Révisions : dénombrement, combinatoire et calcul des probabilités

Exercice 1 :

1. On lance 3 fois un dé. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
2. Avec seulement les caractères 0 ou 1, combien peut-on former de suites de n caractères ?
3. Soit E un ensemble de cardinal n. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E (y compris l'ensemble vide et l'ensemble E). Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E)$? (On proposera plusieurs méthodes).

Exercice 2 : Combien de nombres peut-on écrire, avec les chiffres $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, chaque chiffre n'étant présent qu'une seule fois, chaque nombre commençant par 7, étant divisible par 5 et possédant

1. 6 chiffres ?
2. 8 chiffres ?

Exercice 3 : Combien peut-on former de groupes de 6 personnes choisies parmi 4 garçons et 6 filles, contenant

1. 2 garçons donnés ?
2. exactement 2 garçons ?
3. au moins 2 garçons ?

Exercice 4 :

1. On dispose de 5 boules rouges, 2 noires et 3 blanches. De combien de façons peut-on les aligner
   (a) si toutes les boules sont discernables ?
   (b) si deux boules ayant la même couleur sont indiscernables ?
2. Quel est le coefficient de $a^5b^2c^3$ dans le développement de $(a+b+c)^{10}$?
3. De combien de façons peut-on répartir n éléments en k groupes comportant respectivement $r_1, \dots, r_k$ éléments (avec $r_1 + \cdots + r_k = n$) ? Application : Quel est le nombre de possibilités pour répartir 200 étudiants en 10 groupes de tds de 20 étudiants ?

Exercice 5 :

1. De combien de façons peut-on tirer une main de 8 cartes d'un jeu de 32 cartes ?
2. Combien de mains contiendront 4 coeurs ?
3. Combien de mains contiendront 4 coeurs et 3 valets (attention au cas du valet de coeur) ?

Exercice 6 : En vue d'une élection, N personnes, dont M femmes et $N-M$ hommes, se réunissent pour choisir parmi eux une liste de n candidats ($n \leq N$) à présenter dans un ordre déterminé.

1. Combien y a-t-il de listes possibles ?
2. On suppose que $n \geq 3$ et que i, j, k sont des entiers vérifiant $1 \leq i < j < k \leq n$. Combien y a-t-il de listes possibles contenant des femmes aux rangs i, j, k seulement ?
3. Combien y a-t-il de listes possibles contenant exactement 3 femmes ? Application : $n = 6, M = 5, N = 15$.

Exercice 7 : *Formule itérée de Pascal*

1. En utilisant la formule du triangle de Pascal, montrer que

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

2. En déduire (ou retrouver) la somme des n premiers entiers.
3. En exprimant k^2 à l'aide de $\binom{k}{2}$ et $\binom{k}{1}$, calculer la somme des carrés des n premiers entiers.
4. De la même façon, calculer $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Exercice 8 :

1. Que vaut $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}$?
2. Montrer que $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}$ pour $k \leq p \leq n$.
3. En déduire la valeur de $T_{n,i} = \sum_{k=i}^{n-1} \binom{n}{k}\binom{k}{i}$ en fonction de $i \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9 : Calculer :

1. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} j(n-i+1)$.
2. $\sum_{(i,j)\in R} 2^{i+j}$, où $R = [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!]$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=k}^{n} \frac{k}{j+1} \right)$.

Exercice 10 : *Oral Véto 2011*

1. On considère l'intervalle d'entiers $[\![1, n]\!]$. Soit u_n le nombre de parties de $[\![1, n]\!]$ ne comprenant pas 2 entiers consécutifs (on prendra en compte la partie vide). Montrer que, pour tout $n \geq 3$, on a : $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.
2. Une grenouille se trouve face à un escalier de 7 marches. Elle peut grimper les marches une à une ou monter de deux marches à la fois (étant sur la marche i, elle peut sauter soit sur la marche $i+1$, soit sur la marche $i+2$).
   (a) Calculer le nombre de façons possibles pour la grenouille de gravir les 7 marches.
   (b) En supposant que tous ces parcours soient équiprobables, calculer la probabilité que la grenouille atteigne le haut de l'escalier en sautant au-dessus de la marche 6.

Exercice 11 : Dans une salle de danse se trouvent trois couples mariés. Les dames sont masquées. Les trois danseurs invitent au hasard chacun une danseuse.

1. Quelle est la probabilité que chacun danse avec sa femme ?
2. Quelle est la probabilité qu'aucun mari ne danse avec sa femme ?

Exercice 12 : *Paradoxe des anniversaires*

Quelle est la probabilité p_n pour que deux élèves d'une même classe de n élèves aient le même jour d'anniversaire (en supposant qu'il n'y a que 365 jours possibles) ? Vérifier que $p_n > 0.5$ dès que $n \geq 23$.

