Option Probabilités - Statistiques

1. La notion de conditionnement

informations pratiques :

- mail : pierre-loic.meliot@math.u-psud.fr
- page web avec notes de cours, slides des cours à distance, liste des textes étudiés : googler "meliot maths", rubrique Teachings.
- textes :
  - certains étudiés par tous (par exemple, le jeudi 12 novembre, le premier)
  - la personne qui passe prend rendez-vous pour discuter de sa présentation ; prépare slides + programmes
    ↳ ~ 3 pages.

séance sur Collaborate de 9h à 13h, texte déposé à 8h30.

objectif : introduire les bases théoriques du conditionnement, qui sert pour les chaînes de Markov et les martingales

plusieurs notions : → probabilités conditionnelles
→ espérance conditionnelle
→ loi conditionnelle.

1. Espérance conditionnelle.

cadre : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace de probabilités.

$X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ variable réelle intégrable

Si $\mathcal{A}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$, on souhaite donner un sens à "l'espérance de X sachant la réalisation ou non de tout événement de $\mathcal{A}$".

Plus concrètement, si $\mathcal{A} = \sigma(X_1, \dots, X_n)$, on souhaite donner un sens à " l'espérance de X sachant les valeurs prises par $X_1 \dots X_n$ ".

<u>Théorème</u> : Il existe une unique variable aléatoire $\tilde{X}$ dans $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que :

$$\forall Y \ \mathcal{A}\text{-mesurable bornée}, \quad \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[\underbrace{\tilde{X}\, Y}_{\text{variables } \mathcal{A}\text{-mesurables}}] \qquad (*)$$

propriété caractéristique

On note $\tilde{X} = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}]$. C'est l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{A}$.

Propriétés

1. $\forall X$, $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{A}]] = \mathbb{E}[X]$ (prendre $Y = \mathbb{1}$)

$\longrightarrow$ calculs d'espérances par conditionnement.

2. Si X est $\mathcal{A}$-mesurable : $\mathbb{E}[X|\mathcal{A}] = X$.

3. Si X est indépendante de $\mathcal{A}$: $\mathbb{E}[X|\mathcal{A}] = \mathbb{E}[X]$

4. Conditionnements successifs : si $\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{F}$,

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{A}]|\mathcal{B}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{B}].$$

5. Linéarité.

6. Positivité : si $X \geq 0$, $\mathbb{E}[X|\mathcal{A}] \geq 0$ p.s.

$\hookrightarrow$ posons $X' = X + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$; $X' > 0$ p.s.

$$Y = \mathbb{1}_{\mathbb{E}[X'|\mathcal{A}] \leq 0}$$ $\mathcal{A}$ mesurable.

On a $\mathbb{E}[X'Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X'|A] \mathbb{1}_{\mathbb{E}[X'|A] \leq 0}] \leq 0$.

Or, $X' > 0$ p.s. $\Longrightarrow$ $Y = 0$. p.s.

$Y \geq 0$ p.s.

Ainsi, $\mathbb{E}[X' | A] = \mathbb{E}[X|A] + \varepsilon > 0$ p.s.

En passant à la limite $\varepsilon \to 0$, on obtient $\mathbb{E}[X|A] \geq 0$ p.s.

7. inégalité triangulaire $|\mathbb{E}[X|A]| \leq \mathbb{E}[|X||A]$

(utiliser la positivité de $|X| - X$ et de $|X| + X$).

Preuve succinte du théorème

Supposons $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Alors, $(*)$ dit que $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}]$ est le projeté orthogonal de X sur $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

complet, donc fermé.

Ceci prouve l'existence et l'unicité. On dispose alors d'une application linéaire continue

$$\begin{array}{ccc} L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) & \longrightarrow & L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \\ \cap & & \\ L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) & & \end{array}$$

La densité de L^2 dans L^1 permet de prolonger la construction aux variables $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

$\square$.

2. Cas particuliers.

1) conditionnement par un événement

Si $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ (tribu triviale), les fonctions $\mathcal{A}$-mesurables sont les constantes, et $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}] = \mathbb{E}[X]$.

