

Cours numéro 3 :

équations différentielles du premier ordre, 1

On commence une série de plusieurs chapitres sur les équations différentielles du premier ordre.

1 Rappels

1.1 L'équation différentielle linéaire du premier ordre

1.1.1 L'équation toute nue

Rappelons le résultat :

1.1 Théorème. *Les solutions de l'équation différentielle (*) : $y' = \alpha y$, $\alpha \in \mathbf{R}$, sont les fonctions $f(x) = \lambda e^{\alpha x}$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$.*

Démonstration. Avec les programmes de terminale de 2002 c'est presque évident¹. Rappelons comment on trouve cela avec les anciens programmes². On écrit, si $y(x)$ n'est pas nul, $\frac{y'(x)}{y(x)} = \alpha$. On reconnaît une dérivée logarithmique, de sorte qu'en prenant une primitive on a $\ln |y(x)| = \alpha x + c$ et on voit donc en tous cas, apparaître des solutions de la forme $y(x) = \lambda e^{\alpha x}$. Bien entendu, ce calcul a le défaut de nécessiter le fait que y ne s'annule pas. Mais maintenant qu'il nous a donné une solution on peut l'oublier et utiliser la méthode classique de variation de la constante : on cherche les solutions sous la forme $y(x) = z(x)e^{\alpha x}$ ou encore, on pose $z(x) = y(x)e^{-\alpha x}$. En dérivant on voit que z' est nulle, donc z constante et on a gagné.

1. Voir, sur ma page web, *Une définition de la fonction exponentielle dans l'esprit des nouveaux programmes*. On y évoque aussi la méthode d'Euler qui conduit à voir l'exponentielle comme la limite de $u_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$. Les programmes de 2012 ont maintenu l'introduction de l'exponentielle par l'équation différentielle ... mais ont supprimé le reste du chapitre sur le sujet !

2. Les anciens programmes d'aujourd'hui seront peut-être les nouveaux de demain, qui sait ?

1.1.2 Avec un second membre

On s'intéresse maintenant à l'équation l'équation (**): $y' - \alpha y = f(x)$ où f est une fonction continue définie sur un intervalle I de \mathbf{R} . On a d'abord :

1.2 Théorème. *Les solutions de l'équation (**) sur l'intervalle I forment un espace affine dont l'espace vectoriel associé est l'espace des solutions de l'équation (*). En termes plus élémentaires : la solution générale de (**) s'obtient en ajoutant à une solution particulière de (**) la solution générale de (*).*

Démonstration. Si on a une solution, il est clair que les autres s'obtiennent comme on a dit. Pour l'existence (et souvent pour le calcul direct) on utilise la variation de la constante : on pose $y(x) = z(x)e^{\alpha x}$. Le calcul donne $z'(x) = f(x)e^{-\alpha x}$ et si z est une primitive de cette fonction continue sur I , z convient.

1.3 Remarque. Dans certains cas particuliers on peut trouver directement une solution de (**). C'est le cas, par exemple, si f est constante, un polynôme, une fonction exponentielle ou trigonométrique. Dans le cas d'une fonction constante on cherche une solution constante, si $f(x) = e^{\beta x}$ on cherche une solution $\lambda e^{\beta x}$, sauf dans le cas $\beta = \alpha$ où la solution particulière est $x e^{\alpha x}$ (c'est le phénomène de résonance), etc.

1.2 L'équation fonctionnelle

Une autre manière de trouver des exponentielles est d'utiliser leur équation fonctionnelle : $e^{x+y} = e^x e^y$. Il y a plusieurs façons de prouver les résultats ci-dessous. Nous avons choisi celle qui utilise l'équation différentielle, voir Annexe.

Le résultat le plus classique est sur \mathbf{R} , celui dont nous aurons besoin est sur \mathbf{R}^+ .

1.2.1 Les résultats sur \mathbf{R}

1.4 Théorème. *Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction vérifiant l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$. On suppose de plus, soit que f est continue en un point, soit qu'elle est monotone, et qu'elle n'est pas nulle. Alors, il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que l'on ait, pour tout x , $f(x) = e^{\alpha x}$.*

1.2.2 Le résultat sur \mathbf{R}^+

1.5 Corollaire. *Soit $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ une fonction monotone vérifiant l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$. On suppose qu'il existe un*

$x > 0$ tel que $f(x) \neq 0$. Alors, il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que l'on ait, pour tout x , $f(x) = e^{\alpha x}$.

2 Décroissance exponentielle : les modèles probabilistes

La source principale de ce paragraphe est le document d'accompagnement des programmes de terminale S de 2002, cité [DA] ci-dessous.

2.1 Introduction

Les modèles de décroissance exponentielle étudiés ici s'appliquent à une large classe de phénomènes qui concernent aussi bien la dynamique des populations que la radioactivité, l'élimination des médicaments par les organismes, etc. Dans ce qui suit on s'intéressera plus particulièrement à la radioactivité et à son application à la datation, mais le cadre est plus général.

Dans tous les cas on suppose qu'on est en présence d'une population (de cellules, d'atomes, ...) qui varie en fonction du temps t . On repère *a priori* cette population par un nombre entier d'individus $\widehat{N}(t)$. Attention, on arrive très vite ainsi à des paradoxes car les fonctions du type $\widehat{N}(t)$, étant à valeurs entières, sont des fonctions discontinues du temps. On pourrait imaginer de mesurer cette population par une variable continue, par exemple sa masse $m(t) \in \mathbf{R}$. C'est un peu spécieux si l'on pense que la matière est discrète, car on a encore des résultats discrets, mais c'est physiquement justifié si le nombre d'individus est très grand (comme dans le cas d'atomes ou de bactéries) et sinon, c'est commode. Le point principal, en fin de compte, c'est que cette extrapolation aux réels donne des résultats plausibles : c'est l'ordre de grandeur de la population qui compte et on peut retrouver des entiers en prenant la partie entière des valeurs obtenues.

2.2 Les hypothèses

On suppose donc qu'on a une population susceptible d'être dans deux états. On les nommera **vie** et **mort**, étant entendu que cela peut être aussi bien Carbone 14 et Carbone 12 ou toute autre chose. On suppose les postulats suivants réalisés :

1) On suppose qu'on peut passer de l'état de vie à l'état de mort, mais pas l'inverse : il n'y a **pas de naissances**.

2) On suppose que les individus en vie sont identiques entre eux : chacun a autant de chances de mourir, il n’y a **ni malades, ni faibles, ni forts**.

3) On suppose que les chances de mourir sont les mêmes au cours du temps : les individus ne vieillissent pas, un individu (vivant) a les mêmes chances de mourir pendant un laps de temps h , que ce soit au temps t ou au temps 0. On parle de loi **sans vieillissement**.

On suppose de plus que le passage de vie à trépas se fait de manière **aléatoire**. Cela va se traduire de deux manières différentes.

2.3 Modélisation en terme de fréquences

On suppose que le phénomène est repéré par une fonction $N(t)$, à valeurs réelles, qui “approche” le nombre $\widehat{N}(t)$ d’individus mais avec laquelle on va pouvoir traduire les postulats.

Au temps $t = 0$ on a une population $N(0) > 0$. L’hypothèse numéro 1 dit que la fonction $N(t)$ est décroissante. On traduit les hypothèses 2) et 3) en disant que le rapport entre le nombre de morts entre les temps t et $t + h$, $h > 0$, et la population au temps t , est indépendant³ de t . Autrement dit⁴ :

$$\frac{N(t) - N(t + h)}{N(t)} = \frac{N(0) - N(h)}{N(0)}.$$

Intuitivement, ce rapport est la probabilité qu’un individu meure entre les temps t et $t + h$, dite en termes de fréquences : nombre de cas favorables (si j’ose dire) sur nombre total de cas. On développe cette expression et on a $N(t + h)N(0) = N(t)N(h)$. Si on pose $G(t) = \frac{N(t)}{N(0)}$, la fonction G vérifie l’équation fonctionnelle $G(t + h) = G(t)G(h)$, pour tous $t, h \in \mathbf{R}^+$. Comme G est décroissante⁵, il existe $\alpha > 0$ tel que $G(t) = e^{-\alpha t}$ et on en déduit $N(t) = N(0)e^{-\alpha t}$.

2.1 Remarque. On peut retrouver le résultat avec l’équation différentielle directement (mais il faut une hypothèse supplémentaire). La relation ci-dessus s’écrit encore :

$$\frac{N(t + h) - N(t)}{h} = \frac{N(h) - N(0)}{h} \frac{N(t)}{N(0)}.$$

3. Avec une modélisation discrète : $N(t)$ entier, cette hypothèse est impossible puisqu’elle mène à une exponentielle.

4. On peut montrer que $N(t)$ ne peut pas s’annuler, voir Annexe 2.

5. Il faut aussi supposer qu’il existe $t > 0$ tel que $G(t) \neq 0$. Sinon, tout le monde est mort tout de suite ...

Si l'on suppose que la fonction N est dérivable en 0, le taux d'accroissement $\frac{N(h) - N(0)}{h}$ tend vers $N'(0)$ quand h tend vers 0 et on en déduit que $\frac{N(t+h) - N(t)}{h}$ tend vers $\frac{N'(0)}{N(0)}N(t)$ ce qui montre que N est dérivable partout et vérifie l'équation différentielle $N'(t) = \frac{N'(0)}{N(0)}N(t)$. En posant $\alpha = -\frac{N'(0)}{N(0)}$ on retrouve le résultat précédent.

2.4 Modélisation en termes de loi de probabilité

2.4.1 La loi de probabilité

Ce qu'il est important de comprendre ici c'est qu'on décrit le devenir (i.e. la durée de vie) **d'un** individu de la population. Comme on suppose que le phénomène est aléatoire, on modélise cette durée de vie par une variable aléatoire X à valeurs réelles⁶ (c'est-à-dire une fonction définie sur l'ensemble E des individus et à valeurs réelles positives). On note F la fonction de répartition de X , $F(t) = P(X < t)$: c'est la probabilité que la mort survienne avant l'instant t . On pose $G(t) = 1 - F(t)$. C'est, au contraire, la probabilité de survie à l'instant t : $P(X \geq t)$ et on a $G(0) = 1$. C'est cette fonction G que l'on va calculer. L'hypothèse de non vieillissement indique que la probabilité de mort (ou de survie) entre les temps 0 et t est égale à celle de mort (ou de survie) entre les temps s et $s + t$. Pour la survie, cette probabilité est donc $G(t)$. L'hypothèse numéro 1 montre que $G(t)$ est décroissante.