EXERCICE 13 : Un parking contient n places alignées ($n \geq 2$). Deux voitures s'y sont garées au hasard.

1. Pour $r \in [\![0, \ldots, n-2]\!]$, quelle est la probabilité qu'il y ait exactement r places vides entre ces deux voitures ?
2. Combien de places vides est-il le plus probable de trouver entre les deux voitures ?

EXERCICE 14 : Soient n et N deux entiers tels que $1 \leq n \leq N$. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire simultanément n de ces boules. Soit k un entier naturel tel que $n \leq k \leq N$.

1. Soit p_k la probabilité pour que tous les numéros tirés soient inférieurs ou égaux à k. Calculer p_k.
2. Soit q_k la probabilité pour que le plus grand des numéros tirés soit égal à k. Calculer q_k.
3. En déduire l'égalité $\sum_{k=n}^{N} \binom{k-1}{n-1} = \binom{N}{n}$.

EXERCICE 15 : *Indépendance deux à deux, indépendance mutuelle*
On lance deux fois de suite un dé équilibré et on considère les événements A : "le premier résultat est un 1", B : "le second résultat est un 1", C : "la somme des deux résultats est paire". Montrer que ces événements sont deux à deux indépendants, mais pas indépendants dans leur ensemble.

EXERCICE 16 : Soient A et B deux événements de probabilités : $P(A) = \dfrac{1}{2}, P(B) = \dfrac{1}{5}$.

1. Quel est le meilleur encadrement que l'on puisse donner pour $P(A \cup B)$?
2. Calculer $P(A \cup B)$ si A et B sont incompatibles, puis si A et B sont indépendants.
3. Supposons $P(C) = \dfrac{1}{3}$. Calculer $P(A \cup B \cup C)$ si A, B, C sont mutuellement indépendants.

EXERCICE 17 : *Oral Véto 2011*
On effectue n lancers indépendants d'une pièce équilibrée ($n \geq 1$). On considère les événements U_n : "on n'obtient jamais deux faces consécutives au cours des n premiers lancers" et F_n : "on obtient face au $n^{\text{ième}}$ lancer". On pose $v_n = P(U_n)$.

1. Vérifier que $U_{n+2} = (U_n \cap F_n \cap F_{n+1}^c) \cup (U_n \cap F_n^c \cap (F_{n+1} \cap F_{n+2})^c)$.
2. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $v_{n+2} = \frac{1}{2}P(U_n \cap F_n) + \frac{3}{4}P(U_n \cap F_n^c)$.
3. Montrer de même que $v_{n+1} = \frac{1}{2}P(U_n \cap F_n) + P(U_n \cap F_n^c)$.
4. En déduire que $v_{n+2} = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{4}v_n$.
5. Pour tout $n \geq 1$, exprimer v_n en fonction de n.

EXERCICE 18 : Un joueur lance n fois de suite un dé parfaitement équilibré.

1. Déterminer la probabilité pour que le joueur n'obtienne aucun 6 sur ces n lancers.
2. Calculer la probabilité p_n d'obtenir 6 au moins une fois lors des n lancers.
3. Pour quels entiers n a-t-on $p_n \geq \dfrac{1}{2}$?
4. Déterminer la probabilité pour que le joueur obtienne exactement une fois 6 sur les n lancers.
5. En déduire la probabilité q_n d'obtenir 6 au moins deux fois.
6. Ce joueur se munit maintenant de deux dés non pipés de couleurs différentes. Il jette ces deux dés simultanément et n fois de suite. Calculer la probabilité p'_n d'obtenir au moins une fois le double 6. (Le Chevalier de Méré affirma à Pascal que $p_6 = p'_{24}$. Qu'en pensez-vous ?)
7. Lors d'une suite infinie de lancers d'un dé équilibré, quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois 6 ?

Exercice 19 : *Répétition infinie d'une expérience*

On lance deux dés jusqu'à ce qu'une somme de 5 ou 7 apparaisse.

1. Soit E_n l'événement "une somme de 5 apparaît au $n^{\text{ième}}$ double jet et sur les $n-1$ premiers jets ni la somme de 5 ni la somme de 7 n'apparaît". Calculer $P(E_n)$.
2. Trouver la probabilité qu'on s'arrête sur une somme de 5.
3. Trouver la probabilité qu'on s'arrête sur une somme de 7.
4. Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais ?

Exercice 20 : Quatre dames et cinq messieurs, dont Héloïse et Abélard, vont au cinéma. Ils disposent d'une rangée de neuf places.