Ainsi, l'espérance conditionnelle généralise l'espérance.

Premier cas non trivial : $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ sous-tribu engendrée par un événement A.

Les fonctions $\mathcal{A}$-mesurables sont les combinaisons linéaires $b\mathbb{1}_A + c\mathbb{1}_{\bar{A}}$.

Supposons $\mathbb{P}[A] \in (0,1)$ (0 et 1 exclus).

$$\dim L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = 2.$$

On a $\mathbb{E}[X|\mathcal{A}] = \mathbb{E}[X|A]\,\mathbb{1}_A + \mathbb{E}[X|\bar{A}]\,\mathbb{1}_{\bar{A}}$,

où $\mathbb{E}[X|A] = \dfrac{\mathbb{E}[X\mathbb{1}_A]}{\mathbb{E}[\mathbb{1}_A]} = \dfrac{\mathbb{E}[X\mathbb{1}_A]}{\mathbb{P}[A]}$. (espérance sachant l'événement A).

<u>vérification</u> : $Y = b\mathbb{1}_A + c\mathbb{1}_{\bar{A}}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY] &= b\,\mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] + c\,\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{\bar{A}}] \\
&= b\,\mathbb{E}[X|A]\,\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] + c\,\mathbb{E}[X|\bar{A}]\,\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\bar{A}}] \\
&= \mathbb{E}[\,b\,\mathbb{E}[X|A]\,\mathbb{1}_A + c\,\mathbb{E}[X|\bar{A}]\,\mathbb{1}_{\bar{A}}] \\
&= \mathbb{E}[\tilde{X}Y]
\end{aligned}$$

où $\tilde{X}$ est la formule annoncée.

On retrouve la notion élémentaire de probabilité conditionnelle si $X = \mathbb{1}_B$

$$\mathbb{P}[B \mid A] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B \mid A] = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_B \mathbb{1}_A]}{\mathbb{E}[\mathbb{1}_A]} = \frac{\mathbb{P}[B \cap A]}{\mathbb{P}[A]}$$

les 2 formules importantes des probabilités conditionnelles :

si $\Omega = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_r$ est un système complet d'événements de probabilités > 0, alors :

- formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}[B] = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{P}[B \cap A_i] = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{P}[B \mid A_i]\, \mathbb{P}[A_i].$$

- formule de Bayes :

$$\mathbb{P}[A_i \mid B] = \frac{\mathbb{P}[A_i \cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{\mathbb{P}[B \mid A_i]\, \mathbb{P}[A_i]}{\sum_{j=1}^{r} \mathbb{P}[B \mid A_j]\, \mathbb{P}[A_j]}.$$

2) conditionnement par une variable

Examinons maintenant le cas où $\mathcal{A} = \sigma(X \text{ variable aléatoire})$

$$= \{ X^{-1}(\Gamma), \ \Gamma \text{ partie mesurable} \}$$

<u>Lemme</u> une variable aléatoire $\sigma(X)$-mesurable Y s'écrit $Y = f(X)$, avec f fonction mesurable.

<u>Preuve</u> : Pour tout intervalle $[a,b)$,

$$Y^{-1}([a,b)) = X^{-1}(\Gamma_{[a,b)})$$ pour une certaine partie mesurable $\Gamma_{[a,b)}$.

On montre facilement :

$$[c,d) \subset [a,b) \Longrightarrow \Gamma_{[c,d)} \subset \Gamma_{[a,b)}.$$

Posons $f_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)}(x)$.

1. Les fonctions f_n sont mesurables (combinaisons linéaires d'indicatrices), et $\forall n$,

$$f_{n+1}(x) = \frac{k}{2^{n+1}} \Rightarrow x \in \left[\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}}\right)$$

$$\Rightarrow x \in \left[\frac{\ell}{2^n}, \frac{\ell+1}{2^n}\right) \text{ avec } \ell = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor.$$

$$\Rightarrow f_n(x) = \frac{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor}{2^n} \Rightarrow |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

Donc, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge partout vers une fonction mesurable f.

