Corrigé

1. Si a et b sont reliés par une trajectoire $(x_0, x_1, \dots, x_t)$ de longueur t, alors

$$b = x_t \equiv x_{t-1} + 1 \equiv \cdots \equiv x_0 + t = a + t \bmod 2,$$

car $x_s - x_{s-1} \in \{-1, +1\}$ pour tout $s \in [\![1, t]\!]$. Par conséquent, si une famille de trajectoires de longueur t relie A à B et si les $a^{(i)}$ sont tous de même parité, alors les $b^{(i)}$ sont aussi tous de même parité :

$$b^{(i)} \equiv a^{(i)} + t \equiv a^{(j)} + t \equiv b^{(j)} \quad \text{pour tout couple } (i, j).$$

Pour la seconde partie du lemme, si $x_s^{(i)} < x_s^{(j)}$ pour tout $s \in [\![0, t]\!]$ et tout $i < j$, alors $x_s^{(i)} \neq x_s^{(j)}$ pour tout $s \in [\![0, t]\!]$, donc la famille de trajectoires est sans intersection. Réciproquement, supposons la famille de trajectoires sans intersection. Pour établir les inégalités $x_s^{(i)} < x_s^{(j)}$ pour tout $i < j$ et $s \in [\![0, t]\!]$, il suffit par transitivité de traiter le cas $j = i + 1$. On montre alors par récurrence sur $s \in [\![0, t]\!]$ la propriété plus forte :

$$\mathcal{P}(s) : x_{i+1}^{(s)} \in \{x_i^{(s)} + 2, x_i^{(s)} + 4, x_i^{(s)} + 6, \dots\}$$

qui implique clairement l'inégalité $x_{i+1}^{(s)} > x_i^{(s)}$. Pour $s = 0$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $(x_i^{(0)}, x_{i+1}^{(0)}) = (a_i, a_{i+1})$ et a_{i+1} est strictement plus grand que a_i et de même parité que a_i. Si $\mathcal{P}(s)$ est vraie, alors remarquons que :

$$x_{s+1}^{(i+1)} - x_{s+1}^{(i)} = (x_s^{(i+1)} - x_s^{(i)}) + \underbrace{(x_{s+1}^{(i+1)} - x_s^{(i+1)})}_{\in\{-1,+1\}} - \underbrace{(x_{s+1}^{(i)} - x_s^{(i)})}_{\in\{-1,+1\}}.$$

Par conséquent, l'écart au temps $s + 1$ diffère de l'écart au temps s par -2, 0 ou 2. Si $x_s^{(i+1)} - x_s^{(i)} \in \{4, 6, 8, \dots\}$, alors ceci implique immédiatement que $x_{s+1}^{(i+1)} - x_{s+1}^{(i)} \in \{2, 4, 6, \dots\}$. Supposons maintenant que $x_s^{(i+1)} - x_s^{(i)} = 2$. Alors, $x_{s+1}^{(i+1)} - x_{s+1}^{(i)} \in \{0, 2, 4\}$, mais le cas $x_{s+1}^{(i+1)} - x_{s+1}^{(i)} = 0$ est exclu car les trajectoires ne s'intersectent pas. On a donc dans tous les cas $x_{s+1}^{(i+1)} - x_{s+1}^{(i)} \in \{2, 4, 6, \dots\}$, et $\mathcal{P}(s + 1)$ est encore vraie.

2. Comme indiqué dans le texte, chaque variable $M_{a,b}(s)$ est $\mathcal{F}_s$-mesurable, car c'est une espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_s$. On a par ailleurs

$$0 \leq M_{a,b}(s) = \mathbb{E}_a[1_{(X_t=b)}|\mathcal{F}_s]| \leq 1$$

pour tout s, donc chaque variable $M_{a,b}(s)$ est intégrable. Voyons maintenant l'équation caractéristique des martingales. On calcule :

$$\mathbb{E}[M_{a,b}(s + 1)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}_a[\mathbb{E}_a[1_{(X_t=b)}|\mathcal{F}_{s+1}]|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}_a[1_{(X_t=b)}|\mathcal{F}_s] = M_{a,b}(s),$$

car conditionner par rapport à la sous-tribu $\mathcal{F}_{s+1}$ puis par rapport à $\mathcal{F}_s$ est équivalent à conditionner directement par rapport à $\mathcal{F}_s$. Ainsi, $(M_{a,b}(s))_{s\geq 0}$ est bien une martingale. Prenons maintenant un temps $s \in [\![0, t]\!]$. Alors, on sait que conditionnellement à $\mathcal{F}_s$, $(Y_t)_{t\geq 0} = (X_{t+s})_{t\geq 0}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition P et issue du point X_s (propriété de Markov simple). Donc,

$$M_{a,b}(s) = \mathbb{E}_a[1_{(X_t=b)}|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}_a[1_{(Y_{t-s}=b)}|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}_{X_s}[1_{(Y_{t-s}=b)}] = \mathbb{P}_{X_s}[Y_{t-s} = b] = P^{t-s}(X_s, b).$$

En particulier, $M_{a,b}(0) = P^t(X_0, b) = P^t(a, b)$ et $M_{a,b}(t) = P^0(X_t, b) = 1_{(X_t=b)}$.

