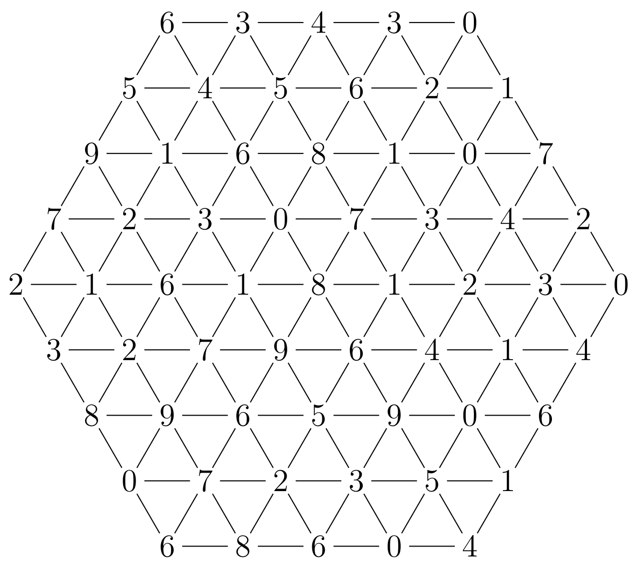
Coloriages propres d'un graphe

Soit $G = (V, E)$ un graphe fini, c'est-à-dire un ensemble fini $V = \{v_1, \dots, v_m\}$ de *sommets* et un ensemble $E \subset \{\{x, y\} \mid x, y \in V,\ x \neq y\}$ de paires de sommets $e = \{x, y\}$ appelées *arêtes*. On fixe également $N \geq 1$ un entier. Un N-*coloriage* des sommets de G est une application $c : V \to [\![1, N]\!]$ qui associe à tout sommet v une couleur $1 \leq c(v) \leq N$. Le coloriage c est dit *propre* si deux sommets voisins du graphe n'ont pas la même couleur : pour toute arête $e = \{x, y\} \in E$, $c(x) \neq c(y)$. On a par exemple représenté ci-dessus un 10-coloriage propre d'un graphe qui est une partie du réseau triangulaire :



L'objectif du devoir est d'étudier une chaîne de Markov sur l'ensemble $\mathrm{CP}(G, N)$ des N-coloriages propres d'un graphe G.

1 Préliminaires

Le degré d'un sommet $v \in V$ d'un graphe G est son nombre de voisins :

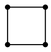
$$\deg v = \operatorname{card} \{w \in V \mid \{v, w\} \in E\}.$$

Le degré du graphe G est défini par $\deg G = \max_{v \in V}(\deg v)$; ainsi, $\deg G = 6$ dans l'exemple précédent.

1. On suppose que $\deg G < N$, et on souhaite montrer que dans ce cas, il existe un N-coloriage propre de G. Pour construire un tel coloriage, on propose l'algorithme suivant. On énumère les $m = \operatorname{card} V$ sommets du graphe par les entiers de 1 à m, et on attribue au sommet 1 une couleur $c(1)$ choisie aléatoirement uniformément dans $[\![1, N]\!]$. Si les i premiers sommets ont été coloriés, pour le sommet $i + 1$, on retire de l'ensemble $[\![1, N]\!]$ toutes les couleurs $c(j)$ avec $j \leq i$ et j voisin de $i + 1$ dans le graphe :

$$C_{i+1} = [\![1, N]\!] \setminus \{c(j),\ j \leq i \text{ et } \{i + 1, j\} \in E\}.$$

On choisit alors la couleur $c(i+1)$ aléatoirement uniformément dans C_{i+1}. On poursuit cet algorithme jusqu'au dernier sommet m du graphe. Expliquer pourquoi l'algorithme fournit bien avec probabilité 1 un N-coloriage propre du graphe.

