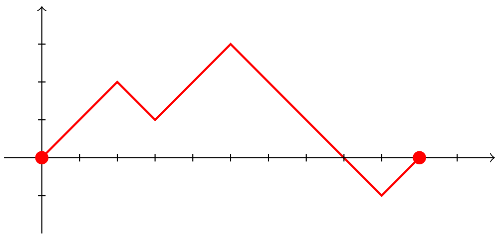
Trajectoires sans intersection de marches aléatoires

mots-clés : chemins sans intersection, martingales, chaînes de Markov, déterminants.

Si a et b sont deux entiers, une *trajectoire* de longueur t reliant a à b est une suite d'entiers $(x_0, x_1, \ldots, x_t)$ avec $x_0 = a$, $x_t = b$ et $|x_s - x_{s-1}| = 1$ pour tout $s \in [\![1, t]\!]$. On peut la représenter par un chemin dans le plan reliant les points $(0, a)$ et (t, b) et affine par morceaux, avec des morceaux constitués de vecteurs $(1, 1)$ et $(1, -1)$. Par exemple,



est une trajectoire de longueur 10 reliant $a = 0$ à $b = 0$. Fixons maintenant un entier $d \geq 1$, et $A = (a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(d)})$ et $B = (b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(d)})$ deux d-uplets d'entiers dans $\mathbb{Z}$. On suppose que :

— les d-uplets A et B n'ont pas de point multiple : si $i \neq j$, alors $a^{(i)} \neq a^{(j)}$ et $b^{(i)} \neq b^{(j)}$.

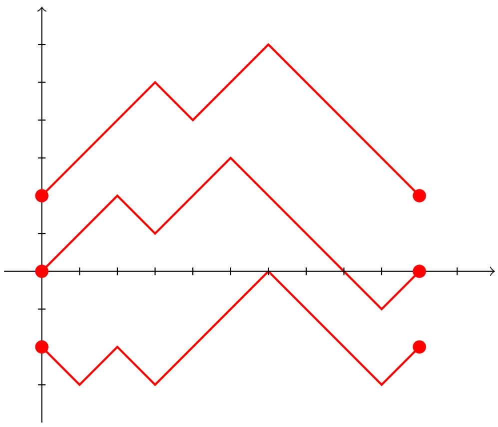
— tous les entiers $a^{(i)}$ ont la même parité : $a^{(i)} \equiv a^{(j)} \bmod 2$ pour tout couple (i, j).

Une *famille de trajectoires sans intersection* (ou *sans croisement*) de longueur t reliant A à B est une famille de suites $x^{(i)} = (x_0^{(i)}, \ldots, x_t^{(i)})$ telle que :

1. chaque suite $x^{(i)}$ est une trajectoire de longueur t reliant $a^{(i)}$ à $b^{(i)}$;

2. si $i \neq j$, alors les trajectoires $x^{(i)}$ et $x^{(j)}$ ne s'intersectent pas : pour tout $s \in [\![0, t]\!]$, $x_s^{(i)} \neq x_s^{(j)}$.

Par exemple, si $A = B = (-2, 0, 2)$, alors une famille de trajectoires sans intersection de longueur 10 reliant A à B est :



Bien sûr, à permutation simultanée des $a^{(i)}$ et des $b^{(i)}$ près, lorsqu'on se donne une famille de trajectoires sans intersection, on pourra supposer $a^{(1)} < a^{(2)} < \cdots < a^{(d)}$. Remarquons alors que :

Lemme 1. *Soient A et B deux d-uplets d'entiers sans point multiple, avec les éléments de A tous de même parité et ordonnés par ordre strictement croissant.*

— *S'il existe une famille de trajectoires de longueur t (avec ou sans intersection) reliant A à B, alors tous les éléments de B sont de même parité.*

— *Une famille de trajectoires $(x^{(1)}, \ldots, x^{(d)})$ reliant A à B est sans intersection si et seulement si $x_s^{(i)} < x_s^{(j)}$ pour tout $s \in [\![0, t]\!]$ et tout couple $i < j$.*

Notons que l'hypothèse de même parité pour les $a^{(i)}$ est essentielle : si $d = 2$, $a^{(1)} = b^{(2)} = 0$ et $a^{(2)} = b^{(1)} = 1$, alors les deux trajectoires $x^{(1)} = (0, 1)$ et $x^{(2)} = (1, 0)$ relient A à B et changent d'ordre entre les temps $t = 0$ et $t = 1$ sans jamais être égales.

