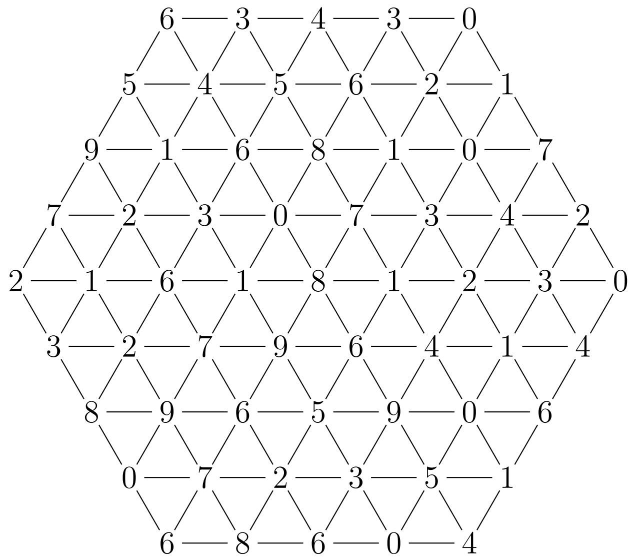
Coloriages propres d'un graphe

Soit $G = (V, E)$ un graphe fini, c'est-à-dire un ensemble fini $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ de *sommets* et un ensemble $E \subset \{\{x, y\} \mid x, y \in V,\ x \neq y\}$ de paires de sommets $e = \{x, y\}$ appelées *arêtes*. On fixe également $N \geq 1$ un entier. Un N-*coloriage* des sommets de G est une application $c : V \to [\![1, N]\!]$ qui associe à tout sommet v une couleur $1 \leq c(v) \leq N$. Le coloriage c est dit *propre* si deux sommets voisins du graphe n'ont pas la même couleur : pour toute arête $e = \{x, y\} \in E$, $c(x) \neq c(y)$. On a par exemple représenté ci-dessus un 10-coloriage propre d'un graphe qui est une partie du réseau triangulaire :



L'objectif du devoir est d'étudier une chaîne de Markov sur l'ensemble $\mathrm{CP}(G, N)$ des N-coloriages propres d'un graphe G.

1 Préliminaires

Le degré d'un sommet $v \in V$ d'un graphe G est son nombre de voisins :

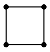
$$\deg v = \mathrm{card}\, \{w \in V \mid \{v, w\} \in E\}.$$

Le degré du graphe G est défini par $\deg G = \max_{v \in V}(\deg v)$; ainsi, $\deg G = 6$ dans l'exemple précédent.

1. On suppose que $\deg G < N$, et on souhaite montrer que dans ce cas, il existe un N-coloriage propre de G. Pour construire un tel coloriage, on propose l'algorithme suivant. On énumère les $m = \mathrm{card}\, V$ sommets du graphe par les entiers de 1 à m, et on attribue au sommet 1 une couleur $c(1)$ choisie aléatoirement uniformément dans $[\![1, N]\!]$. Si les i premiers sommets ont été coloriés, pour le sommet $i + 1$, on retire de l'ensemble $[\![1, N]\!]$ toutes les couleurs $c(j)$ avec $j \leq i$ et j voisin de $i + 1$ dans le graphe :

$$C_{i+1} = [\![1, N]\!] \setminus \{c(j),\ j \leq i \text{ et } \{i + 1, j\} \in E\}.$$

On choisit alors la couleur $c(i+1)$ aléatoirement uniformément dans C_{i+1}. On poursuit cet algorithme jusqu'au dernier sommet m du graphe. Expliquer pourquoi l'algorithme fournit bien avec probabilité 1 un N-coloriage propre du graphe.

2. On suppose que $N = 3$ et que $G =$  est le carré. Montrer que l'ensemble $\mathrm{CP}(G, 3)$ contient exactement 18 coloriages propres, et calculer la probabilité de chacun de ces coloriages pour l'algorithme précédemment décrit. Montrer que tous les coloriages propres peuvent être atteints, mais que leur distribution n'est pas uniforme dans $\mathrm{CP}(G, 3)$ pour l'algorithme ci-dessus.