2.4.2 Calcul de la densité

On calcule alors, pour $t, s > 0$ la quantité $G(s + t)$, probabilité d'être encore en vie au temps $s + t$. Pour être en vie au temps $s + t$ il faut d'abord être en vie au temps s . Cet événement a la probabilité $G(s)$. Ensuite, il faut survivre entre les temps s et $s + t$ et on a dit ci-dessus que la probabilité de cet événement est $G(t)$. La quantité $G(s + t)$ est la probabilité conditionnelle : probabilité que l'individu soit encore en vie au temps $s + t$, sachant qu'il l'était au temps s . On a donc, en vertu de la formule des probabilités conditionnelles, $G(t + s) = G(s)G(t)$.

6. Mais, même avec cette modélisation on n'échappe pas à la difficulté du passage discret-continu.

2.4.3 Conclusion sur G

Le postulat 1) donne la décroissance de la fonction G et la relation fonctionnelle implique alors que G est une fonction exponentielle. Avec $G(0) = 1$, on a donc, comme ci-dessus, $G(t) = e^{-\alpha t}$ avec $\alpha > 0$.

2.4.4 Le calcul de $N(t)$

Bien entendu, on peut retrouver alors le nombre $N(t)$ d'individus en vie au temps t avec l'interprétation fréquentiste de la probabilité : $G(t) = N(t)/N(0)$ (le nombre de cas favorables : individus en vie à l'instant t , divisé par le nombre de cas possibles : individus en vie au départ, c'est ici qu'on utilise l'hypothèse numéro 2) et on a alors $N(t) = N(0)e^{-\alpha t}$. Pour éviter les contestations sur le fait que $N(t)$ est entier, il suffit de dire que $N(t)$ est le nombre moyen d'individus en vie à l'instant t .

Si l'on est un indécrottable probabiliste, on préférera le dire de manière plus sophistiquée. On fixe un nombre $t \geq 0$ et on considère la loi de survie d'un individu entre 0 et t . Cette fois il s'agit d'une variable aléatoire $S : E \rightarrow \{0, 1\}$ (épreuve de Bernoulli) qui vaut 1 si l'individu survit et 0 s'il meurt dans l'intervalle $[0, t]$. Par définition de G , la probabilité de survie $p(S = 1)$ est $p = G(t)$ et celle de mort est $1 - p$. Si on considère que tous les $n = N(0)$ individus sont indépendants, et qu'on effectue n épreuves, on obtient une loi binomiale $B(n, p)$. (C'est une sorte de jeu de pile ou face truqué). Le sens mathématique assigné à l'expression "nombre moyen d'individus en vie au temps t " est alors simplement l'espérance de cette loi et on montre que c'est bien $np = N(0)G(t) = N(t)$.

Rappelons ce calcul⁷. Si on lance n fois la pièce, la probabilité d'obtenir k fois pile (avec $0 \leq k \leq n$) est égale à $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. En effet, on choisit les k issues piles parmi les n et on regarde la probabilité qu'elles donnent pile et que les autres donnent face. L'espérance de la loi binomiale est alors $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. C'est np . Pour le voir on écrit : $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$, on dérive par rapport à x , on multiplie par x et on fait $x = p$, $y = 1 - p$.

Ici on a donc comme moyenne des individus en vie à l'instant t le nombre $N(t) = N(0)G(t) = N(0)e^{-\alpha t}$.

7. On peut aussi utiliser la linéarité de l'espérance.

3 Application : radioactivité et datation

3.1 Pourquoi la radioactivité ?

Dans ce paragraphe, j'essaie d'expliquer, de manière très schématique, la façon dont les physiciens voient le phénomène de radioactivité. Je me suis inspiré fortement de [DA].

Un noyau atomique est formé de A nucléons, Z protons et $N = A - Z$ neutrons. L'équilibre du noyau résulte de la concurrence entre deux interactions (on néglige la force de gravitation) :

1) l'interaction forte, attractive, entre nucléons (protons ou neutrons), intense, mais de courte portée (moins de 4×10^{-15} m). Cette interaction contribue à l'énergie du noyau par un terme proportionnel à A (car chaque nucléon n'agit que sur ses proches voisins).

2) L'interaction électrique (dite "coulombienne", en référence à la loi de Coulomb) entre charges électriques de même nature (ici, les protons). Elle est répulsive, plus faible, mais met en jeu tous les protons et contribue à l'énergie par un terme⁸ en $A^{5/3}$.

Lorsqu'on a des gros noyaux (avec A grand, donc aussi Z), c'est l'interaction coulombienne qui l'emporte et s'il y en a trop, le noyau devient instable. C'est le cas des noyaux de grand numéro atomique (par exemple l'uranium, 92, dernier élément naturel). On a alors des phénomènes de radioactivité⁹.

3.1.1 Période, ou demi-vie

La radioactivité rentre dans le cadre précédent et donne lieu à des lois de la forme $N(t) = N(0)e^{-\alpha t}$. On appelle **demi-vie ou période** le temps τ qui correspond à la désintégration de la moitié de la masse. On a donc $e^{-\alpha\tau} = 1/2$, ou encore $\tau = \ln 2/\alpha$. Ces demi-vies dépendent fondamentalement des corps. Exemples : pour l'uranium 238, c'est $4,5 \times 10^9$ ans, pour le carbone 14, c'est 5730 ans, mais pour le radon 220 c'est 56 secondes et pour le polonium 213, 4×10^{-6} secondes.

8. Voici comment on peut expliquer cette valeur. La force électrostatique entre deux particules distantes de r est en $1/r^2$, donc l'énergie est en $1/r$. Le nombre de particules interagissant est $Z(Z-1)/2$ qui est de l'ordre de A^2 . Cherchons maintenant la distance moyenne entre deux protons. Appelons a le rayon d'un nucléon (proton ou neutron). Le volume du noyau est alors de l'ordre de Aa^3 , donc son rayon de l'ordre de $A^{1/3}$. Mais alors, c'est aussi la distance moyenne r entre deux protons et on a donc $r \sim A^{1/3}$ et l'énergie est donc de l'ordre de $A^2 \times A^{-1/3} = A^{5/3}$.

9. Parmi les premiers physiciens ayant étudié ce phénomène on peut citer Becquerel, Pierre et Marie Curie et Rutherford.

3.2 Un exemple : la datation au carbone 14

Nous allons étudier trois exemples de datations. Un point important, commun aux trois, est le suivant. Tous ces phénomènes se passent de la même manière : il y a une première phase, dite ouverte, dans laquelle les différents composants s'équilibrent, puis un événement provoque la **fermeture** du système et le début de la phase de désintégration exponentielle. Selon les cas, cet événement peut être la mort d'un être vivant (carbone 14), la cristallisation des roches (rubidium-strontium) ou le traitement du minerai (plomb) et c'est sur cet événement qu'il convient de préciser les hypothèses.

3.2.1 Le carbone 14

Le carbone-14 est un isotope du carbone (le carbone "normal" est le carbone-12) instable et radioactif. Il est produit en haute atmosphère et dû au rayonnement cosmique, constitué principalement de protons, mais qui produit aussi des neutrons secondaires. Ces neutrons peuvent être capturés par les noyaux d'azote 14 de l'air selon la formule : ${}^{14}_7N + n \rightarrow {}^{14}_6C + p$ (n signifie neutron et p proton, l'azote, de masse molaire 14, avec 7 protons, lorsqu'il est percuté par un neutron perd l'un de ses protons et devient du carbone, de masse molaire 14 aussi, mais avec seulement 6 protons).

Le carbone-14 est produit régulièrement par ce processus. Il est en proportion à peu près constante¹⁰ dans l'atmosphère (sous forme de gaz carbonique CO₂), ainsi que chez les êtres vivants où il est renouvelé par le contact avec l'air (par la respiration chez les animaux, la fonction chlorophyllienne chez les plantes). Cette proportion est environ de $1,2 \times 10^{-12}$ noyaux de carbone-14 pour 1 noyau de carbone-12. Lorsqu'un individu ou une plante meurt, les échanges avec le milieu extérieur cessent et son carbone n'est plus renouvelé. Par conséquent le carbone-14 qu'il contient se désintègre, en redonnant un noyau d'azote-14, et ceci avec une demi-vie τ de 5730 ans (donc un coefficient de décroissance exponentielle $\alpha = \ln 2/\tau \simeq 0,000121$). Il suffit de mesurer la proportion dans les restes organiques (os, cheveux, bois) pour connaître l'époque de la mort. On peut ainsi dater des événements qui se sont déroulés jusqu'à il y a quelques milliers d'années (au-delà de 30000 à 35000 ans, la plus grande partie des noyaux de carbone-14 ont été désintégrés et le comptage ne peut plus se pratiquer).

10. Ce n'est pas tout à fait exact. En particulier, les essais nucléaires en atmosphère des années 1950-60 ont accru la proportion de carbone-14. Au contraire, la combustion des carburants fossiles, qui contiennent peu de carbone-14, tend à faire diminuer sa concentration. Ces variations nécessitent des corrections que les scientifiques opèrent régulièrement.

3.2.2 Un exemple

Examinons par exemple la datation de l'occupation de la grotte de Lascaux, telle qu'elle a été menée en 1950. On a prélevé dans la grotte du charbon de bois datant de l'occupation préhistorique et on a mesuré la vitesse de désintégration du carbone 14 dans cet échantillon, c'est-à-dire la quantité $\alpha N(t)$, égale à 1,7 atome par minute et par gramme. Par ailleurs, on a mesuré aussi cette vitesse sur un échantillon de bois fraîchement coupé. L'hypothèse fondamentale, évoquée ci-dessus, c'est que cette vitesse, qui ne dépend que de la proportion de carbone 14 au moment de la mort (la "fermeture"), est indépendante du temps. Autrement dit, la vitesse mesurée sur un bois de même nature coupé en 1950 est la même que celle qui aurait pu être mesurée sur un bois coupé à l'époque préhistorique. C'est donc $\alpha N(0)$, ici¹¹ 13,6. Le rapport entre les deux est alors $e^{-\alpha t}$ où t est l'âge du charbon de bois. On trouve donc $t = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{13,6}{1,7}\right) \simeq 17185$ ans. Cela fait remonter l'occupation de la grotte à environ 15200 ans avant J.-C. On notera qu'ici, la connaissance de $N(0)$ rend le calcul très facile. Ce ne sera plus le cas dans les exemples suivants. Il reste toutefois une difficulté concernant l'âge des peintures de Lascaux car, contrairement à d'autres sites, le noir utilisé ne provient pas du charbon de bois, mais d'un oxyde de manganèse.