Le texte qui suit propose des réponses aux questions élémentaires suivantes :

1. Si on se donne deux d-uplets ordonnés A et B avec les éléments de A tous de même parité, quel est le nombre de familles de trajectoires sans intersection de longueur t reliant A à B ?

2. Si les trajectoires sont choisies au hasard suivant la loi d'une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$, quelle est la probabilité que d marches indépendantes issues des $a^{(i)}$ relient les $b^{(i)}$ au temps t sans s'être intersectées ?

1 Marches aléatoires sur les entiers et martingales associées

Soit $P = P(k, l)$ une matrice stochastique sur les entiers de $\mathbb{Z}$: $P(k, l) \geq 0$ pour toute paire $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$, et $\sum_{l \in \mathbb{Z}} P(k, l) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On note $(X_s)_{s \geq 0}$ une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$ de matrice de transition P, et on note $(\mathcal{F}_s)_{s \geq 0}$ la filtration canonique pour cette chaîne : $\mathcal{F}_s = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_s)$ est la tribu engendrée par les s premières valeurs de la chaîne de Markov. Toutes les variables sont définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ qui n'aura pas besoin d'être précisé, et les $\mathcal{F}_s$ sont donc des sous-tribus de $\mathcal{F}$.

On fixe des entiers $a, b \in \mathbb{Z}$, un temps $t \geq 0$, et on considère l'espérance conditionnelle :

$$M_{a,b}(s) = \mathbb{E}_a \left[1_{(X_t = b)} \,|\, \mathcal{F}_s \right],$$

Par définition de l'espérance conditionnelle, chaque $M_{a,b}(s)$ est une variable $\mathcal{F}_s$-mesurable à valeurs dans $[0, 1]$.

Théorème 2. *Vis-à-vis de la filtration $(\mathcal{F}_s)_{s \geq 0}$, $(M_{a,b}(s))_{s \geq 0}$ est une martingale. De plus, on a pour tout $s \in [\![0, t]\!]$:*

$$M_{a,b}(s) = P^{t-s}(X_s, b).$$

En particulier, aux deux extrémités de l'intervalle $[\![0, t]\!]$, on a

$$M_{a,b}(0) = \mathbb{P}_a[X_t = b] = P^t(a, b);$$
$$M_{a,b}(t) = 1_{(X_t = b)}.$$

Esquisse de preuve. La propriété de martingale est une conséquence de la propriété des espérances conditionnelles vis-à-vis des conditionnellements successifs, et la seconde propriété vient du fait que la loi conditionnelle de X_t sachant $\mathcal{F}_s$ est, par la propriété de Markov simple, la loi d'une marche issue de X_s et considérée après $t - s$ pas. □

Dans ce qui suit, nous considérerons des chaînes de Markov $(X_s^{(1)})_{s \geq 0}, \ldots, (X_s^{(d)})_{s \geq 0}$ indépendantes, toutes de matrice de transition P et issues de points $a^{(1)} < a^{(2)} < \cdots < a^{(d)}$.