2. $f_n(X) = \frac{k}{2^n} \iff X \in \Pi_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)}$

$\iff Y \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$

donc $|f_n(X) - Y| \leq \frac{1}{2^n}$. Par passage à la limite, $Y = f_{\square}(X)$.

<u>Conséquence</u> : une espérance conditionnelle par rapport à une variable $\mathbb{E}[Y | X]$ est de la forme $g(X)$ pour une certaine fonction g.

Comment calculer g ? $\begin{cases} \to \text{cas discret} \\ \to \text{cas continu.} \end{cases}$

<u>Exemple</u> : Y et $Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$ indépendants, $X = Y + Z$.

formule générale du cas discret :

$$\underbrace{\mathbb{E}[Y|X]}_{\text{conditionnement / variable}} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E}[Y|X=k]}_{\text{conditionnement / événement.}} \mathbb{1}(X=k).$$

loi de X ? La transformée de Fourier d'une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est

$$\mathbb{E}[e^{i\theta Y}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} e^{ik\theta} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{i\theta})^k}{k!}$$

$$= e^{\lambda(e^{i\theta}-1)}$$

Alors, $\mathbb{E}[e^{i\theta X}] = \mathbb{E}[e^{i\theta Y}]\,\mathbb{E}[e^{i\theta Z}]$ (indépendance)

$$= e^{(\lambda+\mu)(e^{i\theta}-1)}$$

$\Longrightarrow X \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$ (la TF caractérise la loi).

On calcule maintenant :

$$\mathbb{E}[Y \mathbb{1}_{(X=k)}] = \sum_{\ell=0}^{k} \ell\, \mathbb{P}[Y=\ell \text{ et } X=k]$$

$$= \sum_{\ell=0}^{k} \ell\, \mathbb{P}[Y=\ell \text{ et } Z=k-\ell]$$

$$= \sum_{\ell=0}^{k} e^{-\lambda-\mu}\, \ell\, \frac{\lambda^{\ell}\mu^{k-\ell}}{\ell!\, k-\ell!}$$

$$\mathbb{E}[Y \mid X=k] = \sum_{\ell=0}^{k} \ell \binom{k}{\ell} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{\ell} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{k-\ell}$$

$$= \mathbb{E}\left[\mathcal{B}\left(k, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)\right] = \frac{k\lambda}{\lambda+\mu}.$$

Conclusion : si $X = k$, $\mathbb{E}[Y \mid X] = \dfrac{k\lambda}{\lambda+\mu}$

donc $\mathbb{E}[Y \mid X] = \dfrac{\lambda X}{\lambda+\mu}$ (la fonction g est la multiplication par $\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$).

Remarque : on voit apparaître dans le calcul la loi $\mathcal{B}\left(X, \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$

$\rightsquigarrow$ notion de loi conditionnelle.

3. Lois conditionnelles, recettes et exemples.

En fait, pour calculer $\mathbb{E}[Y \mid X]$, il est utile de généraliser un peu la question et de chercher à calculer toutes les espérances conditionnelles

$$\mathbb{E}[f(Y) \mid X]$$ avec disons f mesurable positive ou mesurable bornée.

observation : $f \longmapsto \mathbb{E}[f(Y) \mid X]$ est une application linéaire positive (lorsque bien définie).

$\rightsquigarrow$ représentation par des mesures de probabilité à la Riesz ?

Théorème général (admis)

Supposons X à valeurs dans $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, Y à valeurs dans $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}$ (ex : $\mathcal{Y} = \mathbb{Z}$ ou $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$).

Notons $\mathcal{M}^1(\mathcal{Y})$ l'ensemble des mesures de probabilités boréliennes sur $\mathcal{Y}$

Il existe une application mesurable

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &\longrightarrow \mathcal{M}^1(\mathcal{Y}) \\ x &\longmapsto \mathbb{P}_{Y \mid x} \end{aligned}$$

unique à un ensemble de mesure nulle près pour la loi de X, telle que

$$\mathbb{E}[f(Y)\mid X] = \int_{\mathcal{Y}} f(y)\, \mathbb{P}_{Y\mid X}(dy).$$

$\forall f$ mesurable bornée ou positive.