3. Dans `Sage`, écrire un programme `ColoriagePropre(G,N)` qui prend en argument un graphe G et un entier N, et qui construit un N-coloriage propre de G (en supposant $N > \deg G$). On pourra consulter la documentation de Sage relative à la théorie des graphes. Le résultat du programme pourra par exemple être donné sous la forme d'un dictionnaire dont les entrées sont les sommets de G, et donc la valeur pour une entrée v est la couleur $c(v)$. Fournir un exemple non-trivial de graphe et de coloriage propre de celui-ci (par exemple, on pourra prendre comme graphe une grille de taille 10×10, obtenue avec la commande `graphs.GridGraph([10,10])`, et construire un 6-coloriage propre de celle-ci).

4. Proposer un exemple de graphe G qui admet un N-coloriage propre, mais tel que $N \leq \deg G$.

2 Dynamique de Glauber sur les coloriages propres

Dans ce qui suit, le graphe G est fixé ainsi que l'entier N ; on suppose maintenant $N \geq \deg(G) + 2$. Si $v \in V$ et c est un N-coloriage propre de V, l'*ensemble des couleurs possibles* pour v relativement à c est défini par :

$$E_{c,v} = \{k \in [\![1, N]\!],\ k \text{ n'appartient pas à l'ensemble des couleurs } c(w) \text{ avec } w \text{ voisin de } v\}.$$

Par définition d'un coloriage propre, $c(v) \in E_{c,v}$ pour tout sommet $v \in V$. L'objectif du reste du devoir est de construire un N-coloriage propre aléatoire C de G sous la loi uniforme

$$\mathbb{P}[C = c] = \frac{1}{\operatorname{card} \mathrm{CP}(G, N)} \quad \text{pour tout } c \in \mathrm{CP}(G, N).$$

La dynamique de Glauber sur $\mathrm{CP}(G, N)$ est la chaîne de Markov dont l'espace des états est $\mathrm{CP}(G, N)$, et dont les probabilités de transitions sont les suivantes. Si c est un N-coloriage propre de G, on définit $P(c, d)$ par :

$$P(c,d) = \begin{cases} 0 & \text{si } c \text{ et } d \text{ diffèrent en strictement plus d'un sommet } v \in V, \\ \frac{1}{\operatorname{card} V \times \operatorname{card} E_{c,v}} & \text{si } c \text{ et } d \text{ diffèrent uniquement en } v, \text{ et si } d(v) \in E_{c,v}, \\ \frac{1}{\operatorname{card} V} \sum_{v \in V} \frac{1}{\operatorname{card} E_{c,v}} & \text{si } c = d. \end{cases}$$

5. Pour $k \in [\![1, \operatorname{card} E_{c,v}]\!]$, on note $e_{c,v,k}$ le k-ième entier de l'ensemble $E_{c,v}$, les entiers étant classés dans l'ordre croissant. Ainsi, $E_{c,v} = \{e_{c,v,1} \leq e_{c,v,2} \leq \cdots \leq e_{c,v,\operatorname{card} E_{c,v}}\}$. On considère deux suites de variables aléatoires indépendantes $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$:
   — les V_n sont des variables aléatoires à valeurs dans V, de distribution uniforme ;
   — les U_n sont des variables aléatoires uniformes dans $[0, 1]$.

   On définit ensuite par récurrence une suite aléatoire $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathrm{CP}(G, N)$:

— $C_0 = c$ est un N-coloriage propre arbitraire dans $\mathrm{CP}(G,N)$.

— si C_n est construit, pour obtenir C_{n+1}, on garde les mêmes couleurs $C_{n+1}(v) = C_n(v)$ pour tout $v \neq V_n$, et en $v = V_n$, on choisit

$$C_{n+1}(V_n) = e_{C_n, V_n, a(U_n, \mathrm{card}\, E_{C_n,V_n})},$$

où a est n'importe quelle fonction mesurable $[0,1] \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que, si U est uniforme sur $[0,1]$, alors $a(U,k)$ est uniforme dans $\{1,2,\dots,k\}$ (on peut par exemple prendre $a(U,k) = \lceil Uk \rceil$).

