

INTRODUCTION À LA THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS: LE CAS DES GROUPES SYMÉTRIQUES

PIERRE-LOÏC MÉLIOT

1. DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR À LA THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS

1.1. **L'équation de la chaleur sur la droite et sur le cercle.** Considérons l'équation de la chaleur sur la droite réelle :

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}, \quad (1)$$

avec condition initiale $f(x, 0) = f(x)$, où f est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ et à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées. Cette équation décrit l'évolution de la densité de particules soumises à des collisions thermodynamiques. Pour résoudre cette équation, on peut introduire la *transformée de Fourier* de $f(x, t)$:

$$\widehat{f}(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}} f(x, t) e^{-i\xi x} dx.$$

Supposons *a priori* que toutes les fonctions $x \mapsto f(x, t)$ sont de classe \mathcal{C}^∞ et à décroissance rapide. Alors, pour tout temps t ,

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi, t) e^{i\xi x} d\xi,$$

et d'autre part,

$$\frac{\partial \widehat{f}(\xi, t)}{\partial t} = \frac{\partial \widehat{f}}{\partial t}(\xi, t) \quad ; \quad \frac{\partial^2 \widehat{f}(\xi, t)}{\partial \xi^2} = -\xi^2 \widehat{f}(\xi, t).$$

Par conséquent, en appliquant la transformée de Fourier à l'équation (1), on obtient

$$\frac{\partial \widehat{f}(\xi, t)}{\partial t} = -\frac{\xi^2}{2} \widehat{f}(\xi, t), \quad (2)$$

qui a pour unique solution $\widehat{f}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi, 0) e^{-\frac{\xi^2 t}{2}}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{-\frac{\xi^2 t}{2} + i\xi x} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t} + i\xi(y-x)} dy \right) e^{i\xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi y} d\xi \right) e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} dy. \end{aligned}$$

Écrite sous cette forme, la solution de (1) vérifie bien l'hypothèse de classe \mathcal{C}^∞ à décroissance rapide. Notons la forme très simple de la solution de (2).

Supposons maintenant que la condition initiale $f(x, 0) = f(x)$ est une fonction 2π -périodique, ou, autrement dit, une fonction sur le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. On notera $\theta \in [0, 2\pi]$ la classe modulo 2π d'un argument $x \in \mathbb{R}$. Supposant de nouveau $f(x, t)$ de classe \mathcal{C}^∞ en

x , elle est égale à sa *série de Fourier*, qui est absolument convergente et dérivable terme à terme :

$$f(\theta, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k, t) e^{ik\theta} \quad \text{avec} \quad \widehat{f}(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\theta, t) e^{-ik\theta} d\theta.$$

L'équation de la chaleur s'écrit alors :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\partial \widehat{f}(k, t)}{\partial t} e^{ik\theta} = \frac{\partial f(\theta, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(\theta, t)}{\partial \theta^2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} -\frac{k^2}{2} \widehat{f}(k, t) e^{ik\theta}.$$

Par unicité de la décomposition d'une fonction périodique en série de Fourier, chaque coefficient de Fourier est donc solution de

$$\frac{\partial \widehat{f}(k, t)}{\partial t} = -\frac{k^2}{2} \widehat{f}(k, t),$$

donc $\widehat{f}(k, t) = \widehat{f}(k) e^{-\frac{k^2 t}{2}}$ et

$$\begin{aligned} f(\theta, t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{-\frac{k^2 t}{2}} e^{ik\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\theta') \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{k^2 t}{2}} e^{ik(\theta - \theta')} \right) d\theta' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\theta') \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2 t}{2}} \cos k(\theta - \theta') \right) d\theta'. \end{aligned}$$

Notons $\rho(\theta, t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2 t}{2}} \cos k\theta$, de sorte que $f(\theta, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\theta') \rho(\theta - \theta', t) d\theta'$. On dit que $\rho(\theta, t)$ est le *noyau solution fondamentale* de l'équation de la chaleur sur le cercle \mathbb{T} ; toutes les solutions s'écrivent comme convolées de la condition initiale par ce noyau.

Une propriété intéressante de l'équation de la chaleur sur le cercle est le phénomène de *moyennisation* : pour toute fonction initiale f , $\lim_{t \rightarrow \infty} f(\theta, t) = m(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\theta') d\theta'$, et on peut évaluer la différence comme suit :

$$\begin{aligned} |f(\theta, t) - m(f)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\theta') \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2e^{-\frac{k^2 t}{2}} \cos k(\theta - \theta') \right) d\theta' \right| \\ &\leq 2 \|f\|_{L^2(\mathbb{T})} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{-k^2 t} \cos^2(k\theta) d\theta} \\ &\leq \sqrt{2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 t}} \|f\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \sqrt{\frac{2e^{-t}}{1 - e^{-t}}} \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Ainsi, la théorie de Fourier permet d'évaluer le temps de mélange de l'équation de la chaleur sur le cercle.