Signalons, pour terminer, l'une des méthodes qui permettent de déterminer la période du carbone 14. Elle utilise un procédé à la fois rudimentaire et poétique¹², mais très fiable, qui est la dendrochronologie : datation qui consiste à compter les cernes des arbres abattus pour connaître leur âge. La comparaison entre les datations issues de la dendrochronologie et celles provenant du carbone 14 permettent de vérifier la validité de la datation au carbone 14 et de l'étalonner de manière plus précise.

4 Un exemple : l'âge de la terre

Je m'inspire encore fortement ici de [DA], voir aussi le livre d'Hubert Krivine *La Terre, des mythes au savoir* (Cassini, 2011).

Les débats sur l'âge de la Terre sont anciens, multiples et passionnés. Encore aujourd'hui ils opposent les scientifiques et les partisans de thèses créationnistes (chrétiens ou musulmans notamment), très actifs sur Internet.

11. Voir exercice 6.1.

12. Ecoute, Bûcheron, arrête un peu le bras!

Ce ne sont pas des bois que tu jettes à bas :

Ne vois-tu pas le sang, lequel dégoutte à force

Des Nymphes qui vivaient dessous la dure écorce ?

Je vais expliquer ici les arguments de datation, fondés sur la radioactivité, qui permettent de donner à la Terre un âge de 4,55 milliards d'années, à quelques millions d'années près.

4.1 Introduction historique

Pendant longtemps, la détermination de l'âge de la Terre s'est faite au moyen des textes sacrés (la Bible, le Coran). Par exemple, James Ussher (1581-1656) affirme que la Création eut lieu au début de la nuit précédant le 23 octobre de l'an 4004 av. J.-C. De grands scientifiques comme Kepler ou Newton donnent aussi des chiffres, appuyés sur la Bible, qui sont de cet ordre de grandeur (quelques milliers d'années). Buffon est l'un des premiers à donner une méthode scientifique (fondée sur la sédimentation) pour dater le début de la Terre. Il arrive à un chiffre de quelques millions d'années (mais évite prudemment de le publier). Au XIX-ième siècle, Lord Kelvin, l'un des grands physiciens de l'époque, utilisant la thermodynamique et le temps de refroidissement de la Terre, aboutit à une fourchette de 20 à 400 millions d'années. Mais ce chiffre est contesté, notamment par Darwin qui le trouve trop petit pour expliquer l'évolution.

Il faut attendre le XX-ième siècle et la découverte de la radioactivité pour disposer de chiffres stables, concordants et plausibles. Après Rutherford et d'autres, le travail décisif est dû à un physicien américain, Clair Patterson, et il est fondé sur la désintégration de l'uranium (238 ou 235) en plomb (207 ou 206). La méthode est très voisine de celle que je vais expliquer maintenant et qui s'appuie sur la désintégration du rubidium en strontium.

4.2 Le calcul avec la radioactivité rubidium-strontium

Le rubidium (*Rb*) et le strontium (*Sr*) ont chacun de nombreux isotopes. Trois nous seront utiles. D'abord, le strontium 86, ^{86}Sr , qui sert d'étalon. En effet, cet isotope **n'est pas** radiogénique : il est stable (ne se désintègre pas) et ne provient pas de la désintégration d'un autre corps. Le nombre d'atomes de ^{86}Sr dans une roche est donc constant au cours du temps et les concentrations des autres isotopes seront calculées par rapport à celui-là.

Les deux isotopes essentiels pour notre propos sont le rubidium 87, ^{87}Rb , qui se désintègre en donnant du strontium 87, ^{87}Sr . La demi-vie τ du rubidium dans ce processus est très grande (48,8 milliards d'années). On en déduit le coefficient α de l'exponentielle ($\alpha = \ln 2/\tau \sim 14,2 \times 10^{-12}$). Notons $r(t)$ et $s(t)$ les rapports entre les nombres de noyaux de rubidium et de strontium 87 et ceux de l'étalon ^{86}Sr au temps t . L'équation de la désintégration

est alors :

$$(1) \quad r(t) = r(0)e^{-\alpha t}$$

où le temps 0 (d'ailleurs pas très précis) est celui de la formation de la Terre (ou plutôt du système solaire) et où t , notre inconnue, est le temps écoulé depuis l'origine de la Terre jusqu'à maintenant. La difficulté est qu'on ne connaît pas $r(0)$ (sinon il suffirait de mesurer $r(t)$ ce qui est facile par spectrométrie de masse). On ne connaît pas non plus $s(0)$. En effet, outre le strontium 87 provenant de la désintégration du rubidium 87, il peut y en avoir déjà au début (si l'on était sûr que $s(0)$ est nul on aurait fini). Cela donne pour s , en additionnant le strontium initial et celui provenant du rubidium :

$$(2) \quad s(t) = s(0) + r(0) - r(t) = s(0) + r(0)(1 - e^{-\alpha t}).$$

Que connaît-on dans les équations (1) et (2) ? On connaît α , ainsi que les concentrations actuelles que l'on mesure : $r(t)$ et $s(t)$. En revanche, on ignore les valeurs de $r(0)$ et $s(0)$ et bien sûr celle de t qui est notre inconnue. On voit qu'on ne dispose que de deux équations pour trois inconnues, ce qui ne permet pas de conclure.

4.3 La méthode des isochrones

L'astuce de Clair Patterson est la suivante. On commence par éliminer l'inconnue $r(0)$ avec la relation $r(0) = r(t)e^{\alpha t}$. En remplaçant dans (2), il reste :

$$(3) \quad s(t) = s(0) + r(t)(e^{\alpha t} - 1)$$

avec les inconnues t et $s(0)$.

Le principe est alors le suivant. On étudie **plusieurs** (c'est le point crucial) échantillons de roches provenant d'un même massif ou d'une même météorite et on mesure les quantités $s(t)$ et $r(t)$. Il est important qu'il s'agisse d'échantillons fermés, c'est-à-dire sans apport ni perte de matière en ce qui concerne les noyaux étudiés. Pour une roche, l'instant de fermeture est celui de sa cristallisation. Bien entendu, l'âge de la Terre est plus grand que cette date de fermeture. On pense d'ailleurs qu'aucune roche actuelle¹³ n'a une

13. Le record actuel est détenu par des géologues canadiens qui ont daté des roches de la ceinture de Nuvvuagittuq (par datation néodyme-samarium) à 4,28 milliards d'années. Des dates plus anciennes, allant jusqu'à 4,36 milliards d'années, étaient connues, mais elles ne concernaient que des grains minéraux de zircon trouvés en Australie, et non des roches entières.

origine contemporaine de l'origine de la Terre (à cause des altérations, de la tectonique des plaques, etc.). Une façon d'avoir une datation qui corresponde à l'origine du système solaire est de dater des météorites, ce qui est souvent utilisé, ou encore, depuis les missions spatiales Apollo, les échantillons de roches de la Lune, voire de Mars.

Deux points sont essentiels :

1) Si les échantillons en question sont *cogénétiques*, c'est-à-dire proviennent du même magma initial (par compression, cristallisation, refroidissement, etc.), la proportion initiale de strontium 87 par rapport au 86 (le terme $s(0)$) ne dépend pas du choix de l'échantillon. C'est un fait de chimie¹⁴ : *Il s'agit du rapport de deux isotopes d'un même élément chimique qui se répartit entre minéral et liquide en fonction de ses propriétés chimiques et non de ses propriétés nucléaires (les isotopes d'un élément chimique ont des nombres de neutrons différents dans le noyau atomique, mais ils ont les mêmes propriétés chimiques)*, et c'est le postulat essentiel de la méthode.

2) En revanche, les proportions $s(t)$ et $r(t)$ vont varier d'un échantillon à l'autre¹⁵. Voici ce que disent les géologues : *Au moment de la cristallisation d'un magma (passage d'un état liquide à solide), qui se fait de manière fractionnée, les divers éléments n'ont pas le même comportement : les éléments chimiques les plus lourds (fer, magnésium), etc.) participent les premiers à la formation des roches. Viennent ensuite les alcalino-terreux (la deuxième colonne de la classification périodique : calcium, strontium) et enfin les alcalins (la première colonne : potassium, rubidium). Dans les derniers liquides et les minéraux qui se formeront à partir de ces liquides, la concentration en Sr diminue et la concentration en Rb augmente.*

Si l'on représente sur un graphique $s(t)$ en fonction de $r(t)$, et si le postulat est vrai, les points se répartissent sur (ou à proximité d') une droite $s(t) = s(0) + \lambda r(t)$. Il suffit alors de mesurer la pente $\lambda = e^{\alpha t} - 1$ de cette droite et, comme α est connu, on en déduit $t = \frac{\ln(\lambda + 1)}{\alpha}$.

On notera que la validation de la méthode est double :

- des arguments géologiques sur la genèse des roches permettent d'affirmer que les divers échantillons sont bien cogénétiques,
- l'alignement des points l'atteste, *a posteriori*.

14. Voir plus d'explications sur :

<http://planet-terre.ens-lyon.fr/planetterre/XML/db/planetterre/metadata/LOM-comportement-rb-sr.xml>

15. Ce point est facile à vérifier expérimentalement.

4.4 Un exemple

Je reproduis ici l'exemple donné par Gray *et al.* (1973). Il concerne des échantillons de la météorite tombée à Allende (près de Mexico) en 1969.

$r(t)$	0.00014	0.00019	0.00075	0.00393	0.00432
$s(t)$	0.698770	0.698810	0.698890	0.698990	0.699030

$r(t)$	0.00660	0.00776	0.00853	0.05213	0.00017
$s(t)$	0.699250	0.699140	0.699330	0.702140	0.698770

Ce tableau donne le graphe ci-dessous (fig. 1).