Montrer que $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $\mathrm{CP}(G,N)$ de matrice de transition P.

6. Soit c et d deux coloriages propres arbitraires de $\mathrm{CP}(G,N)$. On suppose $c \neq d$, et on numérote les sommets du graphe par les entiers $1,2,\dots,m$. On note k le plus petit entier tel que $c(k) \neq d(k)$, et
$$I = \{l > k \mid c(l) = d(k)\}.$$
En utilisant l'hypothèse $N \geq \deg(G) + 2$, montrer qu'il existe un N-coloriage propre c' de G avec les propriétés suivantes :
   — $c'(j) = c(j) = d(j)$ pour tout $j < k$;
   — $c'(l) \neq d(k)$ pour tout $l \in I$;
   — $c'(k) = d(k)$;
   — c' est obtenu à partir de c en effectuant $\mathrm{card}\, I + 1$ transitions de la chaîne de Markov.

   En déduire que la chaîne de Markov $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est irréductible et apériodique sur l'ensemble $\mathrm{CP}(G,N)$.

7. Montrer que la mesure uniforme sur $\mathrm{CP}(G,N)$ est réversible pour la chaîne de Markov. Que peut-on en déduire sur la distribution de C_n pour n grand ?

8. Écrire un programme `ColoriageMarkov(G,N,n)` qui prend en argument un graphe G, un entier $N \geq \deg(G) + 2$ et un autre entier $n \geq 0$, et qui construit le n-ième coloriage N-propre C_n, le coloriage C_0 initial étant obtenu à l'aide de l'algorithme "naïf" `ColoriagePropre(G,N)`. Fournir un exemple non-trivial (par exemple avec la grille 10×10, $N = 6$ et $n = 1000$).

3 Vitesse de convergence de la chaîne de Markov

On souhaite maintenant évaluer la distance entre la distribution de C_n et la distribution uniforme sur $\mathrm{CP}(G,N)$. On supposera dans tout ce qui suit $N > 2\deg(G)$, ce qui est plus fort que les hypothèses précédentes. On notera $m = \mathrm{card}\, V$. Si c et d sont deux N-coloriages propres, on définit $\rho(c,d)$ comme le plus petit $r \geq 0$ tel que $c = c_0$, $d = c_r$ et il existe des N-coloriages propres $c_1,\dots,c_{r-1}$ avec $P(c_0,c_1) > 0$, $P(c_1,c_2) > 0$, *etc.* jusqu'à $P(c_{r-1},c_r) > 0$. C'est donc le plus petit nombre de transitions nécessaires pour passer de c à d avec la chaîne de Markov. Deux N-coloriages propres diffèrent en exactement un site si et seulement si $\rho(c,d) = 1$.

Si μ et ν sont deux mesures de probabilité sur $\mathrm{CP}(G,N)$, on rappelle qu'un *couplage* entre μ et ν est une loi M sur $\mathrm{CP}(G,N) \times \mathrm{CP}(G,N)$ telle que, si $(C,D) \sim M$, alors $C \sim \mu$ et $D \sim \nu$. On définit :

$$R(\mu,\nu) = \inf_{M \text{ couplage entre } \mu \text{ et } \nu} \left(\sum_{c,d \in \mathrm{CP}(G,N)} M(c,d)\, \rho(c,d) \right).$$

Il n'est pas très difficile de montrer que R est une distance entre les lois sur $\mathrm{CP}(G,N)$, et en particulier vérifie l'inégalité triangulaire ; on admettra ce fait. La définition est à comparer avec celle de la distance en variation totale, qui est donnée par :

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu,\nu) = \frac{1}{2} \sum_{c \in \mathrm{CP}(G,N)} |\mu(c) - \nu(c)| = \inf_{M \text{ couplage entre } \mu \text{ et } \nu} \left(\sum_{c,d \in \mathrm{CP}(G,N)} M(c,d)\, 1_{c \neq d} \right).$$

9. Expliquer pourquoi les deux bornes inférieures ci-dessus sont atteintes. Montrer que $d_{\mathrm{TV}}(\mu,\nu) \leq R(\mu,\nu)$.

