Bio-Concours
S4 Probabilités

EXAMEN DE PROBABILITÉS – 9 AVRIL 2015

2014–2015

Sans document ni calculatrice. Durée : 3 heures. Les questions sont la plupart du temps indépendantes, et elles peuvent être traitées séparément, quitte à admettre les résultats de questions précédentes.

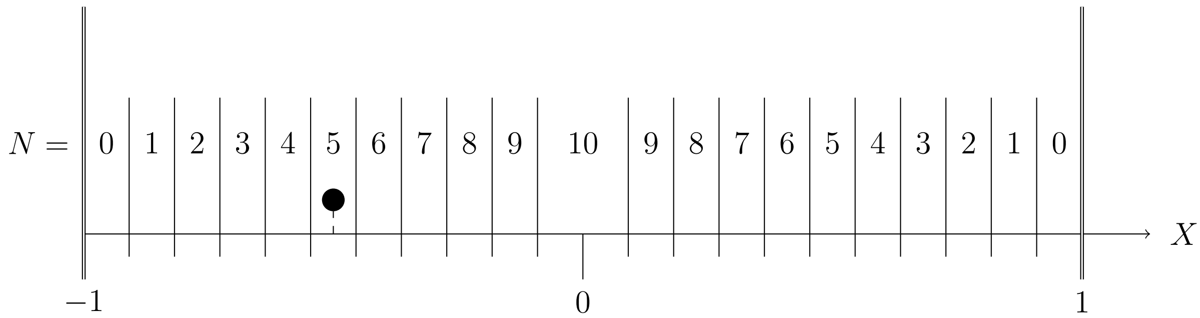
EXERCICE 1

Un joueur de bowling lance sa boule sur une piste de deux mètres de large, qu'on identifiera au segment $[-1, 1]$. On note X la variable aléatoire à valeurs dans $[-1, 1]$ représentant l'endroit où la boule vient frapper les quilles, et on suppose que X admet pour densité

$$f_X(x) = \begin{cases} c\,|x| & \text{si } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Quelle est la valeur de la constante c ?
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Soient $a < b$ deux nombres dans $[0, 1]$. Donner une formule en fonction de a et de b pour $\mathbb{P}[a \leq X \leq b]$, puis montrer que $\mathbb{P}[a \leq |X| \leq b] = b^2 - a^2$.

Le nombre de quilles renversées N dépend du point d'impact X comme suit : si $\frac{k}{11} \leq |X| \leq \frac{k+1}{11}$, alors $N = 10 - k$ (voir dessin ci-dessous, où $N = 5$).



4. Donner la loi de N (on pourra la présenter sous la forme d'un tableau).
5. Calculer l'espérance de N.

EXERCICE 2

Soit (X, Y) un couple aléatoire à densité donnée par

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} k(x^2 + y^2) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer la valeur de k.
2. Déterminer la loi marginale de la variable aléatoire X, puis celle de Y.
3. Calculer $\mathrm{cov}(X, Y)$ et commenter le résultat.

4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier votre réponse.
5. (Facultatif) Déterminer la loi de la variable aléatoire $X + Y$.

EXERCICE 3

Pierre et Caroline jouent à pile ou face avec une pièce non truquée. Une partie consiste en un lancer de la pièce : Pierre choisit toujours "Pile" ; Caroline choisit toujours "Face".

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans cette question, on suppose que n parties sont effectuées. On appelle X le nombre de parties gagnées par Pierre, Y le nombre de parties gagnées par Caroline.
   (a) Quelle est la loi de la variable aléatoire X ? Celle de Y ?
   (b) Déterminer la loi du couple aléatoire (X, Y).
   (c) Calculer le coefficient de corrélation du couple aléatoire (X, Y). Commenter le résultat.
2. Dans cette question et la suivante, Pierre et Caroline jouent une infinité de parties. Soit T_1 le nombre de parties jouées lorsque Pierre gagne sa première partie. Déterminer la loi de T_1, et donner son espérance.
3. Soit T_2 le nombre de parties jouées lorsque Pierre gagne sa deuxième partie. Déterminer la loi de T_2. On pourra remarquer que l'événement $(T_2 = k)$ signifie qu'il y a eu une partie gagnée exactement par Pierre dans les $k - 1$ premières parties, et qu'il a gagné la k-ième.
4. Pierre et Caroline décident de jouer jusqu'à ce que l'un d'eux ait remporté deux parties. On note U le nombre de parties qu'ils jouent. Déterminer la loi de U.
5. (Facultatif) Soit S_1 une variable aléatoire indépendante et de même loi que T_1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $T_1 + S_1$. Commenter.