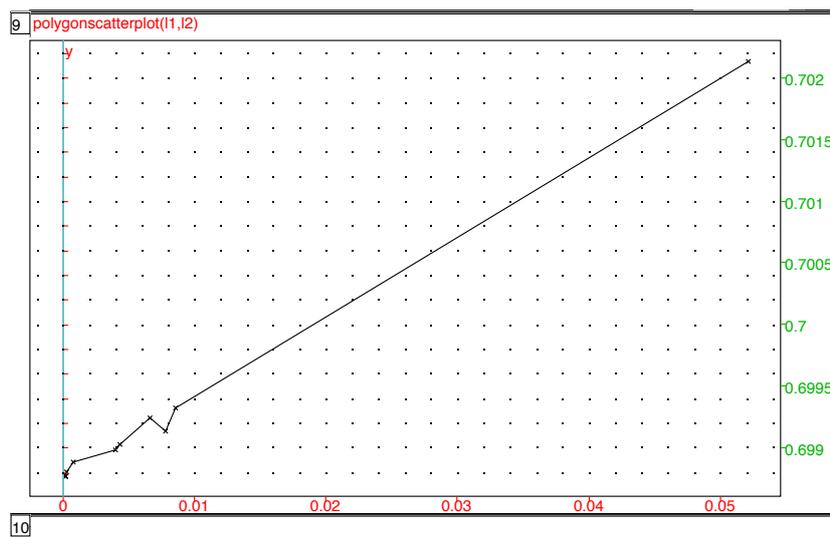


FIGURE 1 – Les isochrones

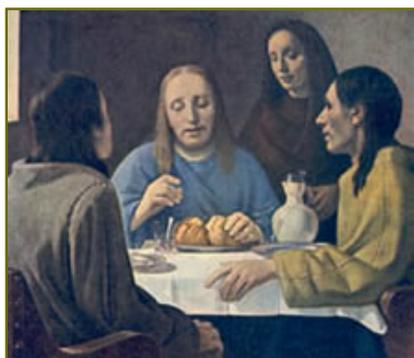
On calcule aisément la droite de régression $y = \lambda x + b$ avec $\lambda = 0,064471$ et $b = 0,698767 = s(0)$. La connaissance de λ donne celle de $t \sim 4,4 \times 10^9$, soit 4,4 milliards d'années.

Tout le problème de l'obtention d'une isochrone Rb-Sr pour dater un granite est justement de trouver des échantillons qui ont des rapports $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ suffisamment distincts les uns des autres pour obtenir un « étalement » sur l'axe des abscisses. Ainsi certains massifs de granite du Limousin n'ont pas pu être datés car les dizaines d'échantillons récoltés avaient des rapports $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ trop proches les uns des autres.

5 Vermeer et Van Meegeren

5.1 L'histoire

C'est une histoire magnifique¹⁶. Au lendemain de la seconde guerre mondiale, un peintre néerlandais de second ordre, Han Van Meegeren fut poursuivi pour haute trahison pour avoir vendu à Hermann Göring, l'acolyte de Hitler, une toile de Vermeer (1632-1675), *La femme adultère*. Il se défendit en révélant que cette toile, ainsi que plusieurs autres Vermeer dont les fameux¹⁷ *Disciples d'Emmaüs*, étaient des faux qu'il avait lui-même peints. Les juges furent sceptiques, pensant qu'il essayait d'échapper ainsi à l'accusation de trahison. Pour prouver sa bonne foi, Van Meegeren peignit alors dans sa cellule un faux Vermeer, *Jésus parmi les docteurs*.



Christ and the Disciples at Emmaus
Van Meegeren



Woman Reading Music
Han van Meegeren
1935-1936
Rijksmuseum, Amsterdam

FIGURE 2 – Deux faux de Van Meegeren

16. Ce qui suit est issu du livre *Differential equations and their applications* de M. Braun.

17. En 1936, ce tableau avait été authentifié comme un Vermeer par un éminent historien d'art, A. Bredius, vendu à la fondation Rembrandt pour la coquette somme de 170000 dollars et exposé au musée Boymans de Rotterdam. Voilà ce que dit Bredius : *Grâce à Dieu, cette oeuvre magnifique est sortie de l'ombre où elle se trouvait, immaculée, intacte comme si elle venait tout droit de l'atelier de l'artiste et aussi Nous avons ici un chef-d'oeuvre, je dirais LE chef-d'oeuvre de Vermeer, un de ses tableaux les plus grands par ses dimensions, une oeuvre totalement différente de toutes les autres, et dont pourtant chaque pouce ne peut être que de Vermeer.*

Les juges furent ébranlés et un groupe d'experts fut nommé pour la circonstance et reconnut que les tableaux étaient des faux, extrêmement habiles cependant. En effet, Van Meegeren utilisait de vieux tableaux de l'époque de Vermeer, mais sans valeur, qu'il nettoyait avant de peindre par dessus et il utilisait les mêmes pigments que ceux de Vermeer¹⁸. Les experts réussirent tout de même à déceler des traces de bleu de cobalt moderne ainsi que d'un produit qui n'existait pas au 17-ième siècle (le phénolformaldéhyde) ayant servi à décaper les anciennes peintures. En fin de compte Van Meegeren fut condamné en octobre 1947 à un an de prison seulement, mais il succomba à une crise cardiaque en décembre de la même année.

L'histoire ne s'arrête pas là car la controverse entre experts, notamment à propos des *Disciples d'Emmaüs*, se poursuivit après la mort de Van Meegeren. Ce n'est qu'en 1968 qu'une datation à l'aide d'éléments radioactifs permit de prouver définitivement que ce Vermeer aussi était en fait un Van Meegeren!

C'est ce que je vais expliquer maintenant.

5.2 La datation

Le principe est le même que dans les deux premiers exemples, mais avec d'autres éléments radioactifs, tous plus ou moins liés à l'uranium-238.

En effet, parmi les couleurs couramment utilisées par les peintres depuis très longtemps, il y a le blanc de plomb¹⁹. Il s'agit d'un oxyde de plomb qui contient deux isotopes radioactifs (provenant de la désintégration de l'uranium-238) : le plomb-210 et le radium-226, respectivement de périodes 22 ans et 1600 ans.

Le plomb-210 se désintègre en donnant du plomb-206 (le plomb ordinaire, qui n'est plus radioactif) et le radium-226 donne²⁰ du plomb-210. Ce qu'il faut bien comprendre ici c'est que, dans le minerai dont est extrait le plomb, il y a un équilibre radioactif²¹ : le plomb-210 qui se désintègre est remplacé **à l'identique** par la désintégration du radium-226, elle-même équilibrée par celle de l'uranium-238. En revanche, lors du traitement du minerai en vue d'en extraire le plomb, 90 à 95 % du radium et de l'uranium sont éliminés avec les scories. Dans le plomb purifié utilisé en peinture, la désintégration du plomb n'est donc plus compensée par celle du radium.

18. Voir des détails en Annexe 3

19. Interdit de nos jours en raison de sa toxicité.

20. En passant par le radon-222, le polonium-218, le plomb-214, le bismuth-214, le polonium-214, mais ces éléments ont des demi-vies tellement petites (moins de quatre jours en tout) qu'on peut négliger ces étapes.

21. Voir Annexes 4 et 5 pour des précisions.

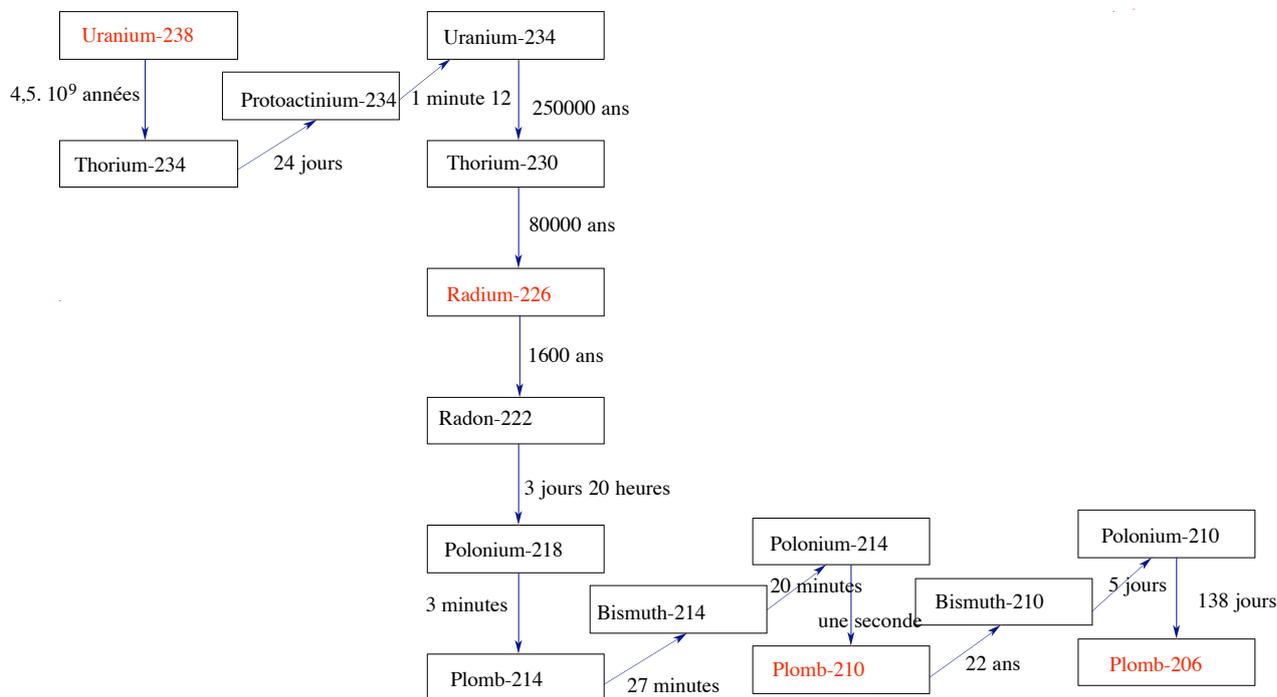


FIGURE 3 – Radioactivité des éléments provenant de l'uranium

Cependant, comme il reste encore du radium, pour établir l'équation différentielle du phénomène, il faut tenir compte non seulement de la désintégration du plomb, mais aussi de celle du radium. Fixons les notations. On note $p(t)$ (resp. $r(t)$) le nombre²² d'atomes de plomb-210 (resp. de radium-226) par gramme de blanc de plomb au temps t . Lorsque ces éléments sont isolés, ils se désintègrent avec des lois comme celles vues ci-dessus : $p'(t) = -\lambda p(t)$ et $r'(t) = -\mu r(t)$.

En revanche, lorsque les deux éléments cohabitent, l'équation devient $p'(t) = -\lambda p(t) + \mu r(t)$, puisque la désintégration du radium redonne du plomb. L'équation semble compliquée, cependant, comme la période du radium (1600 ans) est beaucoup plus grande que celle du plomb (22 ans) et qu'elle est très grande aussi par rapport aux temps qui sont en jeu (environ 300 ans entre Vermeer et nous), on peut supposer que $r(t)$ est constant²³ et égal à r .