2. On suppose que $N = 3$ et que $G =$  est le carré. Montrer que l'ensemble $\mathrm{CP}(G, 3)$ contient exactement 18 coloriages propres, et calculer la probabilité de chacun de ces coloriages pour l'algorithme précédemment décrit. Montrer que tous les coloriages propres peuvent être atteints, mais que leur distribution n'est pas uniforme dans $\mathrm{CP}(G, 3)$ pour l'algorithme ci-dessus.

3. Dans `Sage`, écrire un programme `ColoriagePropre(G,N)` qui prend en argument un graphe G et un entier N, et qui construit un N-coloriage propre de G (en supposant $N > \deg G$). On pourra consulter la documentation de Sage relative à la théorie des graphes. Le résultat du programme pourra par exemple être donné sous la forme d'un dictionnaire dont les entrées sont les sommets de G, et donc la valeur pour une entrée v est la couleur $c(v)$. Fournir un exemple non-trivial de graphe et de coloriage propre de celui-ci (par exemple, on pourra prendre comme graphe une grille de taille 10×10, obtenue avec la commande `graphs.GridGraph([10,10])`, et construire un 6-coloriage propre de celle-ci).

4. Proposer un exemple de graphe G qui admet un N-coloriage propre, mais tel que $N \leq \deg G$.

2 Dynamique de Glauber sur les coloriages propres

Dans ce qui suit, le graphe G est fixé ainsi que l'entier N ; on suppose maintenant $N \geq \deg(G)+2$. Si $v \in V$ et c est un N-coloriage propre de V, l'*ensemble des couleurs possibles* pour v relativement à c est défini par :

$$E_{c,v} = \{k \in [\![1, N]\!],\ k \text{ n'appartient pas à l'ensemble des couleurs } c(w) \text{ avec } w \text{ voisin de } v\}.$$

Par définition d'un coloriage propre, $c(v) \in E_{c,v}$ pour tout sommet $v \in V$. L'objectif du reste du devoir est de construire un N-coloriage propre aléatoire C de G sous la loi uniforme

$$\mathbb{P}[C = c] = \frac{1}{\mathrm{card}\,\mathrm{CP}(G, N)} \quad \text{pour tout } c \in \mathrm{CP}(G, N).$$

La dynamique de Glauber sur $\mathrm{CP}(G, N)$ est la chaîne de Markov dont l'espace des états est $\mathrm{CP}(G, N)$, et dont les probabilités de transitions sont les suivantes. Si c est un N-coloriage propre de G, on définit $P(c, d)$ par :

$$P(c,d) = \begin{cases} 0 & \text{si } c \text{ et } d \text{ diffèrent en strictement plus d'un sommet } v \in V, \\ \frac{1}{\mathrm{card}\,V \times \mathrm{card}\,E_{c,v}} & \text{si } c \text{ et } d \text{ diffèrent uniquement en } v, \text{ et si } d(v) \in E_{c,v}, \\ \frac{1}{\mathrm{card}\,V} \sum_{v \in V} \frac{1}{\mathrm{card}\,E_{c,v}} & \text{si } c = d. \end{cases}$$

5. Pour $k \in [\![1, \mathrm{card}\,E_{c,v}]\!]$, on note $e_{c,v,k}$ le k-ième entier de l'ensemble $E_{c,v}$, les entiers étant classés dans l'ordre croissant. Ainsi, $E_{c,v} = \{e_{c,v,1} \leq e_{c,v,2} \leq \cdots \leq e_{c,v,\mathrm{card}\,E_{c,v}}\}$. On considère deux suites de variables aléatoires indépendantes $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$:
   - les V_n sont des variables aléatoires à valeurs dans V, de distribution uniforme ;
   - les U_n sont des variables aléatoires uniformes dans $[0, 1]$.

   On définit ensuite par récurrence une suite aléatoire $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathrm{CP}(G, N)$:

— $C_0 = c$ est un N-coloriage propre arbitraire dans $\mathrm{CP}(G, N)$.