EXERCICE 1 — CORRIGÉ

1. On doit avoir

$$1 = \int_{-1}^{1} f_X(x)\,dx = c\int_{-1}^{1} |x|\,dx = 2c\int_0^1 x\,dx = 2c\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = c,$$

   donc $c = 1$.

2. L'espérance de X est

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-1}^{1} x|x|\,dx = \int_0^1 x^2\,dx - \int_{-1}^{0} x^2\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

   et sa variance est

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2]\\ &= \int_{-1}^{1} x^2|x|\,dx = \int_0^1 x^3\,dx - \int_{-1}^{0} x^3\,dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

3. Si $0 \le a < b \le 1$, on a

$$\mathbb{P}[a \le X \le b] = \int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

   Par symétrie, $\mathbb{P}[-b \le X \le -a] = \frac{b^2-a^2}{2}$, et on en déduit

$$\mathbb{P}[a \le |X| \le b] = \mathbb{P}[a \le X \le b] + \mathbb{P}[-b \le X \le a] = b^2 - a^2.$$

4. D'après la question précédente,

$$\mathbb{P}[N = 10 - k] = \mathbb{P}\left[\frac{k}{11} \le |X| \le \frac{k+1}{11}\right] = \left(\frac{k+1}{11}\right)^2 - \left(\frac{k}{11}\right)^2 = \frac{2k+1}{121},$$

   d'où le tableau suivant pour la loi de N :

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbb{P}[N = k]$	$\frac{21}{121}$	$\frac{19}{121}$	$\frac{17}{121}$	$\frac{15}{121}$	$\frac{13}{121}$	$\frac{11}{121}$	$\frac{9}{121}$	$\frac{7}{121}$	$\frac{5}{121}$	$\frac{3}{121}$	$\frac{1}{121}$

5. On calcule $\mathbb{E}[N] = \sum_{k=0}^{10} k\,\mathbb{P}[k]$, soit en utilisant le tableau précédent, soit avec les formules $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{k(k+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$:

$$\mathbb{E}[N] = \frac{1}{121}\sum_{k=0}^{10}(10-k)(2k+1) = \frac{35}{11}.$$

EXERCICE 2 — CORRIGÉ

1. La fonction de répartition de X est

$$F_X(s) = \begin{cases} \int_0^s \frac{1}{(1+t)^2}\,dt = \frac{s}{1+s} & \text{si } s \ge 0;\\ 0 & \text{si } s < 0.\end{cases}$$

2. La première identité est obtenue par réduction au même dénominateur, et la seconde en élevant au carré la première.

3. Comme X et Y sont indépendantes et à valeurs positives, on peut utiliser la formule du produit de convolution pour la densité de $Z = X + Y$ sur $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} f_Z(s) &= \int_{t=0}^{s} f_X(t)\, f_Y(s-t)\, dt = \int_{t=0}^{s} \frac{1}{(1+t)^2(1+s-t)^2}\, dt \\ &= \frac{1}{(2+s)^2} \int_{t=0}^{s} \frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{(1+s-t)^2}\, dt + \frac{2}{(2+s)^3} \int_{t=0}^{s} \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1+s-t}\, dt \\ &= \frac{2}{(2+s)^2}\, \frac{s}{1+s} + \frac{4}{(2+s)^3}\, \log(1+s). \end{aligned}$$

On obtient ainsi cette densité sur $\mathbb{R}_+$, et bien sûr 0 sur $\mathbb{R}_-$.