On a donc l'équation différentielle $p'(t) = -\lambda p(t) + \mu r$. La résolution est

22. Toujours vu comme un réel, bien entendu.

23. En réalité, en 300 ans, la quantité de radium est multipliée par 0,88. Si l'on fait le calcul ci-dessous avec $\mu r(t) = 0,8/0,88 \sim 0,9$, on trouve $\lambda p_0 \sim 96773$ au lieu de 98050 et les arguments restent valables. Voir Annexe 5 pour un calcul plus précis.

alors évidente et on obtient :

$$p(t) = \frac{\mu r}{\lambda} (1 - e^{-\lambda(t-t_0)}) + p_0 e^{-\lambda(t-t_0)}.$$

Dans cette équation, t_0 désigne l'époque où le tableau a été peint et t l'époque où les mesures sont effectuées (ici, 1968). On a posé $p_0 = p(t_0)$: nombre d'atomes de plomb-210 au temps t_0 . Si l'on pose $a = t - t_0$, âge de la peinture, on a l'équation

$$p(t) = \frac{\mu r}{\lambda} (1 - e^{-\lambda a}) + p_0 e^{-\lambda a},$$

mais il est plus commode de l'écrire en multipliant par $\lambda e^{\lambda a}$ pour faire apparaître les termes $\lambda p \sim -p'$ qui représentent la vitesse de désintégration (en nombre d'atomes par gramme de plomb et par minute²⁴) :

$$(*) \quad \lambda p_0 = (\lambda p(t) - \mu r) e^{\lambda a} + \mu r.$$

Dans cette formule, on cherche a , on connaît λ , μ , liés à la demi-vie du plomb et à celle du radium, on sait mesurer $p(t)$ et r , mais on ne connaît pas p_0 , de sorte qu'on ne peut pas calculer directement a .

Précisément, donnons les chiffres dans le cas des *Disciples d'Emmaüs*. Le coefficient λ est donné par $\lambda = \frac{\ln 2}{\tau}$ où τ est la période du plomb-210, donc 22 ans : la période est donc $\tau = 22 \times 365 \times 24 \times 60 = 11,5632 \times 10^6$ minutes. Cela donne $\lambda = 5,9944 \times 10^{-8}$. De même on a $\mu = 8,24 \times 10^{-10}$. Par ailleurs, on mesure $\lambda p(t)$, vitesse de désintégration²⁵ actuelle du plomb-210 dans le tableau incriminé. On trouve $\lambda p(t) = 8,5$ (nombre d'atomes de plomb-210 désintégrés par minute et par gramme de minerai). Enfin, on mesure aussi μr , vitesse de désintégration du radium dans la peinture qui vaut 0,8.

5.3 La ruse

La méthode est assez subtile et consiste à estimer λp_0 , ou au moins à le majorer. Dans la formule (*), le résultat λp_0 est la vitesse de désintégration du plomb-210 à l'époque t_0 . Bien entendu, si l'on applique cette formule avec $a = 300$ (l'époque de Vermeer), le résultat est beaucoup plus grand qu'avec $a = 20$ (peinture actuelle). C'est ainsi qu'on va procéder en montrant que le résultat (pour les *Disciples d'Emmaüs* par exemple), est beaucoup trop grand lorsqu'on calcule avec $a = 300$.

24. Il faut faire attention aux unités. Ici on va calculer en minutes. Cela semble être la norme en ce domaine, même si c'est un peu curieux.

25. C'est très souvent la vitesse de désintégration qui est mesurée.

L'argument est le suivant. Le blanc de plomb provient de divers minerais de plomb. Comme on l'a dit, le point essentiel est que ces minerais sont radioactivement neutres, la désintégration du plomb-210 étant compensée par celle du radium-226 contenu dans le minerai, elle-même compensée par celle de l'uranium-238. Cela signifie que, dans le laps de temps unité, le nombre λp_0 d'atomes de plomb qui se désintègrent est environ égal au nombre de ceux d'uranium qui se transforment en radium, c'est-à-dire αu_0 , où α est la constante de l'équation de la désintégration de l'uranium et u_0 le nombre d'atomes d'uranium par gramme de minerai de plomb au temps t_0 .

Le nombre α est connu : la période de l'uranium étant $T = 4,51 \times 10^9$ années, soit $4,51 \times 10^9 \times 525600$ minutes, on a $\alpha = \ln 2/T = 2,924 \times 10^{-16}$.

En ce qui concerne le nombre u_0 , on peut considérer qu'il ne varie pas avec le temps (car la période de l'uranium est de $4,51 \times 10^9$ années). On peut donc considérer qu'il n'a pas changé depuis le 17-ième siècle. Le problème c'est qu'en revanche, la teneur en uranium²⁶ est très variable selon les minerais. En moyenne elle est de $2,7 \times 10^{-6} \%$, mais elle peut aller, dans des cas très rares de minerais américains (qu'il est peu plausible que Vermeer ait utilisé), jusqu'à 3%.

Nous allons faire le calcul dans ce cas extrême, ce qui nous donnera une valeur maximale pour αu_0 , donc pour λp_0 et donc pour a . Si nous supposons que la teneur en uranium est de 3%, c'est-à-dire qu'il y a 0,03 gramme d'uranium dans un gramme de blanc de plomb, cela correspond à $u_0 = \frac{6,02 \times 10^{23} \times 0,03}{238} \sim 7,5 \times 10^{19}$ atomes d'uranium par gramme de minerai (car 238 grammes est la masse d'une mole d'uranium qui contient le nombre d'Avogadro $6,02 \times 10^{23}$ d'atomes). La vitesse de désintégration de l'uranium est donc $\alpha u_0 \sim 22189$ (nombre d'atomes désintégrés par minute et par gramme²⁷). L'hypothèse d'équilibre radioactif montre qu'en tous cas $\lambda p_0 = -p'(t_0)$ ne peut dépasser ce nombre.

Or, dans le cas du faux Vermeer, on a, actuellement, $\lambda p(t) \sim 8,5$ et $\mu r \sim 0,8$ ce qui donnerait, avec l'âge $a = 300$, $\lambda p_0 = 98050$, ce qui est beaucoup trop grand²⁸ !

Si l'on fait le calcul à l'envers, en partant de $\lambda p_0 = 22189$ (on a dit que c'était assurément une valeur très exagérée), et des valeurs de μr et $\lambda p(t)$ ci-dessus, on trouve un âge de 253 ans pour la peinture. Comme le dosage a été fait en 1968, cela donne une date de 1715, alors que Vermeer est mort en

26. C'est-à-dire la proportion d'uranium dans le minerai.

27. Ce chiffre est énorme. Avec la teneur moyenne en uranium, le résultat est de l'ordre de 2 atomes d'uranium désintégrés par minute et par gramme.

28. Avec $a = 30$ ans, on trouve $\lambda p_0 \sim 20,61$ ce qui est bien plus plausible car cela correspond à une teneur en uranium de $2,8 \times 10^{-5}$.

1675. Aucun doute : les *Disciples d'Emmaüs* étaient bien de Van Meegeren.

6 Exercices

6.1 Exercice. On rappelle que la masse molaire du carbone 12 est ... 12. Cela signifie que 12 grammes de carbone correspondent au nombre d'Avogadro $6,02 \times 10^{23}$ atomes. En déduire le nombre d'atomes de carbone 12 dans un gramme, puis celui d'atomes de carbone 14 dans un gramme de matière vivante, ou juste morte (on rappelle que, dans ce cas, la proportion entre les deux est de $1,2 \times 10^{-12}$). (Réponse : environ $6,02 \times 10^{10}$.)

En déduire la vitesse de désintégration théorique du carbone 14 en nombre d'atomes par minute et par gramme ; on rappelle que la période du carbone 14 est de 5730 ans, attention aux unités. (Réponse : environ 13,85. On notera que cette valeur est légèrement plus grande que celle obtenue par exemple dans la datation de la grotte de Lascaux qui était de 13,6.)

6.2 Exercice. Vers 1950, dans les fouilles archéologiques de Nippur (l'un des sites de l'antique Babylone), on a mesuré la vitesse de désintégration d'un échantillon de charbon de bois (datant de l'époque d'Hammourabi) à 4,09 désintégrations par minute et par gramme. Sachant que la désintégration actuelle est de 6,68, déterminer une date plausible du règne d'Hammourabi. (Réponse : environ 2100 avant J.-C.)

6.3 Exercice. On reprend la situation de la section 5. Les chiffres suivants correspondent au taux de désintégration $\lambda p(t)$ du plomb 210 et μr du radium (en nombre d'atomes par minute et par gramme de blanc de plomb), dans des tableaux attribués à Vermeer, en 1968. À votre avis, lesquels sont authentiques ?

Nom du tableau	$\lambda p(t)$ (plomb)	μr (radium)
Disciples d'Emmaüs	8,3	0,8
Lavement des pieds	12,6	0,26
Femme lisant de la musique	10,3	0,3
Femme jouant de la mandoline	8,2	0,17
Dentellière	1,5	1,4
Femme riant	5,2	6,0

7 Annexe 1 : l'équation fonctionnelle

Dans ce paragraphe on montre la version 1.5 de l'équation fonctionnelle :

Corollaire. Soit $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ une fonction **monotone** vérifiant l'équation fonctionnelle $f(x + y) = f(x)f(y)$. On suppose qu'il existe un $x > 0$ tel que $f(x) \neq 0$. Alors, il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que l'on ait, pour tout x , $f(x) = e^{\alpha x}$.

7.1 Remarque. L'hypothèse permet d'éviter le cas trivial : $f(0) = 1$, $f(x) = 0$ pour tout $x > 0$.

7.1 Préliminaires

1) Si on a $f(0) = 0$, on a $f(x) = f(x + 0) = f(x)f(0) = 0$ pour tout x et c'est exclu.

2) On a, pour tout $x \geq 0$, $f(x) = f(x/2 + x/2) = f(x/2)^2$.

3) En particulier, on a $f(0)^2 = f(0)$ donc $f(0) = 1$ en vertu de 1).

4) La condition 2) donne $f(x) \geq 0$ pour tout x . En fait, on a $f(x) > 0$ pour tout x . Sinon, si on a $f(x) = 0$ pour un x , on a aussi, pour $y \geq x$, $f(y) = f(x + (y - x)) = f(x)f(y - x) = 0$. Mais, par hypothèse, il existe $t > 0$ tel que $f(t) \neq 0$. Pour n assez grand on a $nt \geq x$ et $f(nt) = f(t)^n \neq 0$: c'est absurde.

