes de convergence.

Lebesgue

La voie Lebesgue consiste à faire la même chose que Riemann, **mais sur l'axe des y au lieu de l'axe des x**, c'est-à-dire à encadrer f à partir des valeurs de $y = f(x)$ et non pas des valeurs de x. Pour cela, on partage l'image $[A, B]$ de f en n parties en utilisant des points $t_0 = A < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = B$. On considère alors, pour $i = 0, \ldots, n-1$, les ensembles

$$E_i = f^{-1}([t_i, t_{i+1}[) = \{\ x \in [a, b]\ \mid\ t_i \leq f(x) < t_{i+1}\ \}.$$

Attention, les ensembles E_i peuvent être très compliqués (penser au cas où f est la fonction caractéristique d'un Cantor) mais, s'ils ont une mesure $\lambda(E_i)$, on peut encadrer $\int_a^b f$ entre les $\sum_{i=0}^{n-1} t_i\, \lambda(E_i)$ et $\sum_{i=0}^{n-1} t_{i+1}\, \lambda(E_i)$. C'est encore l'aire du "rectangle" (mais avec un rectangle de base compliquée) ou, plus savamment, c'est Bienaymé-Tchebychev. On montre, voir 0.2 ci-dessous, que l'intégrale de f est la borne supérieure (resp. inférieure) des petites (resp. grandes) sommes. On dit qu'on calcule l'intégrale en **tranches**.

Là encore, on peut dire cela en termes d'encadrement par des fonctions plus simples, mais, comme les bases des rectangles ne sont plus des intervalles, il ne s'agit plus de fonctions en escalier. Précisément, on définit :

0.1. Définition. *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. On dit que f est une fonction* **étagée** *si elle vérifie l'une des conditions suivantes*[1] *:*
1) f est mesurable et ne prend qu'un nombre fini de valeurs,
2) f est de la forme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ avec $\lambda_i \in \mathbf{R}$ et les A_i mesurables,
3) f est de la forme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ avec $\lambda_i \in \mathbf{R}$ et les A_i mesurables disjoints.
L'intégrale de f est alors définie par la formule $\int_{\mathbf{R}} f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda(A_i)$ (toujours l'aire du "rectangle").

Ce que dit la voie Lebesgue, c'est que l'intégrale de f est obtenue comme borne supérieure (resp. inférieure) des intégrales des fonctions étagées plus petites (resp. plus grandes) qu'elle. C'est justifié par le théorème suivant :

[1] On vérifie facilement qu'elles sont équivalentes.

0.2. Théorème. *Soit f une fonction Lebesgue-intégrable positive. L'intégrale de f est la borne supérieure des intégrales des fonctions étagées g qui sont inférieures ou égales à f. Si f est bornée on a la même propriété avec la borne inférieure des fonctions étagées $\geq f$.*

Démonstration. Notons que le fait que f soit positive assure qu'il existe des fonctions étagées plus petite (par exemple la fonction nulle). Il est clair qu'on a $\int g \leq \int f$ donc $\sup \int g \leq \int f$. Réciproquement, supposons que le sup s des intégrales des fonctions étagées $h \leq f$ soit strictement plus petit que $\int f$. Pour $n \in \mathbf{N}$, il existe une fonction étagée h_n avec $s - \frac{1}{n} \leq \int h_n \leq s$. Quitte à remplacer h_n par $g_n = \mathrm{Max}\,(h_1, \ldots, h_n)$ on peut supposer la suite (h_n) croissante. Le théorème de Beppo-Levi montre que cette suite converge vers une fonction $g \leq f$ au sens de la convergence simple presque partout et au sens de L^1 et qu'on a $\int g = \lim h_n = s < \int f$. Comme on a $\int (f - g) > 0$, il y a un ensemble A de mesure positive sur lequel on a $f - g \geq \eta > 0$ (considérer les ensembles sur lesquels on a $f - g \geq 1/n$). On considère les fonctions $h_n + \eta \chi_A$. Ce sont des fonctions étagées, plus petites que f et le sup de leurs intégrales est $s + \eta\chi(A) > s$: c'est absurde.

0.3. *Remarques.*
1) Si f est bornée l'assertion sur l'inf se montre de la même façon. Attention, si f n'est pas bornée, il n'y a aucune fonction étagée qui majore f et la propriété avec l'inf des étagées est fausse (exemple $1/\sqrt{x}$ sur $]0, 1]$).
2) On rencontre là une autre différence entre Riemann et Lebesgue. Dans la théorie de Riemann, les intégrales, qui sont des réels, sont vus comme des limites de suites adjacentes, dans la théorie de Lebesgue, on se contente de les voir comme des bornes supérieures (sans les encadrer au-dessus). C'est, à mon avis, une différence conceptuelle essentielle.

Riemann et Lebesgue copains, ça d'vrait pouvoir se faire ?

Il y a au moins un cas où les deux approches sont les mêmes : pour les fonctions monotones. En effet, si f est, disons, croissante, les sommes de Lebesgue et de Riemann coïncident car on a $E_i = [s_i, s_{i+1}[$.

Et pourquoi que c'est mieux Lebesgue, hein ?

Si on a une vision utilitaire des choses, on peut dire que Lebesgue c'est mieux parce que les théorèmes qu'on y obtient sont plus efficaces. Il suffit de penser aux théorèmes de convergence monotone et dominée ou aux intégrales dépendant d'un paramètre pour en être convaincu. C'est sûr. Mais ce qu'on peut se demander c'est, pourquoi peut-on obtenir ces théorèmes avec la méthode de Lebesgue (le découpage en tranches) et pas avec celle de Riemann (le découpage en piles) ? La question n'est pas évidente et ce qu'on a fait au chapitre 2 du polycopié ne permet pas d'y répondre, car l'entrée par l'analyse fonctionnelle masque la définition "en tranches". Nous verrons mieux ce qui est utilisé au chapitre 4, notamment pour la preuve du théorème de convergence monotone. En fait, le point technique qui semble crucial est le suivant : si on a une fonction f intégrable (éventuellement méchante) et une fonction u étagée, on a besoin, dans le théorème de convergence monotone comme on le fera au chapitre 4, de considérer la fonction v qui vaut $u(x)$ si $u(x) \leq f(x)$ et 0 sinon. Il est clair que v est encore étagée (elle ne prend toujours qu'un nombre fini de valeurs). En revanche, si l'on faisait ça avec une fonction u en escalier, voire une constante, v ne serait plus en escalier, même si f est Riemann-intégrable. En effet, l'ensemble des points où f est $\geq u$ peut-être une cochonnerie sans nom et pas du tout un intervalle ou une réunion finie d'intervalles (ce qui serait nécessaire pour avoir une fonction en escalier). Exemple : $f = \chi_K$ où K est le Cantor triadique et $u = 1/2$.