3. Si $s > t$, alors la variable $1_{(X_t=b)}$ est $\mathcal{F}_s$-mesurable, donc $M_{a,b}(s) = \mathbb{E}_a[1_{(X_t=b)}|\mathcal{F}_s] = 1_{(X_t=b)}$. La suite $(M_{a,b}(s))_{s\geq 0}$ est donc stationnaire à la valeur $1_{(X_t=b)}$ après le temps $s = t$. En particulier, la martingale $M_{a,b}$ converge presque sûrement : ce fait était garanti car $M_{a,b}$ est une martingale positive (toute martingale positive converge presque sûrement).

4. Au temps $s = 0$, $\overline{M}_{A,B}(0) = P^t(a^{(1)}, b^{(1)}) \cdots P^t(a^{(d)}, b^{(d)})$, et plus généralement, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(d)$,
$$\overline{M}_{A,B^\sigma}(0) = P^t(a^{(1)}, b^{(\sigma(1))}) \cdots P^t(a^{(d)}, b^{(\sigma(d))}).$$
En faisant la combinaison linéaire avec les signes des permutations, on obtient donc :
$$N_{A,B}(0) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(d)} \varepsilon(\sigma)\, P^t(a^{(1)}, b^{(\sigma(1))}) \cdots P^t(a^{(d)}, b^{(\sigma(d))}) = \det\left(P^t(a^{(i)}, b^{(j)})\right)_{1 \leq i,j \leq d}.$$
De même, pour tout $s \leq t$, $M_{A,B^\sigma}(s) = P^{t-s}(X_s^{(1)}, b^{(\sigma(1))}) \cdots P^{t-s}(X_s^{(d)}, b^{(\sigma(d))})$, donc
$$N_{A,B}(s) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(d)} \varepsilon(\sigma)\, P^{t-s}(X_s^{(1)}, b^{(\sigma(1))}) \cdots P^{t-s}(X_s^{(d)}, b^{(\sigma(d))}) = \det\left(P^{t-s}(X_s^{(i)}, b^{(j)})\right)_{1 \leq i,j \leq d}.$$
Supposons $t \geq T$. Alors, puisque la formule ci-dessus est vraie pour tout temps $s \in [\![0, t]\!]$, on peut remplacer s par le temps aléatoire T, ce qui donne :
$$N_{A,B}(T) = \det\left(P^{t-T}(X_T^{(i)}, b^{(j)})\right)_{1 \leq i,j \leq d}.$$
Mais au temps T, $X_T^{(i)} = X_T^{(j)}$ pour deux indices $i \neq j$, donc la matrice a deux lignes identiques. Le déterminant vaut donc 0 : $N_{A,B}(\min(T, t)) = 0$ si $T \leq t$.

5. Fixons $t \geq 0$. L'identité $T = t$ peut se réécrire comme suit :
$$\{T = t\} \equiv \left(\bigcap_{s=0}^{t-1} \bigcap_{1 \leq i < j \leq d} \{X_s^{(i)} \neq X_s^{(j)}\}\right) \cap \left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq d} \{X_t^{(i)} = X_t^{(j)}\}\right),$$
où chaque événement $\{\omega \in \Omega \,|\, \mathcal{P}(\omega)\}$ est abrévié en $\{\mathcal{P}\}$. Le membre de droite est obtenu par réunion et intersection d'événements qui dépendent des variables vectorielles $\overline{X}_s$ avec $s \leq t$, donc est bien dans la tribu $\overline{\mathcal{F}}_t$. Ainsi, T est bien un temps d'arrêt pour la filtration $(\overline{\mathcal{F}}_s)_{s \geq 0}$.