7.2 Continuité

5) Montrons que f est continue en 0. Comme elle est monotone, $f(x)$ admet une limite l en 0. La relation $f(x) = f(x/2)^2$ montre qu'on a $l = l^2$, donc $l = 0$ ou $l = 1$. Le cas $l = 0$ est impossible. En effet, si f est croissante on a $f(x) \geq f(0) = 1$ et $l \geq 1$. Si f est décroissante, on a $l \geq f(1/2) > 0$ et l n'est pas nulle. On voit donc que f est continue en 0.

6) Montrons alors que f est continue partout. Soit x un réel positif. Si h est positif (resp. positif et plus petit que x) on a $f(x + h) = f(x)f(h)$ (resp. $f(x - h) = f(x)/f(h)$) par l'équation fonctionnelle. Quand h tend vers 0, $f(h)$ tend vers 1 et $f(x + h)$ et $f(x - h)$ tendent tous deux vers $f(x)$.

7.3 Dérivabilité

7) Montrons que f est dérivable sur \mathbf{R}^+ . Comme f est continue, elle est intégrale (au sens de Riemann par exemple) et admet une primitive F , dérivable évidemment. On calcule, pour $y \geq 0$, l'intégrale :

$$I(y) = \int_0^1 f(x + y)dx = \int_0^1 f(x)f(y)dx = f(y) \int_0^1 f(x)dx = kf(y)$$

avec $k > 0$. Mais on a aussi, en effectuant le changement de variables $u = x + y$, $I(y) = \int_y^{y+1} f(u)du = F(y+1) - F(y)$. On a donc $f(y) = \frac{1}{k}(F(y+1) - F(y))$ et f est dérivable.

7.4 Conclusion

8) Maintenant que f est dérivable, on dérive l'équation $f(x + y) = f(x)f(y)$ par rapport à y . On obtient $f'(x + y) = f(x)f'(y)$. En faisant $y = 0$ on a ainsi $f'(x) = f'(0)f(x) := \alpha f(x)$. La fonction f est solution de l'équation différentielle $y' = \alpha y$ et vérifie $f(0) = 1$: on a bien $f(x) = e^{\alpha x}$.

8 Annexe 2 : retour sur la fonction $N(t)$

On reprend les notations du paragraphe 2.3 et on suppose que $N(t)$ n'est pas nul pour tout $t > 0$ (ce cas correspond, au temps $t = 0$, à une catastrophe brutale qui extermine la population étudiée!). On montre alors que $N(t)$ est non nul²⁹ pour tout $t > 0$.

Sinon, il existe $t > 0$ tel que $N(t) = 0$. On peut alors considérer $t_0 = \inf\{t > 0 \mid N(t) = 0\}$. On a $t_0 > 0$ (sinon $N(t)$ est nul pour tout $t > 0$). De plus, comme $N(t)$ est décroissante, on a $N(t) = 0$ pour tout $t > t_0$. Soit h avec $0 < h < t_0$. On sait que la probabilité de mourir doit être la même entre les instants 0 et h d'une part et $t_0 - h/2$ et $t_0 + h/2$ d'autre part, puisque le laps de temps est le même. Or, entre $t_0 - h/2$ et $t_0 + h/2$, cette probabilité vaut 1 (tout le monde est mort au temps $t_0 + h/2$). En revanche, la probabilité de mourir entre 0 et h vaut $\frac{N(0) - N(h)}{N(0)} = 1 - \frac{N(h)}{N(0)}$ et, comme $N(h)$ n'est pas nul, elle est < 1 ce qui est absurde.

9 Annexe 3 : détails sur Van Meegeren

Extraits du blogue La science du faux, Ariel Fenster, 25 février 2011

Les faussaires préfèrent généralement l'anonymat – sans doute en raison de leur “travail” - et laissent donc rarement une marque dans l'histoire. Ceci rend le cas de Han Van Meegeren (1889-1947) d'autant plus remarquable. On s'explique de différentes façons le fait qu'il soit arrivé à tromper les plus grands experts pour devenir le faussaire peut-être le plus célèbre de l'histoire. L'argument que j'apprécie le plus, c'est qu'il était... un bon chimiste.

²⁹. Merci à Jean-Mathieu pour cette pertinente question.

D'origine hollandaise, Van Meegeren se dirige dès son jeune âge vers la peinture. Il se construit une réputation de portraitiste et obtient de nombreuses commandes. Or, les choses changent vers la fin des années 1920, quand il décide de modifier son style et de s'inspirer des maîtres hollandais du 17e siècle. Les critiques qui chantaient ses louanges l'accusent maintenant de n'être bon qu'à imiter. Enragé, il entreprend de leur démontrer qu'il est capable de rivaliser avec les grands maîtres. Il décide de créer le parfait faux, un travail minutieux qui lui demandera près de six ans (1932 -1937).

En 1932, il loue une villa à Roquebrune, dans le sud de la France, d'où il lance son projet. Il choisit judicieusement Vermeer comme modèle pour son faux. Cet artiste, décédé en 1675, était resté relativement méconnu jusqu'au 20e siècle, mais sa réputation depuis était en pleine ascendance. Comme il n'avait laissé qu'environ 35 tableaux, ces derniers avaient une grande valeur.

Pour obtenir une toile authentique, il utilise un tableau sans valeur du 17e siècle duquel il enlève la peinture à la pierre ponce. Il prépare ses propres pigments en se servant des matériaux de l'époque : pour le blanc, la céruse à base de plomb ; pour le bleu, une pierre rare, le lapis lazuli ; et pour le rouge, le minerai à base de mercure, le cinabre. Puis, il a recours à des pinceaux en poils de blaireau, du type de ceux que Vermeer aurait utilisés.

Mais ce sont ses connaissances de chimiste qui seront essentielles à sa réussite. Pour déterminer si un tableau est d'époque, les experts procèdent au test à l'alcool. Les pigments d'un tableau ancien se polymérisent avec le temps et résistent quand ils sont frottés avec un coton imbibé d'alcool, ce qui n'est pas le cas avec un tableau fraîchement peint, où la peinture déteint. Pour contrer ce test, Van Meegeren a l'idée d'utiliser un vernis à base de bakélite, un polymère synthétique qui durcit rapidement quand il est chauffé. Après un traitement à 100 degrés C, le tableau a l'air d'avoir 300 ans.

Le génie du faussaire réside aussi dans le choix du thème de son Vermeer. Il sait que l'expert qui sera responsable de l'authentification du tableau, Abraham Bredius, soutient que Vermeer a été influencé par le peintre italien Le Caravage (1571-1610). Une des œuvres du Caravage s'intitulant Souper à Emmaüs, Van Meegeren peint son tableau dans le style du Caravage et lui donne comme titre Les disciples d'Emmaüs.

En 1937, Van Meegeren présente son tableau à Abraham Bredius, heureux de voir confirmer sa théorie. Effectivement, après la validation du test à l'alcool, l'expert déclare que le tableau est un authentique Vermeer. Fort de cette recommandation, Van Meegeren vend la toile pour l'équivalent actuel de quatre millions de dollars.

Dans les années qui suivent et tout au long de la guerre, alors que la Hollande est occupée par les Allemands, le peintre continue à "découvrir" et à vendre des "Vermeer", mais aussi des Frans Hals et autres maîtres peintres

hollandais. Extrêmement riche, il mène la belle vie alors que ses compatriotes souffrent.

À la fin de la guerre, on découvre un de ses “Vermeer” dans la collection particulière d’Hermann Göring, membre influent du Troisième Reich. Van Meegeren est alors accusé d’avoir vendu aux Nazis des trésors culturels du pays, un crime passible de la peine de mort. Pour se disculper, il avoue sa tromperie. Le problème est qu’à ce stade, personne ne le croit ! On croit que c’est une histoire inventée pour échapper à la condamnation. Les experts, Abraham Bredius en premier, qui ne veulent pas admettre avoir été dupés, insistent pour dire que Van Meegeren est incapable d’accomplir de tels chefs-d’œuvre. Pour prouver ses capacités, Van Meegeren crée, sous la supervision de témoins, un nouveau Vermeer.

Ceci suffit à convaincre les juges et, comme il le souhaitait, Van Meegeren est condamné comme faussaire plutôt que comme collaborateur. Il écope d’un an de prison, mais meurt des suites d’une crise cardiaque avant d’avoir purgé sa sentence. Aujourd’hui, grâce à sa notoriété, les vrais Van Meegeren, signés de son propre nom, ont pris une certaine valeur. C’est pourquoi, et c’est l’ironie finale, on retrouve sur le marché... des faux Van Meegeren.

10 Annexe 4 : L’objection de Joseph

Il s’agit d’expliquer³⁰ l’équilibre radioactif dans le cas du minerai de plomb. On part d’un gramme de ce minerai, à l’origine de la Terre, il y a quatre milliards s’années et on suppose qu’on n’y touche pas avant l’époque de Vermeer. On note u_i , r_i et p_i les nombres d’atomes d’uranium 238, de radium 226 et de plomb 210 initialement contenus dans ce gramme de minerai. L’uranium 238 se désintègre selon l’équation $u'(t) = -\alpha u(t)$ et n’est pas compensé, de sorte qu’on a $u(t) = u_i e^{-\alpha t}$. Il produit du radium 226, qui se désintègre à son tour en donnant du plomb 210. L’équation pour le radium est $r'(t) = -\mu r(t) + \alpha u(t)$ (à cause du radium produit par l’uranium). On a donc $r'(t) = -\mu r(t) + \alpha u_i e^{-\alpha t}$, équation que l’on sait intégrer en cherchant une solution particulière du second membre sous forme exponentielle. On trouve :

$$r(t) = r_i e^{-\mu t} + \frac{\alpha u_i}{\mu - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\mu t}).$$

De même, on a $p'(t) = -\lambda p(t) + \mu r(t)$ et on résout cette équation, ce qui donne :

$$p(t) = p_i e^{-\lambda t} + A(e^{-\alpha t} - e^{-\lambda t}) + M(e^{-\mu t} - e^{-\lambda t})$$

30. Merci à Joseph Valory de m’avoir posé cette intéressante question. On trouvera une version plus détaillée de la réponse dans l’annexe suivante.

avec $A = \frac{\mu\alpha u_i}{(\lambda - \alpha)(\mu - \alpha)}$ et $M = \frac{\mu(r_i - \alpha u_i)}{(\mu - \alpha)(\lambda - \mu)}$.