Exercice. En utilisant des séries de Fourier en N variables, résoudre l'équation de la chaleur sur le tore :

$$\frac{\partial f(x_1, \dots, x_N; t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta f(x_1, \dots, x_N; t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 f(x_1, \dots, x_N; t)}{\partial x_i^2}$$

avec une condition initiale 2π -périodique dans toutes les directions, c'est-à-dire définie sur le tore $\mathbb{T}^N = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^N$. Montrer que la différence $|f(\theta_1, \dots, \theta_N; t) - m(f)|$ devient petite à partir du temps $t = \log N$.

1.2. Marches aléatoires sur le groupe symétrique. L'outil essentiel employé pour la résolution de l'équation de la chaleur sur \mathbb{T} est une famille de fonctions $(e_k : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C})_{k \in \mathbb{Z}}$ avec les propriétés suivantes :

- (1) $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de l'espace $L^2(\mathbb{T})$; en particulier, toute fonction s'écrit de manière unique $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f | e_k \rangle e_k$;
- (2) chaque fonction $e_k(\theta) = e^{ik\theta}$ est un morphisme de groupes $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$;
- (3) chaque fonction e_k diagonalise l'opérateur laplacien : $\Delta e_k = -k^2 e_k$.

Avec ce point de vue abstrait, on peut envisager de résoudre d'autres problèmes d'évolution, avec des opérateurs différents ou dans d'autres cadres. Présentement, on considérera le problème suivant. Notons $\mathfrak{S}(N)$ le *groupe symétrique* d'ordre N , c'est-à-dire le groupe des bijections $[[1, N]] \rightarrow [[1, N]]$ muni du produit de composition des fonctions. Les éléments de $\mathfrak{S}(N)$ sont appelés *permutations* de taille N , et on adoptera deux notations différentes pour un élément $\sigma \in \mathfrak{S}(N)$:

- (1) *notation en ligne* $\sigma = [\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3) \cdots \sigma(n)]$. Par exemple, $[4213]$ est la permutation qui envoie 1 sur 4, 2 sur 2, 3 sur 1 et 4 sur 3.
- (2) *notation en cycles* $\sigma = (a_1, \dots, a_{\mu_1})(a_{\mu_1+1}, \dots, a_{\mu_1+\mu_2}) \cdots (a_{\mu_1+\dots+\mu_{r-1}+1}, \dots, a_N)$. Chaque permutation est produit de cycles à supports disjoints, le cycle (a_1, \dots, a_r) étant la permutation qui envoie a_1 sur a_2 , a_2 sur a_3 , etc. jusqu'à a_r sur a_1 . Cette décomposition en cycles est unique à permutation des cycles près, et à permutation cyclique des éléments de chaque cycle près. Par exemple, $[4213]$ a pour décomposition en cycles $(1, 4, 3)(2)$.

On considère alors une suite aléatoire de permutations $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie comme suit :

- (1) la première permutation σ_0 est l'identité $\text{id} : k \mapsto k$.
- (2) à chaque étape, on choisit au hasard $i \in [[1, N]]$ avec probabilité uniforme $\frac{1}{N}$ et $j \in [[1, N]]$ avec probabilité uniforme $\frac{1}{N}$, ces choix étant indépendants. On définit alors

$$\sigma_{n+1} = \begin{cases} \sigma_n & \text{si } i = j, \\ \sigma_n * (i, j) & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Les permutations σ_n correspondent à l'expérience aléatoire suivante : on part d'un paquet de cartes ordonnées de 1 à N , et à chaque étape, on échange deux cartes choisies au hasard (éventuellement la même carte, auquel cas l'échange est trivial).

La quantité qui nous intéresse est la *loi de probabilités* f_n de σ_n :

$$f_n(\sigma) = \mathbb{P}[\sigma_n = \sigma] = \text{probabilité pour que } \sigma_n \text{ soit égale à } \sigma.$$

La famille de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une équation semblable à (1). Pour écrire cette équation, il convient d'identifier une fonction $f : \mathfrak{S}(N) \rightarrow \mathbb{C}$ avec la combinaison linéaire formelle

$$f = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(N)} f(\sigma) \sigma,$$

qu'on peut voir comme un "polynôme" en les permutations $\sigma \in \mathfrak{S}(N)$. Par exemple,

$$2[4213] + [3412] - 3[1234]$$

est la fonction qui envoie $[4213]$ sur 2, $[3412]$ sur 1, $[1234]$ sur -3 et toutes les autres permutations de \mathfrak{S}_4 sur 0. L'avantage de cette notation est qu'elle rend le *produit de convolution* de fonctions sur le groupe symétrique particulièrement naturel :

$$f * g = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(N)} f(\sigma) \sigma \right) * \left(\sum_{\tau \in \mathfrak{S}(N)} g(\tau) \tau \right) = \sum_{\rho \in \mathfrak{S}(N)} \left(\sum_{\rho = \sigma\tau} f(\sigma)g(\tau) \right) \rho.$$

Théorème 1. *Les lois f_n des permutations σ_n vérifient l'équation de la chaleur"*

$$f_{n+1} - f_n = f_n \left(\frac{1}{N^2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} ((i, j) - \text{id}) \right). \quad (3)$$