1. Ils s'assoient tous au hasard. Quelle est la probabilité que chaque dame soit entourée de deux messieurs ? Quelle est la probabilité qu'Héloïse soit assise à côté d'Abélard ?
2. Ils s'assoient tous au hasard mais de façon que chaque dame soit entourée de deux messieurs. Quelle est la probabilité qu'Héloïse soit assise à côté d'Abélard ?

Exercice 21 : On tire successivement 2 cartes d'un jeu de 52 cartes. Calculer les probabilités des événements "on obtient deux piques", "on obtient au moins un pique" et "la deuxième carte est un pique" dans l'hypothèse :

1. d'un tirage avec remise ;
2. d'un tirage sans remise.

Exercice 22 : Au jeu de bridge, les 52 cartes sont distribuées aux 4 joueurs. L'un des joueurs n'a pas d'as. Quelle est la probabilité que son partenaire

1. n'ait pas d'as ?
2. ait exactement deux as ?

Exercice 23 : *Hérédité*

On admet, pour simplifier, que la coloration de l'iris de l'oeil humain est gérée par un seul gène, la couleur bleue étant récessive et la couleur noire dominante (ce serait vrai pour les drosophiles aux yeux blancs ou rouges). Mme Dupont n'a pas les yeux bleus, ses parents non plus mais elle a un frère aux yeux bleus. Mr Dupont n'a pas les yeux bleus mais a eu un enfant aux yeux bleus.

1. Mr et Mme Dupont ont un premier enfant. Quelle est la probabilité pour qu'il ait les yeux bleus ?
2. Ce premier enfant n'a pas les yeux bleus. Avec quelle probabilité pourra-t-il transmettre des yeux bleus ?
3. Mr et Mme Dupont ont déjà eu un enfant aux yeux bleus. Quelle est la probabilité pour que leur deuxième enfant ait les yeux bleus ?

Exercice 24 : *Formule des probabilités composées*

Un oral de concours, auquel se présentent 50 candidats, se déroule ainsi : l'examinateur dispose d'une boîte contenant 50 questions, le premier candidat tire au hasard sa question dans la boîte, le second tire au hasard parmi les 49 questions restantes, et ainsi de suite. Un candidat à l'oral a fait l'impasse sur une seule question. On note B_k l'événement "la $k^{\text{ième}}$ question tirée est celle sur laquelle le candidat a fait l'impasse" et on pose $A_k = \bar{B}_k$.

1. Calculer $P(B_1)$.
2. Montrer que $B_2 \subset A_1$ et calculer $P(B_2)$.
3. Montrer que $B_3 \subset A_1 \cap A_2$ et calculer $P(B_3)$.

4. Calculer $P(B_k)$. Y a-t-il un rang de passage préférentiel pour le candidat ?

Exercice 25 : *Oral Véto 2012*

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 qui contiennent n_1 (respectivement n_2) boules noires et b_1 (respectivement b_2) boules blanches. On choisit de manière équiprobable une urne dans laquelle on effectue deux tirages successifs d'une boule avec remise. Soit N_1 (respectivement N_2) l'événement "On a tiré une boule noire au premier (respectivement second) tirage".

1. Quelle est la probabilité de N_1 ? Celle de N_2 ?
2. Quelle est la probabilité de N_2 sachant qu'on a tiré une boule noire au premier tirage ?
3. Les événements N_1 et N_2 sont-ils indépendants ?

Exercice 26 : Une urne contient b boules blanches, n noires et r rouges, toutes indiscernables au toucher.

Un joueur tire une boule au hasard dans l'urne. Si elle est blanche, il a gagné et le jeu s'arrête. Si elle est noire, il a perdu et le jeu s'arrête. Si elle est rouge, il retire une autre boule.

1. On suppose dans cette question que, quand le joueur tire une boule rouge, il la remet dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.
   (a) Déterminer la probabilité que le jeu ne soit pas terminé après le $k^{\text{ième}}$ tirage.
   (b) Déterminer la probabilité que le joueur gagne au $k^{\text{ième}}$ tirage.
   (c) Déterminer la probabilité que le joueur gagne.
2. On suppose dans cette question que, quand le joueur tire une boule rouge, il ne la remet pas dans l'urne avant de procéder au tirage suivant. On note p_r la probabilité de gagner quand il y a r boules rouges dans l'urne.
   (a) Calculer p_0 et p_1.
   (b) Trouver une relation de récurrence liant p_r et p_{r-1}.
   (c) En déduire que la probabilité p_r que le joueur gagne est indépendante du nombre r de boules rouges présentes initialement dans l'urne.