C'est le moment de regarder les ordres de grandeur. Rappelons qu'on a $\lambda \sim 6 \times 10^{-8}$, $\mu \sim 8,2 \times 10^{-10}$ et $\alpha \sim 2,9 \times 10^{-16}$ (avec comme unité de temps la minute). On considère un temps t qui correspond à l'époque de Vermeer, donc de l'ordre du milliard d'années, donc de 5×10^{14} minutes, le rapport entre $e^{-\alpha t}$ et $e^{-\lambda t}$ est $e^{(\lambda - \alpha)t}$, dont le **logarithme** $(\lambda - \alpha)t$ est environ 30×10^6 !! Autrement dit, les termes $e^{-\lambda t}$ (et de même $e^{-\mu t}$) sont totalement négligeables devant le terme $e^{-\alpha t}$, et ce, même si les proportions initiales d'uranium par rapport au plomb sont faibles (on a vu qu'elles étaient en moyenne de l'ordre de 10^{-6}), puisque ce nombre est à mettre en parallèle avec $e^{30 \cdot 10^6}$ (qui est un nombre avec 13 millions de zéros!).

Bref, dans l'expression de $p(t)$, le seul terme non négligeable est $Ae^{-\alpha t} \sim \frac{\alpha u_i}{\lambda} e^{-\alpha t}$ et, comme $u(t) = u_i e^{-\alpha t}$ est le nombre d'atomes d'uranium à l'époque de Vermeer (ce que nous avons noté u_0 ci-dessus) on a $\lambda p(t) \sim \alpha u_0$ et $p(t)$ est ce que nous avons noté p_0 . On retrouve bien la formule $\alpha u_0 = \lambda p_0$ utilisée ci-dessus.

11 Annexe 5 : réponse à deux questions posées par trois lycéens à propos de Van Meegeren.

11.1 Première question : l'équilibre radioactif

La première question des lycéens³¹ est la suivante :

Ainsi, nous nous demandions comment est-il possible qu'il y ait un équilibre radioactif dans le minerai d'uranium sachant que (par exemple) la demi-vie du radium-226 est de 1600 ans et que celle du plomb-210 est de 22 ans ? (Le pourcentage de radium est-il plus important que celui du plomb dans le minerai ?)

11.1.1 Le cadre

On considère des corps radioactifs A , B , C , etc. de la même filiation radioactive, A étant un parent de B , B un parent de C , etc. Cela signifie

31. Il s'agit de Gaël Vignes, Marion Molinier et Zoé Chambre, du lycée Jules Verne de Limours, qui ont choisi d'étudier l'histoire de Van Meegeren pour leur TPE. Je les remercie très vivement pour leurs excellentes questions, qui m'ont obligé à préciser ce que j'avais écrit naguère.

que A se désintègre en donnant B , qui lui-même se désintègre en donnant C , qui lui-même se désintègre en donnant D , etc. Dans notre exemple³², A est l'uranium 238, B le radium 226, C le plomb 210 et D le plomb 206. On se limite d'abord à l'étude comparée des désintégrations de A , B seulement, et l'on suppose que la période du père est (beaucoup) plus grande que celle du fils. On peut appliquer cela avec uranium et radium, mais aussi, en négligeant dans un premier temps l'influence de l'uranium, à radium et plomb. On suppose donc que A se désintègre mais ne se renouvelle pas, tandis que B se désintègre et est renouvelé par A . Dans un second temps on prendra en compte les trois corps.

11.1.2 Constatation expérimentale

Dans la situation ci-dessus avec deux corps radioactifs ou plus, on constate expérimentalement qu'au bout d'un temps assez long³³, il s'établit un **équilibre radioactif**. Cela signifie que les proportions de chaque corps restent stables : le C qui disparaît par désintégration en D est compensé à peu près exactement par celui qui provient de la désintégration de B , lequel B est compensé à peu près exactement par celui qui provient de la désintégration de A . Nous allons expliquer ce phénomène par le calcul.

11.1.3 Les équations dans le cas de deux corps

On note $A(t)$ et $B(t)$ les nombres d'atomes des deux produits en fonction du temps (comme d'habitude, ces nombres sont vus comme des réels). On suppose qu'au départ, on a $A(0) = a$ et $B(0) = 0$ (au commencement, il n'y a que du produit A).

Dans les deux cas, si l'on isole les désintégrations, elles sont régies par des équations différentielles linéaires :

$$A'(t) = -\alpha A(t) \quad (1) \quad \text{et} \quad B'(t) = -\beta B(t) \quad (2).$$

Les quantités $\alpha A(t)$ et $\beta B(t)$ sont les vitesses de désintégration respectives de A et B (on parle aussi de l'*activité* de ces corps). Rappelons aussi que les périodes T_A et T_B de A et B sont définies par les formules $e^{-\alpha T_A} = e^{-\beta T_B} = 1/2$, ou encore $T_A = \ln 2/\alpha$ et $T_B = \ln 2/\beta$. Les périodes varient donc en sens inverse des coefficients α, β .

32. On néglige les intermédiaires de plus petites périodes.

33. On précisera ci-dessous, mais il s'agit de siècles, voire de millions d'années, c'est pourquoi on parle d'équilibre **séculaire**. Ces durées semblent longues, mais elles sont négligeables par rapport à la période de l'uranium 238 qui est de 4,5 milliards d'années.

Attention, si pour A cette équation est valable sans restriction puisque qu'on suppose que A ne se renouvelle pas, pour B il faut tenir compte de l'apport de la désintégration de A , et on a donc :

$$B'(t) = -\beta B(t) + \alpha A(t). \quad (3)$$

11.1.4 Le théorème

11.1 Théorème. Avec les notations précédentes, si l'on suppose $\beta > \alpha$, le rapport des vitesses de désintégration $\frac{\beta B(t)}{\alpha A(t)}$ tend vers $\frac{\beta}{\beta - \alpha}$ quand t tend vers l'infini.

Si l'on suppose α négligeable devant β (ou ce qui revient au même, la période T_B négligeable devant T_A), cette limite est très proche de 1.

11.2 Commentaire. Autrement dit, pour un temps assez grand, dans un laps de temps dt infinitésimal, il apparaît autant d'atomes de B provenant de A qu'il ne s'en désintègre : on a bien un équilibre radioactif pour B . On notera que ceci n'est pas vrai pour A qui ne fait que perdre, mais comme sa période est immense, cette décroissance est infime à l'échelle de B .

11.3 Remarque. Dans le cas uranium-radium, la limite $\frac{\beta}{\beta - \alpha}$ vaut 0,99999964, dans le cas radium-plomb elle vaut 0,986.

11.1.5 Résolution des équations

L'équation (1) ne pose pas de problème et donne $A(t) = ae^{-\alpha t}$. On reporte cette quantité dans (3) et on a :

$$B'(t) = -\beta B(t) + \alpha ae^{-\alpha t} \quad \text{ou encore} \quad B'(t) + \beta B(t) = \alpha ae^{-\alpha t}. \quad (4)$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre, avec un second membre. L'équation sans second membre a pour solution générale $B(t) = be^{-\beta t}$ et il suffit d'ajouter à cette fonction une solution particulière de (4). On cherche cette solution sous la forme $ce^{-\alpha t}$ et on trouve $c = \frac{\alpha a}{\beta - \alpha}$. En définitive, on a donc $B(t) = be^{-\beta t} + \frac{\alpha a}{\beta - \alpha}e^{-\alpha t}$ et on calcule b avec la condition initiale $B(0) = 0$. On trouve :

$$B(t) = \frac{\alpha a}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}).$$

On en déduit :

$$\frac{\beta B(t)}{\alpha A(t)} = \frac{\beta}{\beta - \alpha} (1 - e^{-(\beta - \alpha)t}).$$

Comme $\beta - \alpha$ est > 0 , l'exponentielle tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ et donc le rapport tend vers $\frac{\beta}{\beta - \alpha}$ comme annoncé.

11.4 Remarque. On voit par exemple qu'au bout d'un temps égal à 10 fois la période T_B , le rapport des vitesses est égal à sa limite avec une erreur relative $< 0,001$. Par exemple, pour uranium-radium, c'est le cas au bout de 16000 ans, autant dire rien à l'échelle géologique.

11.1.6 Le cas de trois corps

Ce cas est analogue au précédent et nous le présentons de manière plus succincte.

On suppose qu'on a trois corps A, B, C de la même filiation radioactive, A étant un parent de B lui-même parent de C , encore radioactif. On appelle α, β, γ les coefficients de désintégration et on cherche les fonctions $A(t), B(t), C(t)$ avec les conditions initiales $A(t) = a, B(t) = C(t) = 0$. Il n'y a rien à changer au calcul de A et B . Pour C , on a l'équation :

$$C'(t) = -\gamma C(t) + \beta B(t) = -\gamma C(t) + \frac{\alpha\beta a}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$$

en vertu des calculs précédents et on trouve une solution particulière de cette équation :

$$C_0(t) = \frac{\alpha\beta a}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)} e^{-\alpha t} - \frac{\alpha\beta a}{(\beta - \alpha)(\gamma - \beta)} e^{-\beta t}$$

à laquelle on ajoute $ce^{-\gamma t}$ en ajustant c pour avoir la condition initiale $C(0) = 0$, ce qui donne :

$$C(t) = \frac{\alpha\beta a}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)} (e^{-\alpha t} - e^{-\gamma t}) - \frac{\alpha\beta a}{(\beta - \alpha)(\gamma - \beta)} (e^{-\beta t} - e^{-\gamma t})$$

On en déduit aisément le théorème suivant :

11.5 Théorème. Avec les notations précédentes, si l'on suppose $\gamma > \beta > \alpha$, le rapport des vitesses de désintégration $\frac{\gamma C(t)}{\alpha A(t)}$ tend vers $\frac{\beta\gamma}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)}$ quand t tend vers l'infini.

Si l'on suppose α négligeable devant β et γ (ou T_C et T_B négligeables devant T_A), cette limite est très proche de 1.

11.1.7 Bilan dans le cas du minerai de plomb

On reprend les notations du texte. On appelle α, μ, λ (au lieu de α, β, γ) les coefficients de décroissance relatifs à l'uranium 238, au radium 226 et au plomb 210 (rappelons les valeurs $\alpha = 2,924 \times 10^{-16}$, $\mu = 8,24 \times 10^{-10}$ et $\lambda = 5,9944 \times 10^{-8}$) et u_0, r_0 et p_0 les quantités de ces produits dans le minerai. Ce qu'on vient de voir c'est qu'on a, à l'équilibre, $\alpha u_0 = \mu r_0 = \lambda p_0$ (et on utilise d'ailleurs ces égalités à la fin du texte comme nous le reverrons ci-dessous). Avec les valeurs numériques, cela dit que r_0 est environ égal à 100 fois p_0 (mais, **attention**, il s'agit du plomb **radioactif**, l'autre est bien plus abondant) et u_0 de l'ordre de 10^8 fois p_0 .