Lemme 3. *Sous ces hypothèses, la suite vectorielle $(\overline{X}_s)_{s \geq 0} = (X_s^{(1)}, \ldots, X_s^{(d)})_{s \geq 0}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$ et de matrice de transition*

$$\overline{P}\left((k^{(1)}, \ldots, k^{(d)}), (l^{(1)}, \ldots, l^{(d)})\right) = P(k^{(1)}, l^{(1)})\, P(k^{(2)}, l^{(2)}) \cdots P(k^{(d)}, l^{(d)}).$$

La filtration adaptée à cette chaîne vectorielle est bien sûr $\overline{\mathcal{F}}_s = \sigma(X_u^{(i)},\ 1 \leq i \leq d,\ 0 \leq u \leq s)$. Par analogie avec ce qui précède, si $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(d)}$ sont des entiers fixés et

$$\overline{M}_{A,B}(s) = \mathbb{E}_{(a^{(1)},\ldots,a^{(d)})}\left[1_{(X_t^{(1)}=b^{(1)},\ldots,X_t^{(d)}=b^{(d)})} \,|\, \overline{\mathcal{F}}_s\right]$$

alors la suite $(\overline{M}_{A,B}(s))_{s\geq 0}$ est une martingale vis-à-vis de la filtration $(\overline{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0}$. En effet, la preuve du Théorème 2 n'utilise pas du tout le fait que la chaîne de Markov est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, donc elle fonctionne aussi pour la marche vectorielle à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$. Pour les mêmes raisons, on a pour tout $s \in [0, t]$:

$$\overline{M}_{A,B}(s) = (\overline{P})^{t-s}\left((X_s^{(1)}, \ldots, X_s^{(d)}), (b^{(1)}, \ldots, b^{(d)})\right). \tag{1}$$

2 Formule de Karlin–McGregor

On dit que P est la matrice d'une *marche aléatoire aux plus proches voisins* si $P(k, l) = 0$ pour tout $l \notin \{k-1, k+1\}$. Par exemple, $P(k, l) = \frac{1}{2}\, 1_{(|k-l|=1)}$ est la matrice de la marche aléatoire simple symétrique, et c'est un cas particulier de marche aléatoire aux plus proches voisins.

Théorème 4. *Considérons des marches aléatoires aux plus proches voisins $(X_s^{(1)})_{s\geq 0}, \ldots, (X_s^{(d)})_{s\geq 0}$ indépendantes, issues de points $(a^{(1)} < a^{(2)} < \cdots < a^{(d)})$ tous de même parité, et toutes de même matrice de transition P. On fixe des entiers $b^{(1)} < b^{(2)} < \cdots < b^{(d)}$. On a :*

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_{(a^{(1)},\ldots,a^{(d)})}\left[X_t^{(1)} = b^{(1)}, \ldots, X_t^{(d)} = b^{(d)},\ \textit{et les trajectoires ne se sont pas croisées entre les temps } 0 \textit{ et } t\right]\\ &= \det\left(P^t(a^{(i)}, b^{(j)})\right)_{1\leq i,j\leq d}.\end{aligned}$$

Preuve (partielle). Si $\sigma \in \mathfrak{S}(d)$ est une permutation de taille d, on note $B^\sigma = (b^{(\sigma(1))}, \ldots, b^{(\sigma(d))})$. Chaque suite $(\overline{M}_{A,B^\sigma}(s))_{s\geq 0}$ est une martingale pour la filtration $(\overline{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0}$, et par linéarité, c'est encore le cas pour

$$N_{A,B}(s) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(d)} \varepsilon(\sigma)\, \overline{M}_{A,B^\sigma}(s),$$

$\varepsilon(\sigma)$ étant la signature ± 1 de la permutation σ. La valeur initiale de $N_{A,B}$ est :

$$N_{A,B}(0) = \det\left(P^t(a^{(i)}, b^{(j)})\right)_{1\leq i,j\leq d}. \tag{2}$$

On introduit

$$T = \inf(\{s \geq 0 \,|\, \exists i \neq j,\ X_s^{(i)} = X_s^{(j)}\});$$

c'est le premier temps où les trajectoires des marches aléatoires se croisent (avec par convention $T = +\infty$ si les trajectoires ne se croisent jamais). C'est un temps d'arrêt pour la filtration $(\overline{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0}$, donc, par le théorème d'arrêt, $(N_{A,B}(\min(s,T)))_{s\geq 0}$ est encore une martingale. En particulier, $\mathbb{E}[N_{A,B}(\min(t,T))] = N_{A,B}(0) = \det(P^t(a^{(i)}, b^{(j)}))_{1\leq i,j\leq d}$.