Démonstration. On calcule

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= \sum_{\rho \in \mathfrak{S}(N)} \mathbb{P}[\sigma_{n+1} = \rho] \rho = \sum_{\sigma, \rho \in \mathfrak{S}(N)} \mathbb{P}[\sigma_n = \sigma, \sigma_{n+1} = \rho] \rho \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(N)} \sum_{i, j=1}^N \frac{\mathbb{P}[\sigma_n = \sigma]}{N^2} \sigma * (i, j) = f_n * \left(\frac{1}{N^2} \sum_{i, j=1}^N (i, j) \right) \end{aligned}$$

avec l'abus de notation $(i, j) = \text{id}$ si $i = j$. □

L'équation (3) est l'analogie de (1) dans le contexte du groupe symétrique, le laplacien $\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ étant remplacé par l'opérateur de multiplication par $\frac{1}{N^2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} ((i, j) - \text{id})$ dans $\mathbb{C}[\mathfrak{S}(N)]$. En particulier, si l'on peut trouver une base orthonormale de $\mathbb{C}[\mathfrak{S}(N)]$ qui diagonalise cet opérateur, alors on pourra calculer aisément les lois f_n , et en particulier

- (1) démontrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\sigma) = \frac{1}{N!}$ pour toute permutation σ , ce qui est naturel mais en l'état difficile à établir.
- (2) évaluer le temps de mélange, c'est-à-dire le temps n nécessaire pour que $|f_n(\sigma) - \frac{1}{N!}|$ soit uniformément petit.

Dans ce contexte, la différence essentielle entre le cas du groupe symétrique $\mathfrak{S}(N)$ et le cas du cercle \mathbb{T} est que $\mathfrak{S}(N)$ est un groupe non commutatif. Par conséquent, pour trouver une base appropriée de $\mathbb{C}[\mathfrak{S}(N)]$, il conviendra d'autoriser des fonctions plus générales que les morphismes de groupes $\mathfrak{S}(N) \rightarrow \mathbb{C}^*$. Ceci mène directement à la théorie des représentations de $\mathfrak{S}(N)$, qui est l'étude de tous les morphismes possibles de $\mathfrak{S}(N)$ vers un groupe linéaire $\text{GL}(d, \mathbb{C})$.

Exercice. Calculer f_n pour tout n lorsque $\mathfrak{S}(N) = \mathfrak{S}(3)$.

2. REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES D'UN GROUPE FINI

Dans tout ce qui suit, G est un groupe fini de cardinal $|G|$, par exemple le groupe symétrique $\mathfrak{S}(N)$. On note $\mathbb{C}[G]$ l'ensemble des fonctions $G \rightarrow \mathbb{C}$, et on identifie comme précédemment une fonction f et la combinaison linéaire formelle $\sum_{g \in G} f(g)g$. Pour le produit de convolution

$$(f_1 * f_2)(g) = \sum_{g=hk} f_1(h) f_2(k),$$

$\mathbb{C}[G]$ est une \mathbb{C} -algèbre (de dimension finie, en général non commutative).

2.1. La catégorie des représentations de G . On appelle *représentation* (linéaire, complexe) de G la donnée d'un espace vectoriel complexe V de dimension finie d , et d'un morphisme de groupes $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$; ainsi, $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$.

Exemple. Pour le groupe symétrique $\mathfrak{S}(N)$, une représentation sur \mathbb{C}^N est donnée par

$$\rho(\sigma)(x_1, \dots, x_N) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(N)}).$$

On peut aussi construire une représentation de $\mathfrak{S}(N)$ sur l'espace des polynômes en N variables homogènes de degré k , $k \geq 0$:

$$\rho(\sigma)(P(X_1, \dots, X_N)) = P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(N)}).$$

La théorie des représentations d'un groupe fini G a de nombreuses ressemblances avec la théorie des espaces vectoriels finis sur un corps K . Ainsi, de la même façon que tout K -espace vectoriel de dimension finie est (isomorphe à) la somme directe $\bigoplus_{k=1}^d K e_k$ d'un nombre d unique de droites vectorielles, toute représentation d'un groupe fini s'écrit (à isomorphisme près) comme somme directe de blocs élémentaires uniquement déterminés, les représentations irréductibles de G . L'objectif de cette section est d'introduire le langage nécessaire à la preuve de cette décomposition.

Dans ce qui suit, étant fixée une représentation (V, ρ) , on notera $g \cdot v$ en lieu et place de $\rho(g)(v)$. Un *morphisme* entre deux représentations (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) de G est une application \mathbb{C} -linéaire $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ telle que

$$\phi(g \cdot v) = g \cdot \phi(v)$$

pour tout $v \in V_1$ et tout $g \in G$. On parle d'*isomorphisme de représentations* si ϕ est également un isomorphisme linéaire entre V_1 et V_2 . Dans ce qui suit, on identifiera implicitement deux représentations de G si elles sont isomorphes.

La *somme directe* de deux représentations (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) de G est la représentation d'espace vectoriel sous-jacent $V_1 \oplus V_2$, avec $g \cdot (v_1 + v_2) = (g \cdot v_1) + (g \cdot v_2)$. D'autre part, une *sous-représentation* de (V, ρ) est la donnée d'un sous-espace vectoriel $W \subset V$ qui est *stable* par G , c'est-à-dire que

$$\forall g \in G, \forall v \in W, g \cdot v \in W.$$

Dans ce cas, W est naturellement une représentation de G pour le morphisme $\rho_W(g) = \rho(g)|_W$.