— si C_n est construit, pour obtenir C_{n+1}, on garde les mêmes couleurs $C_{n+1}(v) = C_n(v)$ pour tout $v \neq V_n$, et en $v = V_n$, on choisit

$$C_{n+1}(V_n) = e_{C_n, V_n, a(U_n, \mathrm{card}\, E_{C_n, V_n})},$$

où a est n'importe quelle fonction mesurable $[0, 1] \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que, si U est uniforme sur $[0, 1]$, alors $a(U, k)$ est uniforme dans $\{1, 2, \ldots, k\}$ (on peut par exemple prendre $a(U, k) = \lceil Uk \rceil$).

Montrer que $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $\mathrm{CP}(G, N)$ de matrice de transition P.

6. Soit c et d deux coloriages propres arbitraires de $\mathrm{CP}(G, N)$. On suppose $c \neq d$, et on numérote les sommets du graphe par les entiers $1, 2, \ldots, m$. On note k le plus petit entier tel que $c(k) \neq d(k)$, et
$$I = \{l > k \mid c(l) = d(k)\}.$$
En utilisant l'hypothèse $N \geq \deg(G) + 2$, montrer qu'il existe un N-coloriage propre c' de G avec les propriétés suivantes :
   — $c'(j) = c(j) = d(j)$ pour tout $j < k$;
   — $c'(l) \neq d(k)$ pour tout $l \in I$;
   — $c'(k) = d(k)$;
   — c' est obtenu à partir de c en effectuant $\mathrm{card}\, I + 1$ transitions de la chaîne de Markov.

   En déduire que la chaîne de Markov $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est irréductible et apériodique sur l'ensemble $\mathrm{CP}(G, N)$.

7. Montrer que la mesure uniforme sur $\mathrm{CP}(G, N)$ est réversible pour la chaîne de Markov. Que peut-on en déduire sur la distribution de C_n pour n grand ?

8. Écrire un programme `ColoriageMarkov(G,N,n)` qui prend en argument un graphe G, un entier $N \geq \deg(G) + 2$ et un autre entier $n \geq 0$, et qui construit le n-ième coloriage N-propre C_n, le coloriage C_0 initial étant obtenu à l'aide de l'algorithme "naïf" `ColoriagePropre(G,N)`. Fournir un exemple non-trivial (par exemple avec la grille 10×10, $N = 6$ et $n = 1000$).

3 Vitesse de convergence de la chaîne de Markov

On souhaite maintenant évaluer la distance entre la distribution de C_n et la distribution uniforme sur $\mathrm{CP}(G, N)$. On supposera dans tout ce qui suit $N > 2 \deg(G)$, ce qui est plus fort que les hypothèses précédentes. On notera $m = \mathrm{card}\, V$. Si c et d sont deux N-coloriages propres, on définit $\rho(c, d)$ comme le plus petit $r \geq 0$ tel que $c = c_0$, $d = c_r$ et il existe des N-coloriages propres $c_1, \ldots, c_{r-1}$ avec $P(c_0, c_1) > 0$, $P(c_1, c_2) > 0$, *etc.* jusqu'à $P(c_{r-1}, c_r) > 0$. C'est donc le plus petit nombre de transitions nécessaires pour passer de c à d avec la chaîne de Markov. Deux N-coloriages propres diffèrent en exactement un site si et seulement si $\rho(c, d) = 1$.