1. Si $t \geq T$, alors

$$N_{A,B}(\min(t,T)) = \det\left(P^{t-T}(X_T^{(i)}, b^{(j)})\right)_{1\leq i,j\leq d} = 0. \tag{3}$$

2. Si $t < T$, notons que

$$\overline{M}_{A,B^\sigma}(t) = 1_{(X_t^{(1)}=b^{(\sigma(1))},\ldots,X_t^{(d)}=b^{(\sigma(d))})}$$

vaut 0 si les $b^{(\sigma(i))}$ ne sont pas ordonnés par ordre croissant. En effet, les chaînes $(X_s^{(i)})_{s\geq 0}$ partent de points $a^{(i)}$ classés par ordre croissant et tous de même parité, donc en vertu du Lemme 1, si $i < j$ et

$X_t^{(i)} = b^{(\sigma(i))} > b^{(\sigma(j))} = X_t^{(j)}$, alors les trajectoires s'intersectent et $X_s^{(i)} = X_s^{(j)}$ pour un certain $s \in [0, t]$; mais ceci contredit l'hypothèse $t < T$. Comme la permutation identité est la seule qui laisse les $b^{(i)}$ ordonnés de façon croissante, on en déduit que

$$N_{A,B}(\min(t,T)) = \overline{M}_{A,B}(t) = 1_{(X_t^{(1)}=b^{(1)},\ldots,X_t^{(d)}=b^{(d)})} \tag{4}$$

si $t < T$.

Le Théorème 4 se déduit immédiatement des identités (3) et (4). $\square$

3 Décompte des familles de trajectoires sans intersection

Revenons maintenant au problème du décompte des familles de trajectoires sans intersection. Si $P(k,l) = \frac{1}{2}\,1_{(|k-l|=1)}$ est la matrice de transition de la marche aléatoire simple symétrique, alors

$$P^t(a,b) = \begin{cases} \frac{1}{2^t}\binom{t}{\frac{b-a+t}{2}} & \text{si } b-a \in \{-t, -t+2, \ldots, t-2, t\}, \\ 0 & \text{si } b-a \notin \{-t, -t+2, \ldots, t-2, t\}. \end{cases}$$

D'après le Lemme 1, si les $a^{(i)}$ ont tous la même parité, alors pour qu'il y ait des familles de trajectoires (avec ou sans intersection) de longueur t reliant A à B, il faut que tous les $b^{(j)}$ soit de la parité de $t - a^{(1)}$. Supposons ces hypothèses de parité réunies. Alors, comme il y a 2^{td} familles de d trajectoires de longueur t issues des points $a^{(1)}, \ldots, a^{(d)}$, et que toutes ces familles de trajectoires ont probabilité $\frac{1}{2^{td}}$, la formule du Théorème 4 donne :

$$\text{card}\left(\{\text{familles de trajectoires sans intersection, de longueur } t, \text{ reliant } A \text{ à } B\}\right) = \det\left(\binom{t}{\frac{b^{(j)}-a^{(i)}+t}{2}}\right)_{1\le i,j\le d},$$

avec par convention $\binom{x}{y} = 0$ si $y < 0$ ou $y > x$. En particulier, si $B = (b^{(1)}, \ldots, b^{(d)})$ n'est pas ordonné par ordre croissant, alors le déterminant formé avec ces coefficients binomiaux doit s'annuler. Si l'on revient à l'exemple de l'introduction, pour $A = B = (-2, 0, 2)$ et $t = 10$, on trouve donc

$$\begin{vmatrix} 252 & 210 & 120 \\ 210 & 252 & 210 \\ 120 & 210 & 252 \end{vmatrix} = 731808 \text{ familles},$$

ce qui aurait sans doute été difficile d'énumérer à la main.