Exemple. La représentation de $\mathfrak{S}(N)$ sur \mathbb{C}^N laisse invariante la somme des coordonnées $x_1 + \dots + x_N$, donc, une sous-représentation de \mathbb{C}^N est donnée par le sous-espace vectoriel

$$V_1 = \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{C}^N \mid x_1 + \dots + x_N = 0\}.$$

D'autre part, la droite vectorielle $V_2 = \mathbb{C}(1, 1, \dots, 1)$ est aussi laissée stable par permutation des variables. On voit alors que $\mathbb{C}^N = V_1 \oplus V_2$ est la somme directe des sous- $\mathfrak{S}(N)$ -représentations V_1 et V_2 .

Une représentation (V, ρ) de G est dite *irréductible* si elle n'admet pas de sous-représentation $W \subset V$ avec $W \neq \{0\}$ et $W \neq V$. D'autre part, on appelle représentation *régulière* de G la représentation d'espace vectoriel $V = \mathbb{C}[G]$, avec $g \cdot \sum_{h \in G} f(h) h = \sum_{h \in G} f(h) gh$.

Théorème 2 (Maschke, Schur). *Soit (V, ρ) une représentation de G .*

- (1) *Il existe un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ sur V tel que tout élément $g \in G$ agisse par isométries sur V : $\forall g \in G, \forall (v, w) \in V^2, \langle g \cdot v | g \cdot w \rangle = \langle v | w \rangle$.*
- (2) *La représentation V se scinde en somme directe de représentations irréductibles : $V = \bigoplus_{\lambda} V^{\lambda}$ avec chaque V^{λ} sous-représentation irréductible de V .*
- (3) *Réunissons les parts de cette décomposition suivant leurs classes d'isomorphismes :*

$$V \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} m_{\lambda} V^{\lambda} \quad \text{avec } V^{\lambda} \not\simeq V^{\mu} \text{ si } \lambda \neq \mu, \quad m_{\lambda} \in \mathbb{N}^*.$$

Alors, m_{λ} est entièrement déterminé par (la classe d'isomorphisme de) V^{λ} .

- (4) *Toute représentation irréductible V^{λ} est une composante de la représentation régulière $\mathbb{C}[G]$, avec multiplicité $m_{\lambda} = \dim V^{\lambda}$.*

Démonstration partielle. Si (\cdot, \cdot) est un produit scalaire quelconque sur V , alors

$$\langle v | w \rangle = \sum_{g \in G} (g \cdot v, g \cdot w)$$

est un nouveau produit scalaire pour lequel G agit par isométries. Considérons alors la représentation V . Si elle n'est pas elle-même irréductible, alors elle admet un sous-espace stable non-trivial V_1 . L'orthogonal $V_2 = (V_1)^{\perp}$ pour $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est également une sous-représentation de V : si $g \in G$ et $v \in V_2$, alors pour tout $w \in V_1$,

$$\langle g \cdot v | w \rangle = \langle v | g^{-1} \cdot w \rangle = 0 \quad \text{car } v \in V_2 \text{ et } g^{-1} \cdot w \in V_1,$$

donc $g \cdot v \in V_2 = (V_1)^{\perp}$. Par conséquent, $V = V_1 \oplus V_2$ est la somme de deux sous-représentations strictes, et par récurrence sur la dimension de V , on en déduit que V se scinde en représentations irréductibles.

Concernant les deux derniers points, on utilise les espaces vectoriels de morphismes $\text{Mor}_G(V, W)$ entre deux représentations V et W de G . Si V et W sont irréductibles, alors le *lemme de Schur*, que nous admettrons, assure que

$$\dim \text{Mor}_G(V, W) = \begin{cases} 1 & \text{si } V \simeq W, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit facilement que la multiplicité m_λ d'une représentation irréductible V^λ dans une autre représentation V est donnée par $m_\lambda = \dim \text{Mor}_G(V, V^\lambda)$; donc, en particulier, elle est entièrement déterminée par V . Finalement, pour toute représentation V et tout vecteur $v \in V$, un morphisme de représentations entre $\mathbb{C}[G]$ et V est donné par

$$\phi(f) = \sum_{g \in G} f(g) g \cdot v,$$

et tout morphisme est de ce type, avec $v = \phi(\delta_{e_G})$. Ainsi, $\dim \text{Mor}_G(\mathbb{C}[G], V^\lambda) = \dim V^\lambda$ et

$$\mathbb{C}[G] \simeq \bigoplus_{\lambda \in \widehat{G}} (\dim V^\lambda) V^\lambda,$$

où \widehat{G} est l'ensemble (fini!) de toutes les (classes d'isomorphismes de) représentations irréductibles de G . \square

Exercice. Pour tout morphisme de représentations $\phi : V_1 \rightarrow V_2$, montrer que $\ker \phi$ et $\text{im } \phi$ sont des sous-représentations de V_1 et de V_2 . En déduire que si $\phi : V \rightarrow V$ est un endomorphisme d'une représentation irréductible, alors $\phi = \lambda \text{id}_V$ pour un certain λ (prendre une valeur propre de ϕ). Démontrer alors le lemme de Schur.