10. (Difficile). Montrer que si $k \geq 1$ est fixé, alors on peut choisir la fonction de deux variables a telle que, avec U uniforme sur $[0,1]$,
$$\mathbb{P}[a(U,k) \neq a(U,k+1)] \leq \frac{1}{k+1}.$$
Soit c et d deux N-coloriages propres qui diffèrent uniquement en un sommet $v \in V$. Montrer que si l'on choisit les mêmes variables $V_0 \in V$ et $U_0 \in [0,1]$ pour construire c' sous la loi $P(c,\cdot)$ et d' sous la loi $P(d,\cdot)$, alors, en choisissant la fonction a pour un certain entier k,
$$\mathbb{E}[\rho(c',d')] \leq 1 - \frac{1}{m} \left(\frac{N - 2\deg G}{N - \deg G} \right).$$
On pourra évaluer $\rho(c',d')$ suivant que $V_0 = v$, V_0 n'est pas voisin de v, ou V_0 est voisin de v. En déduire que $R(P(c,\cdot),P(d,\cdot)) \leq 1 - \frac{1}{m} \left(\frac{N-2\deg G}{N - \deg G} \right)$.

11. Soit c et d deux N-coloriages propres arbitraires de G (pas forcément à distance 1 pour ρ). Montrer que
$$R(P(c,\cdot),P(d,\cdot)) \leq \left(1 - \frac{1}{m} \left(\frac{N - 2\deg G}{N - \deg G} \right)\right) \rho(c,d).$$
On notera dans ce qui $M_{c,d}$ un couplage optimal entre $P(c,\cdot)$ et $P(d,\cdot)$ tel que $R(P(c,\cdot),P(d,\cdot)) = \sum_{c',d' \in \mathrm{CP}(G,N)} M_{c,d}(c',d')\, \rho(c',d')$.

12. Soit μ et ν deux mesures de probabilité sur $\mathrm{CP}(G,N)$, et $M_{\mu,\nu}$ un couplage optimal entre μ et ν tel que $R(\mu,\nu) = \sum_{c,d \in \mathrm{CP}(G,N)} M_{\mu,\nu}(c,d)\, \rho(c,d)$. Montrer que
$$\sum_{c,d \in \mathrm{CP}(G,N)} M_{\mu,\nu}(c,d)\, M_{c,d}(\cdot,\cdot)$$
est un couplage entre les lois μP et νP. En déduire que
$$R(\mu P, \nu P) \leq \left(1 - \frac{1}{m} \left(\frac{N - 2\deg G}{N - \deg G} \right)\right) R(\mu,\nu).$$

13. Conclure que si μ_n est la loi de C_n et μ_∞ est la loi uniforme sur $\mathrm{CP}(G,N)$, alors
$$d_{\mathrm{TV}}(\mu_n,\mu_\infty) \leq K \left(1 - \frac{1}{m} \left(\frac{N - 2\deg G}{N - \deg G} \right)\right)^n$$
pour une certaine constante K (bonus : montrer qu'on peut prendre $K \leq \frac{m(m+1)}{2}$).

Corrigé

1. Il y a deux choses à démontrer : il faut montrer que l'algorithme est bien défini à chaque étape, et que le N-coloriage qu'il fournit est bien un coloriage propre. Pour le premier point, à l'étape $i+1$, comme $\deg(i+1) \leq \deg G < N$, l'ensemble $C_{i+1} = [\![1, N]\!] \setminus \{c(j),\ j \leq i \text{ et } j \sim i+1\}$ est non vide. On peut donc bien choisir $c(i+1)$ dans cet ensemble. Pour le second point, considérons une arête $\{x, y\}$ du graphe G ; on peut supposer sans perte de généralité $x < y$. Alors, $c(y) \in C_y$, et par construction $c(x) \notin C_y$, donc $c(x) \neq c(y)$. Ainsi, l'algorithme fournit bien un N-coloriage propre avec probabilité 1.