Exercice 27 : *Ecrit Concours TB 2013*

On dispose d'une pièce faussée et de deux dés équilibrés D1 et D2. La probabilité d'obtenir pile avec la pièce est $\frac{1}{3}$. Les deux dés ont chacun six faces, le dé D1 a quatre faces rouges et deux blanches, le dé D2 a deux faces rouges et quatre blanches. On jette la pièce : si on obtient pile, on choisit le dé D1 ; sinon, on choisit le dé D2. Ensuite, on jette plusieurs fois le dé choisi et on note pour chaque lancer la couleur obtenue. Considérrons les événements D_1 : "nous jouons avec le dé D1", D_2 : "nous jouons avec le dé D2", R_n :"on a obtenu une face rouge au n-ième lancer du dé choisi".

1. Calculer les probabilités de D_1 et D_2. Montrer que $\{D_1, D_2\}$ est un système complet d'événements.
2. Calculer la probabilité de R_n sachant D_1, puis sachant D_2.
3. Calculer la probabilité de R_1.
4. Etablir une relation entre les probabilités de R_1 sachant D_1, de R_2 sachant D_1 et de $R_1 \cap R_2$ sachant D_1. En déduire la probabilité de $R_1 \cap R_2$.
5. Calculer la probabilité de $\cap_{i=1}^{n} R_i$. En déduire la probabilité de R_{n+1} sachant $\cap_{i=1}^{n} R_i$.
6. Calculer la probabilité de D_1 sachant $R_1 \cap R_2$, puis de manière géérale, la probabilité de D_1 sachant $\cap_{i=1}^{n} R_i$.
7. Après n lancers ayant tous amené la face rouge, vaut-il mieux parier sur le fait que le dé est D1 ou sur le fait qu'on obtiendra une face rouge au lancer suivant ?

Exercice 28 : *Oral Véto 2013*

On dispose de deux urnes : l'une est blanche, l'autre noire. Dans l'urne blanche (respectivement l'urne noire), il y a une proportion $1-r$ de boules blanches et une proportion r de boules noires (respectivement une proportion $1-s$ de boules noires et une proportion s de boules blanches). On effectue des tirages successifs avec remise, en commençant par l'urne blanche, puis en tirant dans l'urne de la couleur de la dernière boule piochée. On note p_n la probabilité de tirer une boule blanche au n-ième tirage.

1. Exprimer p_n en fonction de p_{n-1}, pour $n \geq 2$.
2. Etudier la convergence de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 29 : Une maladie atteint une proportion x de la population. Un laboratoire cherche à mettre au point un test pour détecter la maladie et obtient les résultats suivants : Pour les individus malades, le test est positif dans 95% des cas ; pour les individus sains, le test est positif dans 3% des cas.

1. Quelle est, en fonction de x, la probabilité pour qu'un individu ait un test positif et soit malade ?
2. M. Dupont a un test positif. Quelle est, en fonction de x, la probabilité $p(x)$ pour que M. Dupont soit malade ?
3. Calculez $p(x)$ pour $x = 1\%,\ 30\%,\ 40\%$.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto p(x)$ pour $x \in [0, 1]$.
5. Ce test vous paraît–il aussi bien adapté aux maladies rares ($x \leq 1\%$) qu'aux épidémies ($x \geq 30\%$) ?

Exercice 30 : *Formule des probabilités totales et formule de Bayes*

Quatre urnes contiennent des boules.
– L'urne 1 contient 3 boules rouges, 2 boules blanches, 3 boules noires ;
– L'urne 2 contient 4 boules rouges, 3 boules blanches, 1 boules noire ;
– L'urne 3 contient 2 boules rouges, 1 boules blanche, 1 boules noire ;
– L'urne 4 contient 1 boules rouge, 6 boules blanches, 2 boules noires.
On choisit au hasard une urne et, de celle-ci, on tire une boule au hasard.

1. Calculer la probabilité pour que cette boule ne soit pas blanche.
2. Si la boule tirée est rouge, quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée de l'urne 3 ?

Exercice 31 : *Probabilité d'une intersection et probabilité conditionnelle*

Dans un important verger sont cultivées trois sortes de pruniers A_1, A_2, A_3, dont 30% d'arbres A_1. Un parasite sévit : 40% des arbres A_1 et 30% des arbres A_3 sont touchés ; de plus les arbres qui sont atteints et qui sont de l'espèce A_2 représentent 9% du verger.

1. Quelle est la probabilité qu'un arbre du verger soit atteint et soit de l'espèce A_1 ?
2. On sait que, dans ce verger, un arbre atteint a 50% de chances d'être de l'espèce A_1.
   (a) Quelle est la probabilité qu'un arbre du verger soit de l'espèce A_3 ?
   (b) En utilisant les observations faites dans ce verger, déterminer celle des trois espèces de pruniers qui résiste le mieux à l'atteinte parasitaire.