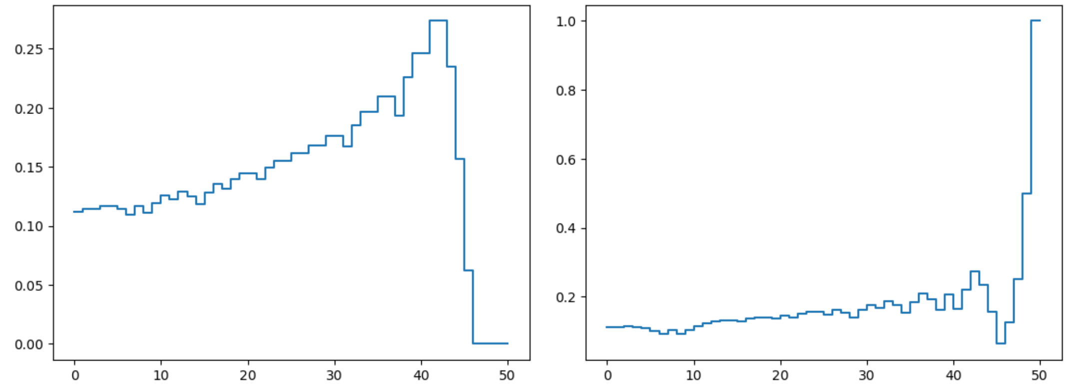
6. C'est un calcul d'espérance : puisque $(N_{A,B}(\min(s, T)))_{s \geq 0}$ est une martingale,
$$\begin{aligned}
\det\left(P^t(a^{(i)}, b^{(j)})\right)_{1 \leq i,j \leq d} &= N_{A,B}(0) = \mathbb{E}[N_{A,B}(\min(t, T))] \\
&= \mathbb{E}[1_{(t<T)}\, N_{A,B}(\min(t, T))] + \mathbb{E}[1_{(t \geq T)}\, N_{A,B}(\min(t, T))] \\
&= \mathbb{E}\left[1_{(t<T)} \times 1_{(X_t^{(1)} = b^{(1)}, \ldots, X_t^{(d)} = b^{(d)})}\right] + \mathbb{E}[1_{(t \geq T)} \times 0] \\
&= \mathbb{P}[t < T \text{ et } X_t^{(1)} = b^{(1)}, \ldots, X_t^{(d)} = b^{(d)}].
\end{aligned}$$

7. Voici les programmes demandés (avec quelques ajouts) :

```python
import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats as st
from scipy.special import binom

def marche_aleatoire(t, A):
    """
    t est un entier positif et A est un vecteur d'entiers

    Simule les t premiers pas de marches simples indépendantes sur Z
    partant des a dans A.
    """
```

```python
    steps = 2*st.bernoulli.rvs(0.5, size = [np.array(A).size, t+1]) - 1
    print(steps)
    steps[:,0] = np.array(A)
    return np.cumsum(steps, axis=1)

def noyau(t, A, B):
    """
    t est un entier positif et A et B sont des vecteurs d'entiers

    Calcule la matrice P^t(a,b)_{a in A, b in B}
    """
    K = np.array([np.array(B)-a+t for a in A])/2
    return binom(t, K)/(2**t)

def martingale(t, A, B):
    """
    t est un entier positif et A et B sont des vecteurs d'entiers
    de même taille

    Calcule la martingale M_(A,B)(s) pour s dans [0,t]. Cela fonctionne
    en particulier si A et B sont des entiers (vecteurs de taille 1).
    """
    X = marche_aleatoire(t, np.array(A))
    res = np.zeros(t+1)
    for s in range(t+1):
        res[s] = np.prod(binom(t-s, (np.array(B)-X[:,s]+t-s)/2)/2**(t-s))
    return res

def proba_intersection(t, A, B, N):
    """
    t et N sont des entiers positifs, et A et B sont des vecteurs d'entiers
    de même taille

    Calcule sur N essais la probabilité que des marches indépendantes issues des points
    A atteignent au temps t les points B sans s'être croisées.
    """
    res = 0
    for i in range(N):
        walk = marche_aleatoire(t, np.array(A))
        test1 = (walk[:,t] == np.array(B))
#       np.diff calcule les différences des termes consécutifs d'un array
        test2 = (np.diff(walk, axis=0) > 0)
        if np.all(test1) and np.all(test2):
            res += 1
    return res/N

def proba_intersection_theorique(t, A, B):
    """
    t est un entier positif et A et B sont des vecteurs d'entiers
    de même taille.

    Calcule la probabilité théorique que des marches indépendantes issues des points A atteignent au temps t les points B sans s'être croisées.
    """
    m = noyau(t, np.array(A), np.array(B))
    return np.linalg.det(m)
```

Pour toute trajectoire obtenue avec `martingale(t, a, b)`, on observe que la trajectoire tend vers 0 ou 1 (sa valeur finale au temps t). Voici deux exemples de trajectoires pour $t = 50$, avec $a = b = 0$:



Nos programmes proba_intersection et proba_intersection_theorique évalués avec $t = 6$ et $A = B = (-2, 0, 2)$ donnent respectivement 0.00363 (pour 10000 essais) et 0.0037384 pour la valeur théorique (approchée à 10^{-7} près) : le théorème de Karlin–McGregor est donc bien confirmé par les simulations.