On dit que $\mathbb{P}_{Y\mid x}$ (aussi notée $\mathbb{P}_{Y\mid X=x}$) est la loi conditionnelle de Y sachant X. En particulier, sous réserve d'intégrabilité :

$$\mathbb{E}[Y\mid X] = \int_{\mathcal{Y}} y\, \mathbb{P}_{Y\mid X}(dy).$$

<u>difficulté conceptuelle</u> : $\mathbb{P}_{Y\mid X}$ est une variable aléatoire $\sigma(X)$-mesurable à valeurs mesures.

<u>solution</u> : on peut donner des formules très simples pour $\mathbb{P}_{Y\mid X}$ lorsque $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ est $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$.

1) cas discret

X et Y à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Alors, la loi conditionnelle $\mathbb{P}_{Y|X}$ est bien sûr :

$$\boxed{\mathbb{P}_{Y|X=k}[\ell] = \begin{cases} \mathbb{P}[Y=\ell \mid X=k] & \text{si } \mathbb{P}[X=k]>0 \\ \mathbb{1}_{(\ell=0)} & \text{si } \mathbb{P}[X=k]=0 \ \left(\begin{array}{c}\text{sans}\\ \text{importance}\end{array}\right). \end{cases}}$$

En effet, plaçons-nous sur un événement $\{X=k\}$ de probabilité positive.

Sur cet événement,

$$\mathbb{E}[f(Y)\mid X] = \frac{\mathbb{E}[f(Y)\,\mathbb{1}_{X=k}]}{\mathbb{P}[X=k]} = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} f(\ell)\,\frac{\mathbb{P}[Y=\ell \text{ et } X=k]}{\mathbb{P}[X=k]}$$

$$= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} f(\ell)\, \mathbb{P}[Y = \ell \mid X = k] = \int_{\mathbb{Z}} f(y) \cdot \mathbb{P}_{Y \mid X = k}(dy)$$ avec la formule donnée précédemment.

<u>exemple</u> : $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Z \sim \mathcal{P}(\mu)$, $X = Y + Z$ avec Y et Z indépendants.

$$\mathbb{P}[Y = \ell \mid X = k] = \frac{\mathbb{P}[Y = \ell \text{ et } X = k]}{\mathbb{P}[X = k]} = \frac{\mathbb{P}[Y = \ell \text{ et } Z = k - \ell]}{\mathbb{P}[X = k]}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^\ell}{\ell!}\, e^{-\mu} \frac{\mu^{k-\ell}}{(k-\ell)!} \Big/ e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}$$

$$= \binom{k}{\ell} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{\ell} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{k-\ell} = \mathcal{B}\left(k, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)[\ell].$$

Donc, $\mathbb{P}_{Y|X} = \mathcal{B}\left(X, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.

2) cas continu, avec des lois à densité

X et Y à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec une densité jointe $m_{X,Y}(x,y)$

$$\mathbb{P}[a \leq X \leq b \text{ et } c \leq Y \leq d] = \int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} m_{(X,Y)}(x,y)\, dx\, dy.$$

Alors, X et Y sont elles-même des variables à densité :

$$m_X(x) = \int_{\mathbb{R}} m_{(X,Y)}(x,y)\, dy$$

$$m_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} m_{(X,Y)}(x,y)\, dx.$$

<u>idée générale</u> : ce sont les mêmes calculs que dans le cas discret, mais avec des intégrales à la place des sommes.

Ainsi, la loi conditionnelle $\mathbb{P}_{Y|X}$ est à densité, avec

$$m_{Y|X=x}(y) = \begin{cases} \dfrac{m_{(X,Y)}(x,y)}{m_X(x)} & \text{si } m_X(x) > 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} & \text{si } m_X(x) = 0 \left(\begin{array}{l}\text{par exemple, cela} \\ \text{n'a pas d'importance}\end{array}\right) \end{cases}$$

<u>exemple</u> : $Y, Z \sim \mathcal{E}(1)$ indépendantes.