Encore une remarque. On a vu que la quantité $C(t)$ de plomb 210 est à peu près constante dans le minerai non traité puisque la partie désintégrée en plomb 206 est compensée par la désintégration du radium. En revanche, la quantité de plomb 206, $D(t)$, augmente en fonction du temps, du fait de la désintégration du 210. Cependant, comme C est très petit devant D , le rapport C/D ne change pratiquement pas. En effet, dans un gramme de plomb il y a environ $5,3 \times 10^{-14}g$ de plomb 210 et la variation de D est au plus égale à cette quantité, donc le rapport passe au plus de $5,3 \times 10^{-14}$ à $5,3 \times 10^{-14}/(1 + 5,3 \times 10^{-14})$: l'erreur est en 10^{-28} .

11.2 Deuxième question : r constant ?

11.2.1 La question

Elle porte sur le point suivant de mon texte :

En revanche, lorsque les deux éléments cohabitent, l'équation devient $p'(t) = -\lambda p(t) + \mu r(t)$, puisque la désintégration du radium redonne du plomb. L'équation semble compliquée, cependant, comme la période du radium (1600 ans) est beaucoup plus grande que celle du plomb (22 ans) et qu'elle est très grande aussi par rapport aux temps qui sont en jeu (environ 300 ans entre Vermeer et nous), on peut supposer que $r(t)$ est constant et égal à r .

On a donc l'équation différentielle $p'(t) = -\lambda p(t) + \mu r$.

La question est la suivante :

Dans cette toute dernière équation on a rajouté μr car le fait qu'il reste un peu de radium-226 dans le blanc de plomb redonne des noyaux de plomb-210 ? De plus, on a rajouté μr et non $\mu r(t)$ car on a considéré qu'en 300 ans le nombre de noyaux de radium-226 ne variait quasiment pas. Si c'est le cas, comment est-il possible que le radium ait un impact sur le nombre de noyaux

de plomb-210 (en 300 ans) ? Ne faut-il pas qu'un certain nombre de noyaux de radium-226 se désintègre pour "fournir" du plomb-210 ?

11.2.2 Les deux calculs

C'est vrai qu'on fait une approximation en considérant que r est constant et qu'on est en droit de se demander si elle est innocente. Le mieux, pour répondre à cette question, est de faire les deux calculs (avec r constant ou non) et de comparer les résultats auxquels ils mènent. Le premier consiste à prendre l'équation $p'(t) = -\lambda p(t) + \mu r$ avec r constant. Il a été fait ci-dessus. En prenant pour origine des temps le moment de la peinture, avec les valeurs initiales $p(0) = p_0$ et $r(0) = r_0$, on trouve :

$$p(t) = p_0 e^{-\lambda t} + \frac{\mu r_0}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}).$$

Le second consiste à prendre pour $r(t)$ la valeur donnée par la décroissance exponentielle : $r(t) = r_0 e^{-\mu t}$. On note cette fois $P(t)$ la proportion de plomb. On a donc l'équation $P'(t) = -\lambda P(t) + \mu r_0 e^{-\mu t}$. On la résout comme ci-dessus en trouvant une solution particulière $\frac{\mu r_0}{\lambda - \mu} e^{-\mu t}$ et en écrivant que la valeur initiale $P(0) = p_0$ et on trouve :

$$P(t) = p_0 e^{-\lambda t} + \frac{\mu r_0}{\lambda - \mu} (e^{-\mu t} - e^{-\lambda t}).$$

Sur ces expressions, il n'est pas évident de voir si ces solutions sont très proches ou non (voir cependant ci-dessous), mais peu importe. On reprend la méthode utilisée dans le texte, elle consiste à exprimer λp_0 (dont on a vu qu'il est égal à αu_0), comme on l'a fait dans le texte, mais avec la version $P(t)$:

$$\lambda p_0 = \lambda P(t) e^{\lambda t} + \frac{\lambda \mu r_0}{\lambda - \mu} - \frac{\lambda \mu r_0}{\lambda - \mu} e^{(\lambda - \mu)t}$$

et on applique cette formule en prenant pour t l'âge supposé de la peinture. Si l'on prend $t = 300$ ans, soit $t \sim 1,577 \times 10^8$ minutes, en tenant compte des valeurs mesurées : $\lambda P(t) \sim 8,5$ et $\mu r_0 e^{-\mu t} \sim 0,8$ donc $\mu r_0 \sim 0,91$. On trouve $\lambda p_0 \sim 97916$, ce qui est très proche de la valeur donnée dans le texte (98050) et qui suffit à montrer que le tableau n'est pas de Vermeer puisque, comme on l'a vu, $\lambda p_0 = \alpha u_0$ ne peut être plus grand que 22188.

11.2.3 La machine à remonter le temps

Il y a une autre méthode pour faire ces calculs, nettement plus astucieuse, qui consiste à remonter le ³⁴temps.

On reprend l'équation $p'(t) = -\lambda p(t) + \mu r$ avec r constant mais cette fois, on prend pour origine des temps ($t = 0$) **le moment de l'analyse du tableau** (1968), avec les valeurs initiales $p(0) = p_0$ et $r(0) = r_0$, on trouve :

$$p(t) = p_0 e^{-\lambda t} + \frac{\mu r_0}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \quad \text{donc} \quad \lambda p(t) = \lambda p_0 e^{-\lambda t} + \mu r_0 (1 - e^{-\lambda t}).$$

Bien entendu, ici, les temps auxquels on s'intéresse sont **négatifs** : on utilise l'équation pour aller vers le passé, le temps t étant celui où le tableau a été peint. Dans cette relation on connaît $\mu \sim 8,2 \times 10^{-10}$ et $\lambda \sim 6 \times 10^{-8}$, $\lambda p_0 \sim 8,5$, $\mu r_0 \sim 0,8$ et on a une **majoration** (très large, comme on l'a vu) de $\lambda p(t) \sim \alpha u_0 \leq K := 22189$. On en déduit une minoration de t :

$$t \geq \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{\lambda p_0 - \mu r_0}{K - \mu r_0} \right),$$

ce qui donne $t \geq -132768259$ (en minutes) ou $t \geq -252,6$ ans. Cela met la date du tableau au grand maximum en 1715 et donc bien après la mort de Vermeer.

On prend ensuite l'équation avec $r(t)$ variable : $P'(t) = -\lambda P(t) + \mu r(t)$. Là encore, on écrit la solution $r(t)$ en allant vers le passé $r(t) = r_0 e^{-\mu t}$ (r_0 est la proportion de radium en 1968 et on va regarder $t < 0$.)

Le calcul est identique à celui mené ci-dessus et l'on a :

$$\lambda P(t) = \lambda p_0 e^{-\lambda t} + \frac{\lambda \mu r_0}{\lambda - \mu} (e^{-\mu t} - e^{-\lambda t}).$$

Comme ci-dessus, on connaît $\lambda, \mu, \lambda p_0, \mu r_0$ et on a la majoration de $\lambda P(t)$ par K . En appelant T le temps en années ($T = 365 \times 24 \times 60 t$) on a la formule :

$$F(T) := \lambda P(T) = 8.5 e^{-0.0315T} + 0.811 (e^{-0.00043T} - e^{-0.0315T}).$$

Il n'y a plus qu'à tracer la fonction $F(T)$. On constate qu'elle est décroissante (voir figure GeoGebra ci-dessous) et la valeur de T qui correspond à $K = 22189$ étant $-252,94$, on retrouve la valeur précédente à moins d'un an d'écart.

34. C'est logique puisqu'on connaît les données actuelles et pas les anciennes, mais il est toujours plus difficile de penser à utiliser les équations différentielles pour remonter le temps. Merci à Pascal Gamblin de m'avoir ouvert les yeux.

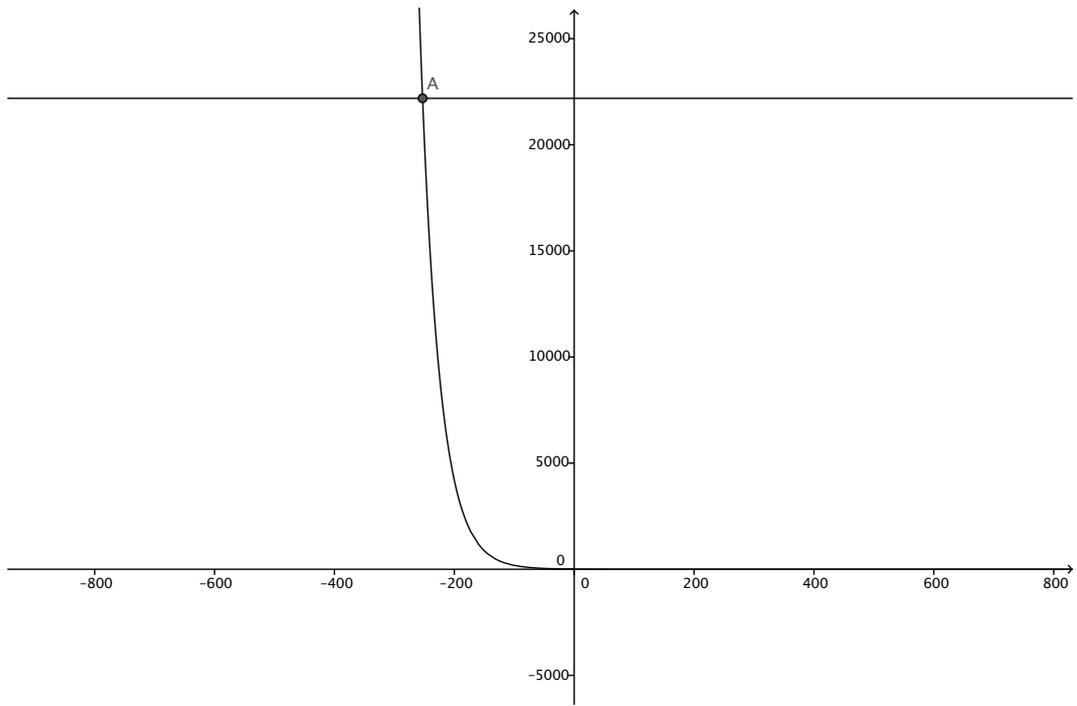


FIGURE 4 – L'âge de la peinture