8. Pour montrer que $(Y_s)_{s\geq 0}$ est un couple de deux chaînes de Markov de même matrice de transition P, on fixe $(x_0^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$ et $(x_0^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)})$ et on calcule la probabilité trajectorielle

$$p = \mathbb{P}[Y_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}), \ldots, Y_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)})].$$

Il y a deux cas à distinguer :

— il n'y a pas de temps $s \leq n$ tel que $x_s^{(1)} = x_s^{(2)}$. Alors, l'événement considéré est inclus dans $\{T > n\}$, et on a donc

$$p = \mathbb{P}[Y_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}), \ldots, Y_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)})] = \mathbb{P}[X_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}), \ldots, X_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)})].$$

— il existe un temps $s \leq n$ tel que $x_s^{(1)} = x_s^{(2)}$. Notons s le premier entier avec cette propriété ; alors, l'événement considéré est inclus dans $\{T = s\}$. Par la propriété de Markov simple, conditionnellement à l'événement

$$A_s = \{X_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}), \ldots, X_s = (x_s^{(1)}, x_s^{(2)})\} = \{Y_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}), \ldots, Y_s = (x_s^{(1)}, x_s^{(2)})\},$$

$(X_{s+t})_{t\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}^2$ avec point de départ $(x_s^{(1)}, x_s^{(1)})$ et matrice de transition $\overline{P}\left((a^{(1)}, a^{(2)}), (b^{(1)}, b^{(2)})\right) = P(a^{(1)}, a^{(2)})\, P(b^{(1)}, b^{(2)})$. L'échange des coordonnées ne modifie pas ceci :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Y_s = (c_0^{(1)}, c_0^{(2)}), \ldots, Y_{s+t} = (c_t^{(1)}, c_t^{(2)})|A_s] &= \mathbb{P}[X_s = (c_0^{(2)}, c_0^{(1)}), \ldots, X_{s+t} = (c_t^{(2)}, c_t^{(1)})|A_s] \\ &= 1_{(c_0^{(1)}=c_0^{(2)}=x_s^{(1)})} \prod_{i=1}^{t} P(c_{i-1}^{(1)}, c_i^{(1)}) P(c_{i-1}^{(2)}, c_i^{(2)}) \\ &= \mathbb{P}[X_s = (c_0^{(1)}, c_0^{(2)}), \ldots, X_{s+t} = (c_t^{(1)}, c_t^{(2)})|A_s].\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}p &= \mathbb{P}[A_s]\, \mathbb{P}[Y_s = (x_s^{(1)}, x_s^{(2)}), \ldots, Y_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)})|A_s] \\ &= \mathbb{P}[A_s]\, \mathbb{P}[X_s = (x_s^{(1)}, x_s^{(2)}), \ldots, X_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)})|A_s] \\ &= \mathbb{P}[X_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}), \ldots, X_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)})].\end{aligned}$$

Autrement dit, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a les mêmes probabilités trajectorielles que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc c'est encore une paire de chaînes de Markov indépendantes de matrice P. Remarquons alors que :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{(a^{(1)},a^{(2)})}[X_t = (b^{(1)}, b^{(2)})] \\
&= \mathbb{P}_{(a^{(1)},a^{(2)})}[Y_t = (b^{(1)}, b^{(2)})] \\
&= \mathbb{P}_{(a^{(1)},a^{(2)})}[Y_t = (b^{(1)}, b^{(2)}) \text{ et } t \geq T] + \mathbb{P}_{(a^{(1)},a^{(2)})}[Y_t = (b^{(1)}, b^{(2)}) \text{ et } t < T] \\
&= \mathbb{P}_{(a^{(1)},a^{(2)})}[X_t = (b^{(2)}, b^{(1)}) \text{ et } t \geq T] + \mathbb{P}_{(a^{(1)},a^{(2)})}[X_t = (b^{(1)}, b^{(2)}) \text{ et } t < T].
\end{aligned}$$

Sur la dernière ligne, si $X_0 = (a^{(1)}, a^{(2)})$ et $X_t = (b^{(2)}, b^{(1)})$, alors deux composantes de X se sont forcément croisées avant le temps t, donc dans le premier terme, il n'est pas nécessaire de rajouter la précision $t \geq T$. Ainsi,

$$\mathbb{P}_{(a^{(1)},a^{(2)})}[X_t = (b^{(1)}, b^{(2)})] = \mathbb{P}_{(a^{(1)},a^{(2)})}[X_t = (b^{(2)}, b^{(1)})] + \mathbb{P}_{(a^{(1)},a^{(2)})}[X_t = (b^{(1)}, b^{(2)}) \text{ et } t < T],$$

donc $\mathbb{P}_{(a^{(1)},a^{(2)})}[X_t = (b^{(1)}, b^{(2)}) \text{ et } t < T] = P^t(a^{(1)}, b^{(1)})\, P^t(a^{(2)}, b^{(2)}) - P^t(a^{(1)}, b^{(2)}) P^t(a^{(2)}, b^{(1)})$ est le déterminant 2×2 recherché.