Si μ et ν sont deux mesures de probabilité sur $\mathrm{CP}(G, N)$, on rappelle qu'un *couplage* entre μ et ν est une loi M sur $\mathrm{CP}(G, N) \times \mathrm{CP}(G, N)$ telle que, si $(C, D) \sim M$, alors $C \sim \mu$ et $D \sim \nu$. On définit :

$$R(\mu, \nu) = \inf_{M \text{ couplage entre } \mu \text{ et } \nu} \left(\sum_{c, d \in \mathrm{CP}(G,N)} M(c, d)\, \rho(c, d) \right).$$

Il n'est pas très difficile de montrer que R est une distance entre les lois sur $\mathrm{CP}(G,N)$, et en particulier vérifie l'inégalité triangulaire ; on admettra ce fait. La définition est à comparer avec celle de la distance en variation totale, qui est donnée par :

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu,\nu) = \frac{1}{2}\sum_{c\in \mathrm{CP}(G,N)} |\mu(c)-\nu(c)| = \inf_{M \text{ couplage entre } \mu \text{ et } \nu} \left(\sum_{c,d\in \mathrm{CP}(G,N)} M(c,d)\, 1_{c\neq d}\right).$$

9. Expliquer pourquoi les deux bornes inférieures ci-dessus sont atteintes. Montrer que $d_{\mathrm{TV}}(\mu,\nu) \leq R(\mu,\nu)$.

10. (Difficile). Montrer que si $k \geq 1$ est fixé, alors on peut choisir la fonction de deux variables a telle que, avec U uniforme sur $[0,1]$,

$$\mathbb{P}[a(U,k) \neq a(U,k+1)] \leq \frac{1}{k+1}.$$

Soit c et d deux N-coloriages propres qui diffèrent uniquement en un sommet $v \in V$. Montrer que si l'on choisit les mêmes variables $V_0 \in V$ et $U_0 \in [0,1]$ pour construire c' sous la loi $P(c,\cdot)$ et d' sous la loi $P(d,\cdot)$, alors, en choisissant la fonction a pour un certain entier k,

$$\mathbb{E}[\rho(c',d')] \leq 1 - \frac{1}{m}\left(\frac{N-2\deg G}{N-\deg G}\right).$$

On pourra évaluer $\rho(c',d')$ suivant que $V_0 = v$, V_0 n'est pas voisin de v, ou V_0 est voisin de v. En déduire que $R(P(c,\cdot),P(d,\cdot)) \leq 1 - \frac{1}{m}\left(\frac{N-2\deg G}{N-\deg G}\right)$.

11. Soit c et d deux N-coloriages propres arbitraires de G (pas forcément à distance 1 pour ρ). Montrer que

$$R(P(c,\cdot),P(d,\cdot)) \leq \left(1 - \frac{1}{m}\left(\frac{N-2\deg G}{N-\deg G}\right)\right)\rho(c,d).$$

On notera dans ce qui $M_{c,d}$ un couplage optimal entre $P(c,\cdot)$ et $P(d,\cdot)$ tel que $R(P(c,\cdot),P(d,\cdot)) = \sum_{c',d'\in \mathrm{CP}(G,N)} M_{c,d}(c',d')\,\rho(c',d')$.

12. Soit μ et ν deux mesures de probabilité sur $\mathrm{CP}(G,N)$, et $M_{\mu,\nu}$ un couplage optimal entre μ et ν tel que $R(\mu,\nu) = \sum_{c,d\in \mathrm{CP}(G,N)} M_{\mu,\nu}(c,d)\,\rho(c,d)$. Montrer que

$$\sum_{c,d\in \mathrm{CP}(G,N)} M_{\mu,\nu}(c,d)\, M_{c,d}(\cdot,\cdot)$$

est un couplage entre les lois μP et νP. En déduire que

$$R(\mu P,\nu P) \leq \left(1 - \frac{1}{m}\left(\frac{N-2\deg G}{N-\deg G}\right)\right) R(\mu,\nu).$$

13. Conclure que si μ_n est la loi de C_n et μ_∞ est la loi uniforme sur $\mathrm{CP}(G,N)$, alors

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu_n,\mu_\infty) \leq K\,\left(1 - \frac{1}{m}\left(\frac{N-2\deg G}{N-\deg G}\right)\right)^n$$

pour une certaine constante K (bonus : montrer qu'on peut prendre $K \leq \frac{m(m+1)}{2}$).