2. On a représenté ci-dessous les 18 coloriages propres du carré avec des couleurs dans $[\![1, 3]\!]$:

$\begin{matrix}2&1\\1&2\end{matrix}$	$\begin{matrix}3&1\\1&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}2&3\\1&2\end{matrix}$	$\begin{matrix}3&2\\1&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}3&1\\1&2\end{matrix}$	$\begin{matrix}2&1\\1&3\end{matrix}$
$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
$\begin{matrix}1&2\\2&1\end{matrix}$	$\begin{matrix}3&2\\2&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}1&3\\2&1\end{matrix}$	$\begin{matrix}3&1\\2&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}3&2\\2&1\end{matrix}$	$\begin{matrix}1&2\\2&3\end{matrix}$
$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
$\begin{matrix}2&3\\3&2\end{matrix}$	$\begin{matrix}1&3\\3&1\end{matrix}$	$\begin{matrix}2&1\\3&2\end{matrix}$	$\begin{matrix}1&2\\3&1\end{matrix}$	$\begin{matrix}1&3\\3&2\end{matrix}$	$\begin{matrix}2&3\\3&1\end{matrix}$
$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

   On a écrit en dessous de chaque coloriage propre sa probabilité pour l'algorithme de coloriage associé à la numérotation suivante des sommets du carré :

$$\begin{array}{ccc} 3 & \text{———} & 4 \\ | & & | \\ 1 & \text{———} & 2 \end{array}$$

   Chacun de ces coloriages a une probabilité strictement positive ; c'est un fait général, car tout coloriage propre d'un graphe $G = (V, E)$ peut être construit récursivement en suivant l'algorithme de la question précédente. En revanche, les coloriages tels que $c(2) \neq c(3)$ ont probabilité $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, car il y a deux choix possibles pour les couleurs $c(2)$ et $c(3)$ puis un seul choix possible pour $c(4)$, tandis que les coloriages avec $c(2) = c(3)$ ont probabilité $\frac{1}{24} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, car après le choix des couleurs $c(2)$ et $c(3)$, il reste deux choix possibles pour $c(4)$. La probabilité des coloriages N-propres n'est donc pas uniforme.

3. Le programme suivant prend en argument un graphe G et un entier $N \geq 1$, et calcule un coloriage propre suivant l'algorithme des questions précédentes :

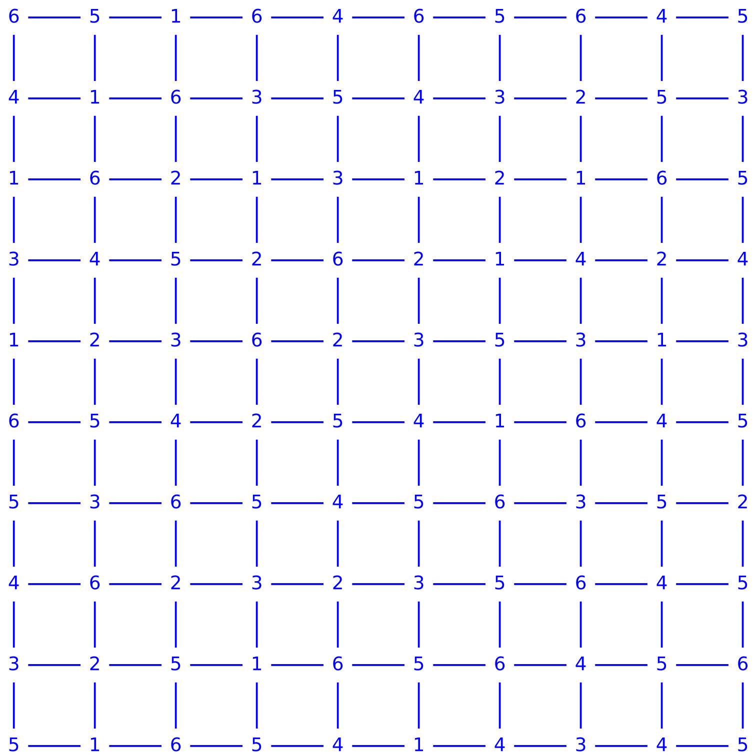
```
def ColoriagePropre(G, N):
    res = {}
    for v in G.vertices():
        Cv = range(1,N+1)
```

```
        for w in G.neighbors(v):
            if w in res.keys():
                if res[w] in Cv:
                    Cv.remove(res[w])
        k = len(Cv)
        res[v] = Cv[floor(k*random())]
    return res
```