2.2. Décomposition de $\mathbb{C}[G]$ et de $Z(\mathbb{C}[G])$. L'isomorphisme $\mathbb{C}[G] \simeq \bigoplus_{\lambda \in \widehat{G}} d_\lambda V^\lambda$ peut être rendu concret, et ceci fournit une base importante de $\mathbb{C}[G]$ qui sera l'analogue de la famille de fonctions $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ pour le cercle. Si $f \in \mathbb{C}[G]$ et $\lambda = (V^\lambda, \rho^\lambda)$ est une représentation irréductible, on note

$$\widehat{f}(\lambda) = \sum_{g \in G} f(g) \rho^\lambda(g) \in \text{End}(V^\lambda).$$

On peut voir la fonction \widehat{f} comme un élément de l'algèbre $\mathbb{C}[\widehat{G}] = \bigoplus_{\lambda \in \widehat{G}} \text{End}(V^\lambda)$:

$$\widehat{f} = \sum_{\lambda \in \widehat{G}} \widehat{f}(\lambda).$$

Cette algèbre est une représentation de G pour l'action $g \cdot \sum_{\lambda \in \widehat{G}} u^\lambda = \sum_{\lambda \in \widehat{G}} \rho^\lambda(g) u^\lambda$. D'autre part, $\mathbb{C}[G]$ et $\mathbb{C}[\widehat{G}]$ sont équipés de structures hilbertiennes

$$\langle f_1 | f_2 \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f_2(g)} \quad ; \quad \langle u | v \rangle_{\widehat{G}} = \sum_{\lambda \in \widehat{G}} \frac{d_\lambda}{|G|^2} \text{tr}(u^\lambda (v^\lambda)^*).$$

Dans ce qui suit, on note $(\rho_{ij}^\lambda(g))_{1 \leq i, j \leq d_\lambda}$ la matrice de $\rho^\lambda(g)$ dans une base orthonormée pour le produit scalaire G -invariant du théorème 2, et

$$\rho_{ij}^{\lambda'}(g) = \rho_{ij}^\lambda(g^{-1}) = \overline{\rho_{ji}^\lambda(g)}.$$

Théorème 3. *La transformée de Fourier $f \mapsto \widehat{f}$ est un isomorphisme d'algèbres, de G -représentations et d'espaces de Hilbert. Les fonctions $\rho_{ij}^{\lambda'}$ forment une base orthogonale de $\mathbb{C}[G]$, avec*

$$\left\langle \rho_{ij}^{\lambda'} \mid \rho_{ij}^{\lambda'} \right\rangle_G = \frac{1}{d_\lambda} \quad ; \quad \widehat{\rho_{ij}^{\lambda'}}(\mu) = \begin{cases} \frac{|G|}{d_\lambda} e_{ji}^\lambda & \text{si } \lambda = \mu, \\ 0 & \text{si } \lambda \neq \mu, \end{cases}$$

où e_{ji}^λ est la matrice élémentaire de taille d_λ avec coefficient 1 en position (j, i) et 0 partout ailleurs.

Exemple. Considérons le groupe symétrique $\mathfrak{S}(3)$. On dispose des trois représentations irréductibles suivantes :

$$\begin{aligned} V_1 &= \mathbb{C} \quad \text{avec } \rho(\sigma) = 1; \\ V_2 &= \mathbb{C} \quad \text{avec } \rho(\sigma) = \varepsilon(\sigma); \\ V_3 &= \text{Vect}(e_1 - e_2, e_1 - e_3) \subset \mathbb{C}^3; \end{aligned}$$

où l'action sur V_3 est par permutation des coordonnées. Il est facile de voir que ses représentations ne sont pas isomorphes, et comme $6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$, on les a toutes. La transformée de Fourier d'un élément de $\mathbb{C}[\mathfrak{S}(3)]$ est donc un élément de $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \text{M}(2, \mathbb{C})$.

Comme corollaire du théorème 3, on obtient une décomposition de toute fonction sur le groupe G en coefficients de représentations irréductibles :

$$\begin{aligned} f(g) &= \sum_{\lambda, i, j} d_\lambda \langle f \mid \rho_{ij}^{\lambda'} \rangle_G \rho_{ij}^{\lambda'}(g) = \sum_{\lambda, i, j} d_\lambda \langle \widehat{f} \mid \widehat{\rho}_{ij}^{\lambda'} \rangle_{\widehat{G}} \overline{\rho_{ji}^\lambda(g)} \\ &= \sum_{\lambda, i, j} \frac{d_\lambda}{|G|} \text{tr} \left(\widehat{f}(\lambda) e_{ji}^\lambda \right) \overline{\rho_{ji}^\lambda(g)} = \sum_{\lambda} \frac{d_\lambda}{|G|} \text{tr} \left(\widehat{f}(\lambda) (\rho^\lambda(g))^* \right). \end{aligned} \quad (4)$$

C'est l'exact analogue de la décomposition de Fourier $f(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e_k(\theta)$. D'autre part, en termes de G -représentations, chaque espace $\text{End}(V^\lambda)$ est la somme directe de d_λ copies de V^λ , la décomposition correspondant à l'écriture d'une matrice carrée comme suite de vecteurs colonnes de V^λ ; on retrouve ainsi l'isomorphisme $\mathbb{C}[G] \simeq \bigoplus_{\lambda \in \widehat{G}} d_\lambda V^\lambda$, rendu concret par la transformée de Fourier.