La loi jointe de (Y,Z) est $e^{-y} e^{-z} \mathbb{1}_{y>0} \mathbb{1}_{z>0} \, dy \, dz$.

$X = Y + Z$. Que valent $\mathbb{P}_{Y|X}$ et $\mathbb{E}[Y|X]$?

→ La loi jointe de (X, Y) est donnée par un changement de variables.

$$\mathbb{E}[f(X,Y)] = \int_{\mathbb{R}_+^2} f(y+z, y)\, e^{-y-z}\, dy\, dz$$

$$\underset{\substack{x = y+z \\ \text{à } y \text{ fixé}}}{=} \int_{\mathbb{R}_+^2} \mathbb{1}_{0 \le y \le x}\, f(x,y)\, e^{-x}\, dx\, dy.$$

$$\Longrightarrow m_{(X,Y)}(x,y) = \mathbb{1}_{0 \le y \le x}\, e^{-x}$$

Par conséquent : $m_X(x) = \int_{y=0}^{x} e^{-x}\, dy = x e^{-x}$

et $m_{Y|X=x} = \dfrac{\mathbb{1}_{0 \le y \le x}}{x}\, dy$

Ainsi, $\mathbb{P}_{Y|X}$ = loi uniforme $U([0,X])$

$$\mathbb{E}[Y|X] = \frac{X}{2}.$$

<u>exercices</u> :

1. $X, Y \sim N(0,1)$; $R = \sqrt{X^2+Y^2}$.

   Trouver la loi de X sachant R, et $\mathbb{E}[|X| \mid R]$.

2. Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité 1.

   Sachant $\{N_t = 1\}$, déterminer la loi conditionnelle du premier temps de saut T_1.

   Sachant $\{N_t = k\}$, " " des temps $T_1 \dots T_k$.

$\longrightarrow$ 1. On commence par calculer la loi jointe de (X, R).

L'application $(X, Y) \longrightarrow (X, R)$ est (à un ensemble de mesure nulle près) 2-to-1.

$$\mathbb{E}[f(X,R)] = 2 \int_{y=0}^{+\infty} \int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{2\pi} \, dx \, dy \, f(x, \sqrt{x^2+y^2})$$

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$ si $y > 0$; à x fixé, $dy = \frac{2r \, dr}{\sqrt{r^2 - x^2}}$.

$$= 2 \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{r=|x|}^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} \frac{r \, dr}{\pi \sqrt{r^2 - x^2}} f(x, r)$$

$$= 2 \int_{r=0}^{+\infty} \int_{x=-r}^{r} \frac{e^{-\frac{r^2}{2}} r}{\pi \sqrt{r^2 - x^2}} \, dr \, f(x, r)$$

On peut par ailleurs trouver la loi de R par changement de variable polaire :

$$\mathbb{E}[f(R)] = \int_{x,y\in\mathbb{R}} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{2\pi}\, dx\, dy$$

$$= \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} f(r)\, \frac{e^{-r^2/2}}{2\pi}\, r\, dr\, d\theta$$

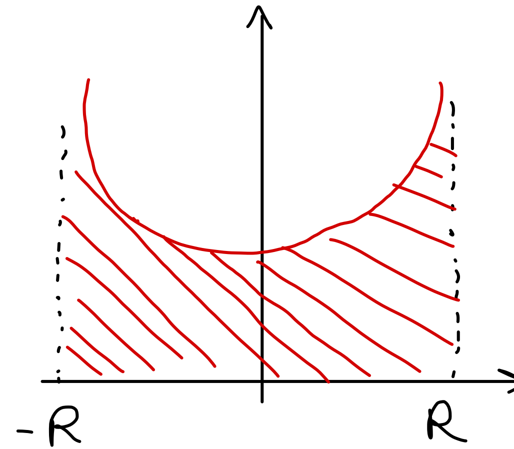
$$= \int_{r=0}^{+\infty} f(r)\, e^{-r^2/2}\, r\, dr\, .$$

$$\Longrightarrow \quad m_{(X,R)}(x,r) = \mathbb{1}_{-r\leq x\leq r}\, \frac{e^{-\frac{r^2}{2}}\, r}{\pi\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$m_R(r) = \mathbb{1}_{r>0}\, e^{-r^2/2}\, r\, .$$