Le résultat de l'algorithme est un dictionnaire `c` dont la valeur `c[v]` est la couleur du coloriage propre. Le programme suivant utilise `ColoriagePropre` pour dessiner un N-coloriage propre de la grille 2-dimensionnelle de taille $m \times m$:

```
def ColoriageGrille(m, N):
    res = ColoriagePropre(graphs.GridGraph([m,m]), N)
    G = Graphics()
    for x in range(0,m):
        G += line([(x,0),(x,m-1)])
        G += line([(0,x),(m-1,x)])
    for x in range(0,m):
        for y in range(0,m):
            G += text(str(res[(x,y)]), (x,y), background_color="white")
    G.set_aspect_ratio(1)
    G.axes(False)
    return G
```

En voici un pour $m = 10$ et $N = 6$:



4. Un 2-coloriage propre de la grille de taille $m \times m$ est donné par $c(x, y) = 1$ si $x - y$ est pair, et $c(x, y) = 2$ si $x - y$ est impair. Or, cette grille a pour degré maximal 4, qui est strictement plus grand que $N = 2$.

5. La suite de variables aléatoires $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathrm{CP}(G, N)$ est définie par une équation de récurrence
$$C_{n+1} = f(C_n, \xi_n),$$
avec les $\xi_n = (V_n, U_n)$ qui sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées dans $V \times [0, 1]$. Par le théorème de représentation des chaînes de Markov, $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien une chaîne de Markov ; calculons ses probabilités de transition. Si $c = C_0$ est fixée, les valeurs possibles pour $d = C_1$ sont les coloriages qui diffèrent au plus en un site $v \in V$, à savoir, le site $v = V_0$ choisi uniformément dans V. Ceci montre déjà que $P(c, d) = 0$ si c et d diffèrent en plus d'un site. Supposons maintenant que c et d diffèrent uniquement en v, avec $c(v) \neq d(v)$. La probabilité pour que $v = V_0$ est $\frac{1}{\operatorname{card} V}$, puis, il y a une probabilité $\frac{1}{\operatorname{card} E_{c,v}} = \frac{1}{\operatorname{card} E_{d,v}}$ pour que la couleur $d(v)$ soit choisie, ce choix étant déterminé par la variable uniforme U_0. Ainsi,
$$P(c, d) = \frac{1}{\operatorname{card} V \times \operatorname{card} E_{c,v}}.$$
Supposons finalement $c = d$. Ceci veut dire que l'on a choisi l'un des sommets $V_0 = v$ dans V, puis que lors du choix de la couleur $d(v)$, on a de nouveau choisi $c(v)$. Conditionnellement à $V_0 = v$, ce second choix a lieu avec probabilité $\frac{1}{\operatorname{card} E_{c,v}}$. Par conséquent,
$$P(c, c) = \sum_{v\in V} \mathbb{P}[V_0 = v]\, \frac{1}{\operatorname{card} E_{c,v}} = \frac{1}{\operatorname{card} V} \sum_{v\in V} \frac{1}{\operatorname{card} E_{c,v}}.$$
La matrice de transition de la chaîne $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien la matrice P.