Supposons f invariante sur les *classes de conjugaison* de G , c'est-à-dire que $f(h^{-1}gh) = f(g)$ pour tout $g, h \in G$. Ceci est équivalent au fait que, pour tout autre fonction $k \in \mathbb{C}[G]$,

$$f * k = \sum_{g, h \in G} f(g)k(h)gh = \sum_{g, h \in G} f(h^{-1}gh)k(h)hh^{-1}gh = \sum_{h, g' \in G} k(h)f(g')hg' = k * f.$$

Autrement dit, f appartient au *centre* de $\mathbb{C}[G]$. Comme la transformée de Fourier est un isomorphisme d'algèbres, ce centre $Z(\mathbb{C}[G])$ est envoyé sur le centre de $\bigoplus_{\lambda \in \widehat{G}} \text{End}(V^\lambda)$, qui est la somme directe des espaces de matrices scalaires $\bigoplus_{\lambda \in \widehat{G}} \text{Cid}_{V^\lambda}$. On en déduit :

Théorème 4. *Le nombre de représentations irréductibles non isomorphes de G est le nombre de classes de conjugaison de G . De plus, une base orthonormale du centre de $\mathbb{C}[G]$ est constituée des caractères irréductibles $\text{ch}^\lambda(g) = \text{tr} \rho^\lambda(g)$.*

Démonstration. Si f est invariante sur les classes de conjugaison, elle s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des classes

$$C(g) = \sum_{g' = h^{-1}gh} g',$$

donc $\dim Z(\mathbb{C}[G])$ est le nombre de classes de conjugaison. C'est aussi le nombre de représentations irréductibles d'après la discussion précédente.

Si $f \in Z(\mathbb{C}[G])$, $\widehat{f}(\lambda) = c_\lambda \text{id}_{V^\lambda}$ pour certains coefficients c_λ , donc d'après (4), f est combinaison linéaire des fonctions $\text{tr}(\rho^\lambda(g))^* = \overline{\text{ch}^\lambda(g)}$. Comme $Z(\mathbb{C}[G])$ est invariant par conjugaison complexe, on en déduit que $(\text{ch}^\lambda)_{\lambda \in \widehat{G}}$ est une base de $Z(\mathbb{C}[G])$, et le caractère orthonormé découle de $\text{ch}^\lambda = \sum_{i=1}^{d_\lambda} \rho_{ii}^\lambda$ et du théorème 3. \square

Exercice. En admettant la relation

$$\langle \rho_{ij}^\lambda \mid \rho_{kl}^\mu \rangle_G = \frac{\delta_{\lambda\mu} \delta_{ij} \delta_{kl}}{d_\lambda},$$

démontrer le reste du théorème 3 (indication : le point difficile est le caractère isométrique de la transformée de Fourier. On pourra exprimer les produits scalaires sur $\mathbb{C}[G]$ et $\mathbb{C}[\widehat{G}]$ en termes des caractères de ces représentations, et utiliser le fait que la transformée de Fourier est un isomorphisme de représentations, donc conserve les caractères).

3. REPRÉSENTATIONS DES GROUPES SYMÉTRIQUES

On revient maintenant au cas du groupe symétrique $\mathfrak{S}(N)$. Rappelons que toute permutation de taille N s'écrit de manière unique comme produit de cycles à supports disjoints

$$\sigma = (a_1, \dots, a_{\mu_1})(a_{\mu_1+1}, \dots, a_{\mu_1+\mu_2}) \cdots (a_{\mu_1+\dots+\mu_{r-1}+1}, \dots, a_N).$$

Si l'on conjugue σ par une autre permutation τ , on ne change pas les longueurs des cycles, car

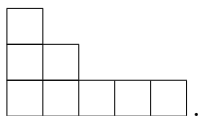
$$\tau \sigma \tau^{-1} = (\tau(a_1), \dots, \tau(a_{\mu_1}))(\tau(a_{\mu_1+1}), \dots, \tau(a_{\mu_1+\mu_2})) \cdots (\tau(a_{\mu_1+\dots+\mu_{r-1}+1}), \dots, \tau(a_N)).$$

Les classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}(N)$ sont donc les classes de permutations avec mêmes longueurs pour les cycles, ces longueurs formant une suite d'entiers positifs $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ qu'on peut supposer décroissante (en permutant l'ordre des cycles). On appelle *partition* de taille N une telle suite μ décroissante d'entiers positifs de somme N . Par exemple, $(3, 3, 2)$ est une partition de taille 8, et $(1, 3, 6)(4, 5, 7)(2, 8)$ est une permutation avec ce type dans $\mathfrak{S}(8)$. On notera $\mathfrak{P}(N)$ l'ensemble des partitions de taille N ; par exemple,

$$\mathfrak{P}(5) = \{(5), (4, 1), (3, 2), (3, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1)\}.$$

D'après la section précédente, il existe une bijection entre $\mathfrak{P}(N)$ et l'ensemble $\widehat{\mathfrak{S}}(N)$ des représentations irréductibles de $\mathfrak{S}(N)$.