Questions

1. Donner une preuve rigoureuse du Lemme 1.

2. Démontrer entièrement le Théorème 2. Est-ce que le théorème de convergence presque sûre des martingales s'applique à la martingale $M_{a,b}$?

3. Sans utiliser le fait que $M_{a,b}$ est une martingale, montrer que $M_{a,b}(s)$ admet une limite presque sûre lorsque s tend vers l'infini, et donner la valeur de cette limite.

4. En utilisant la formule (1), établir les identités (2) et (3) (indication pour l'identité (3) : on pourra s'intéresser aux lignes de la matrice $(P^{t-T}(X_T^{(i)}, b^{(j)}))_{1\le i,j\le d}$ lorsque $t \geq T$).

5. Justifier du fait que T est un temps d'arrêt pour la filtration $(\overline{\mathcal{F}}_s)_{s\geq 0}$ engendrée par la chaîne vectorielle $(\overline{X}_s)_{s\geq 0}$.

6. Expliquer pourquoi les identités (3) et (4) impliquent le Théorème 4.

7. Écrire :
   - un programme `marche_aleatoire(t, a)` qui simule les t premiers pas d'une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ issue d'un point a.
   - un programme `martingale(t, a, b)` qui simule la martingale $(M_{a,b}(s))_{0\leq s\leq t}$ de la première partie du texte. Commenter les trajectoires de cette martingale.
   - un programme `proba_intersection(t, A, B, N)` qui prend en argument un temps t et deux d-uplets ordonnés A et B, et qui calcule la probabilité empirique sur N essais que d trajectoires indépendantes issues de A relient B au temps t sans s'être croisées.

   Utiliser le dernier programme pour vérifier la validité du théorème de Karlin–McGregor (on pourra prendre $t = 6$ et $A = B = (-2, 0, 2)$, et calculer avec $N = 10000$ essais la probabilité empirique).

8. On se propose de redémontrer par une technique alternative le cas $d = 2$ du théorème de Karlin–McGregor. Soit $a^{(1)} < a^{(2)}$ et $b^{(1)} < b^{(2)}$ deux couples ordonnés d'entiers, avec $a^{(1)}$ et $a^{(2)}$ (respectivement $b^{(1)}$ et $b^{(2)}$) de même parité. On note $(X_s)_{s\geq 0} = (X_s^{(1)}, X_s^{(2)})_{s\geq 0}$ une paire de chaînes de Markov indépendantes sur $\mathbb{Z}$, les deux chaînes ayant la même matrice de transition P d'une marche aux plus proches voisins ; on suppose que $X_0 = (a^{(1)}, a^{(2)})$. On définit comme dans le texte $T = \inf(s \geq 0 | X_s^{(1)} = X_s^{(2)})$; c'est le temps d'intersection des deux marches. Notons alors

   $$Y_s = (Y_s^{(1)}, Y_s^{(2)}) = \begin{cases} (X_s^{(1)}, X_s^{(2)}) & \text{si } s < T, \\ (X_s^{(2)}, X_s^{(1)}) & \text{si } s \geq T. \end{cases}$$

   Montrer que $(Y_s)_{s\geq 0}$ est encore un couple de deux marches aléatoires indépendantes de même matrice de transition P. Relier les probabilités

   $$\begin{array}{lcl} \mathbb{P}[Y_t = (b^{(1)}, b^{(2)})] & ; & \mathbb{P}[X_t = (b^{(1)}, b^{(2)})] \\ \mathbb{P}[X_t = (b^{(2)}, b^{(1)})] & ; & \mathbb{P}[X_t = (b^{(1)}, b^{(2)}) \text{ et } t < T] \end{array}$$

   et en déduire une preuve de la formule déterminantale lorsque $d = 2$.