On conclut que la loi conditionnelle de X sachant R est la loi dite de l'arcsinus, de densité

$$m_{X|R}(x) = \frac{\mathbb{1}_{-R\le x\le R}}{\pi\sqrt{R^2-x^2}}$$



$$\mathbb{E}[|X| \mid R]$$

$$= 2\int_0^R \frac{x}{\pi\sqrt{R^2-x^2}}\,dx$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \frac{R\sin\theta}{\pi}\,d\theta = \frac{2R}{\pi}.$$

$x = R\sin\theta$

$dx = R\cos\theta\, d\theta$

→ 2. On rappelle la construction du processus de Poisson : si $(\xi_k)_{k\geq 1}$ est une suite de variables exponentielles indépendantes, alors

$$\{N_t = k\} \Longleftrightarrow \{\xi_1 + \dots + \xi_k \leq t < \xi_1 + \dots + \xi_{k+1}\}$$

et les temps de saut sont les $T_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$.

- La densité de T_k est $\mathbb{1}_{t>0} \dfrac{e^{-t}\, t^{k-1}}{(k-1)!}$ (loi $\Gamma(k,1)$).

En effet, c'est évident pour $k=1$ car $T_1 = \xi_1$, et par récurrence sur k et la formule du produit de convolution :

$$m_{T_{k+1}}(t) = \int_{s=0}^{t} m_{T_k}(s)\, m_{\xi_{k+1}}(t-s)\, ds$$

$$= \int_{s=0}^{t} e^{-t} \frac{s^{k-1}}{(k-1)!} ds = e^{-t} \frac{t^k}{k!} \Longrightarrow \text{passage du rang } k \text{ au rang } k+1.$$

- La loi de N_t est une Poisson(t).

$$\mathbb{P}[N_t = k] = \mathbb{P}[T_k \leq t \text{ et } T_k + \xi_{k+1} > t]$$

$$= \int_{s=0}^{t} \frac{e^{-s} s^{k-1}}{(k-1)!} ds \int_{u=t-s}^{+\infty} e^{-u} du$$

$$= e^{-t} \int_{s=0}^{t} \frac{s^{k-1}}{(k-1)!} ds = e^{-t} \frac{t^k}{k!}$$

- On peut maintenant calculer $\mathbb{E}[f(T_1 \dots T_k) \mid N_t = k]$:

c'est $\displaystyle \frac{k!\, e^{t}}{t^{k}} \int_{s_1, s_2, \dots s_{k+1} \geq 0} e^{-(s_1+\dots+s_{k+1})} ds_1 \dots ds_{k+1}\, f(s_1, s_1+s_2 \dots s_1+\dots+s_k)\, \mathbb{1}_{s_1+\dots+s_k \leq t < s_1+\dots+s_{k+1}}$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{changement de variables} \\ \text{triangulaire}}}{=} \frac{k!\, e^{t}}{t^{k}} \int_{t_1, t_2, \dots t_k, s_{k+1} \geq 0} e^{-t_k - s_{k+1}} dt_1 \dots dt_k\, ds_{k+1}\, f(t_1 \dots t_k)\, \mathbb{1}_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq t \leq t_k + s_{k+1}}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{on intègre } s_{k+1} \text{ entre } t-t_k \text{ et } +\infty}}{=} \frac{k!}{t^{k}} \int_{t_1 \dots t_k} \mathbb{1}_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq t}\, dt_1 \dots dt_k\, f(t_1 \dots t_k).$$

$\longrightarrow$ la loi conditionnelle est $\displaystyle \frac{k!}{t^{k}} \mathbb{1}_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq t}\, dt_1 \dots dt_k$,

c'est la loi uniforme sur le simplexe $S_k(t)$.