3.1. Construction des représentations irréductibles de $\mathfrak{S}(N)$. On représente habituellement les partitions par leurs *diagrammes de Young* : le diagramme de Young de $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ est la tableau avec μ_1 cases sur la première ligne, μ_2 cases sur la seconde ligne, *etc.* Ainsi, le diagramme de Young de $\mu = (5, 2, 1)$ est



Un *tableau standard* de forme $\mu \in \mathfrak{P}(N)$ est un remplissage des cases de μ par les nombres de 1 à N , chaque ligne et chaque colonne étant strictement croissante. Par exemple, les tableaux standards de forme $(3, 2)$ sont

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 5 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} ; \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} ; \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} ; \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}.$$

Étant donné un tableau standard de forme μ , on note $\Delta_T(x_1, \dots, x_N)$ le polynôme qui s'écrit comme le produit sur chaque colonne des produits $\prod_{i < j \in C} (x_i - x_j)$. Par exemple, les tableaux précédents correspondent aux polynômes :

$$(x_1 - x_2)(x_3 - x_4) ; (x_1 - x_2)(x_3 - x_5) ; (x_1 - x_3)(x_2 - x_4) ; (x_1 - x_3)(x_2 - x_5) ; (x_1 - x_4)(x_2 - x_5).$$

Théorème 5 (Frobenius, Schur, Specht). *Pour $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathfrak{P}(N)$, notons S^λ l'espace vectoriel engendré par les polynômes Δ_T , T parcourant l'ensemble des tableaux standard de forme λ . Cet espace de polynômes est stable par permutation des variables, et constitue une représentation irréductible de $\mathfrak{S}(N)$. Toutes les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}(N)$ sont de ce type, et deux à deux non isomorphes.*

Exemple. Pour $N = 3$, avec les notations de la section précédente, on voit facilement que $V_1 = S^{(3)}$, $V_2 = S^{(1,1,1)}$ et $V_3 = S^{(2,1)}$.

3.2. Calcul des caractères irréductibles de $\mathfrak{S}(N)$. Une conséquence du théorème 5 est que la dimension de S^λ est le nombre de tableaux standards de forme λ , et que $n!$ est la somme des carrés de ces nombres. Il existe de nombreuses autres formules combinatoires autour de ces représentations, en particulier pour calculer les caractères ; ainsi, on peut toujours écrire un caractère $\text{ch}^\lambda(\sigma)$ comme une somme sur certains tableaux de forme λ (*règle de Murnaghan-Nakayama*). Dans la suite, on aura seulement besoin de savoir calculer

$$\text{ch}^\lambda(\text{id}) = \text{tr}(\text{id}_{S^\lambda}) = \dim S^\lambda = d_\lambda$$

et $\text{ch}^\lambda(\tau)$, où τ est une transposition. Comme les valeurs des caractères sont constantes sur chaque classe de conjugaison, on peut supposer que $\tau = (1, 2)$. La règle est alors la suivante :

Théorème 6. *Si T est un tableau standard, notons $\varepsilon(T) = +1$ si 2 apparaît sur la première ligne de T , et $\varepsilon(T) = -1$ si 2 apparaît sur la seconde ligne de T . Alors,*

$$\begin{aligned} \text{ch}^\lambda(1, 2) &= \sum_{\substack{T \text{ tableau standard} \\ \text{de forme } \lambda}} \varepsilon(T) \\ &= \frac{d_\lambda}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} \lambda_i (\lambda_i - 2i + 1). \end{aligned}$$

En particulier, $-d_\lambda \leq \text{ch}^\lambda(1, 2) \leq d_\lambda$. La première inégalité est une égalité si et seulement si la première ligne de λ ne contient qu'une case, ce qui n'est possible que si $\lambda = 1^N$; ceci correspond à la représentation signature de $\mathfrak{S}(N)$. La seconde inégalité n'est une égalité que si $\lambda = (N)$ a une seule ligne, ce qui correspond à la représentation triviale de $\mathfrak{S}(N)$. Dans les autres cas, on peut montrer assez facilement sur la seconde expression que $\frac{\text{ch}^\lambda(1,2)}{d_\lambda}$ décroît si l'on remplace deux lignes consécutives $(\lambda_i, \lambda_{i+1})$ de la partition λ

par $(\lambda_i - 1, \lambda_{i+1} + 1)$. Par conséquent, la partition $\lambda \neq (N)$ qui donne la valeur maximale de $\frac{\text{ch}^\lambda(1,2)}{d_\lambda}$ est $(N-1, 1)$, avec dans ce cas

$$\frac{\text{ch}^\lambda(1,2)}{d_\lambda} = \frac{1}{N(N-1)}((N-1)(N-2) - 1(2)) = \frac{N-3}{N-1}.$$

3.3. Résolution de l'équation de la chaleur pour $\mathfrak{S}(N)$. Revenons finalement au problème initial de permutations aléatoires dont les lois suivent l'équation de la chaleur pour $\mathfrak{S}(N)$:

$$f_{n+1} = f_n \left(\frac{1}{N} \text{id} + \frac{1}{N^2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} (i, j) \right).$$

On a $f_n = (f)^n$, où $f = \frac{1}{N} \text{id} + \frac{1}{N^2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} (i, j) = \frac{1}{N} C_{\text{id}} + \frac{2}{N^2} C_{(1,2)}$ est une combinaison linéaire de classes de conjugaison, donc appartient au centre de l'algèbre du groupe symétrique. D'après le théorème 4, on peut donc décomposer f_n en combinaison linéaire des caractères irréductibles de $\mathfrak{S}(N)$:

$$\begin{aligned} f_n(\sigma) &= \sum_{\lambda \in \mathfrak{P}(N)} \langle (f)^n | \text{ch}^\lambda \rangle_G \text{ch}^\lambda(\sigma) = \sum_{\lambda \in \mathfrak{P}(N)} \langle (\widehat{f})^n | \widehat{\text{ch}}^\lambda \rangle_{\widehat{G}} \text{ch}^\lambda(\sigma) \\ &= \frac{1}{N!} \sum_{\lambda \in \mathfrak{P}(N)} \text{tr} \left((\widehat{f}(\lambda))^n \right) \text{ch}^\lambda(\sigma) \end{aligned}$$

car $\widehat{\text{ch}}^\lambda = |G| \frac{I_\lambda}{d_\lambda}$. Il est ici utile d'introduire le caractère normalisé $\chi^\lambda(\sigma) = \frac{\text{ch}^\lambda(\sigma)}{d_\lambda}$. Alors,

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\lambda) &= \left(\text{tr} \widehat{f}(\lambda) \right) \frac{I_\lambda}{d_\lambda} = \left(\frac{1}{N} + \frac{N-1}{N} \chi^\lambda(1,2) \right) I_\lambda \\ (\widehat{f}(\lambda))^n &= \left(\frac{1}{N} + \frac{N-1}{N} \chi^\lambda(1,2) \right)^n I_\lambda, \end{aligned}$$

donc :

Théorème 7. *La loi f_n s'écrit :*

$$f_n(\sigma) = \sum_{\lambda \in \mathfrak{P}(N)} \frac{(d_\lambda)^2}{N!} \left(\frac{1}{N} + \frac{N-1}{N} \chi^\lambda(1,2) \right)^n \chi^\lambda(\sigma).$$

D'après la discussion du paragraphe précédent, le coefficient $c_\lambda = \frac{1}{N} + \frac{N-1}{N} \chi^\lambda(1,2)$ vaut 1 si et seulement si $\lambda = (N)$ (correspondant à la représentation triviale de $\mathfrak{S}(N)$ sur \mathbb{C}), et a sinon ses valeurs comprises entre

$$\frac{1}{N} - \frac{N-1}{N} = - \left(1 - \frac{2}{N} \right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{N} + \frac{N-1}{N} \frac{N-3}{N-1} = 1 - \frac{2}{N}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \left| f_n(\sigma) - \frac{1}{N!} \right| &= \left| \sum_{\lambda \neq (N)} \frac{(d_\lambda)^2 \chi^\lambda(\sigma)}{N!} (c_\lambda)^n \right| \\ &\leq \left| \sum_{\lambda \neq (N)} \frac{(d_\lambda)^2}{N!} \right| \left(1 - \frac{2}{N} \right)^n \leq \left(1 - \frac{2}{N} \right)^n \leq e^{-\frac{2n}{N}}, \end{aligned}$$

donc il faut de l'ordre de $O(N)$ étapes pour que la *distance locale* $\sup_{\sigma \in \mathfrak{S}(N)} |f_n(\sigma) - \frac{1}{N!}|$ entre f_n et la loi uniforme $\frac{1}{N!}$ devienne petite. Une quantité plus fine pour évaluer la convergence est la *distance en variation totale* $d(f_n, \frac{1}{N!}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(N)} |f_n(\sigma) - \frac{1}{N!}|$. Par Cauchy-Schwartz et en utilisant l'orthogonalité des caractères irréductibles, on peut écrire :

$$d\left(f_n, \frac{1}{N!}\right)^2 \leq N! \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \left| f_n(\sigma) - \frac{1}{N!} \right|^2 = \sum_{\lambda \neq (N)} (d_\lambda)^2 (c_\lambda)^{2n}.$$

Dans la somme à droite, on peut montrer que les termes importants sont ceux avec $|c_\lambda|$ maximal (ce n'est pas évident car le nombre de termes dans la somme dépend de N , et il y en a énormément), c'est-à-dire pour $\lambda = (N-1, 1)$ et $\lambda = 1^N$, qui ont dimension $(N-1)$ et 1. Ainsi, cette somme se comporte essentiellement comme

$$N^2 \left(1 - \frac{2}{N} \right)^{2n} \simeq N^2 \exp\left(-\frac{4n}{N}\right).$$

Il faut donc de l'ordre de $\frac{1}{2} N \log N$ étapes pour que cette distance en variation totale devienne petite. On peut montrer que plus précisément, la distance en variation totale reste très proche de 2 avant le temps $n = \frac{1}{2} N \log N$, et devient très petite immédiatement après ce temps de coupure.