6. Pour construire c', on part de c et on garde les mêmes couleurs $c'(j) = c(j)$ pour tout $j \neq k$. On recolorie ensuite les sommets $l \in I$ un à un, de la façon suivante. Notons $l_1, l_2, \ldots, l_{|I|}$ les éléments de I, et $c_0 = c$. On va construire des N-coloriages propres $c_1, \ldots, c_{|I|}$ tels que c et c_b correspondent pour tout sommet qui n'est pas dans $\{l_1, \ldots, l_b\}$, et tels que $c_b(l_a) \neq d(k)$ pour tout $a \in [\![1, b]\!]$. Supposons la construction effectuée jusqu'au rang $b - 1$. Au rang b, comme $N \geq \deg G + 2$, l'ensemble
$$[\![1, N]\!] \setminus \{c_{b-1}(w),\ w \text{ voisin de } l_b \text{ dans } G\}$$
contient au moins deux éléments, donc au moins un qui est différent de $d(k)$. Si l'on modifie c_{b-1} en changeant uniquement la couleur du sommet l_b et en choisissant l'une de ces couleurs différente de $d(k)$, alors le nouveau coloriage c_b est encore propre, et il vérifie bien les hypothèses requises pour les sommets $l_1, \ldots, l_b$.

   On a donc trouvé des N-coloriages propres $c_1, \ldots, c_{|I|}$ qui sont obtenus par des transitions de la chaîne de Markov, et tel que le dernier N-coloriage $c_{|I|}$:
   - correspond à c sur tout $V \setminus I$, et en particulier sur $[\![1, k - 1]\!]$.
   - a une couleur différente de $d(k)$ sur tout I.

   On définit maintenant c' en changeant uniquement la couleur de $c_{|I|}$ en k, et en la posant égale à $d(k)$. Expliquons pourquoi c' est encore un coloriage propre. Il s'agit de montrer que $d(k) \in E_{c_{|I|},k}$ est une couleur possible pour k relativement à $c_{|I|}$. Si j est un voisin de k dans G, alors :

— soit $j < k$: dans ce cas, $c_{|I|}(j) = d(j) \neq d(k)$ car d est propre.

— soit $j > k$: dans ce cas, si $j \notin I$, alors $c_{|I|}(j) = c(j) \neq d(k)$ par définition de I, et si $j \in I$, alors par construction $c_{|I|}(j) \neq d(k)$.

On a donc obtenu un coloriage c' par $|I|+1$ transitions depuis c, et qui vérifie les hypothèses voulues. Notons que c' et d correspondent sur tous les sommets d'indice inférieur à k, au lieu de $k-1$ pour c et d. Par induction sur k, il existe donc des transitions de c à d, et la chaîne de Markov $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est irréductible. Par ailleurs, $P(c,c) \neq 0$ pour tout $c \in \mathrm{CP}(G,N)$, donc la chaîne est apériodique.

7. Pour montrer que la mesure uniforme est réversible, il suffit de montrer que si c et d différent en exactement un site v, alors $P(c,d) = P(d,c)$. Or, on a dans ce cas $E_{c,v} = E_{d,v}$, donc c'est évident. Par le théorème ergodique pour les chaînes de Markov, on en déduit que pour tout coloriage N-propre c,
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[C_n = c] = \frac{1}{\mathrm{card}\,\mathrm{CP}(G,N)}.$$
Les coloriages aléatoires C_n avec n grand sont donc quasiment uniformes.

8. On va traiter un peu plus que la question en écrivant un programme qui montre carrément la chaîne de Markov tout entière, sous forme d'une animation. Le programme suivant renvoie soit la n-ième étape de la chaîne de Markov sur un graphe G, soit toute la liste $(C_0, C_1, \ldots, C_n)$:

```
def ColoriageMarkov(G, N, n, liste=False):
    C = ColoriagePropre(G,N)
    if liste:
        res = [copy(C)]
    for k in range(0,n):
        v = G.random_vertex()
        Cv = range(1,N+1)
        for w in G.neighbors(v):
            if C[w] in Cv:
                Cv.remove(C[w])
        k = len(Cv)
        C[v] = Cv[floor(k*random())]
        if liste:
            res.append(copy(C))
    if liste:
        return res
    else:
        return C
```

Avec la liste, on peut créer des animations, par exemple lorsque le graphe est la grille $m \times m$, avec $N = 6$:

```
def AnimationGrille(m,n):
    res = ColoriageMarkov(graphs.GridGraph([m,m]), 6, n, liste=True)
    resG = []
    for c in res:
        G = Graphics()
        for x in range(0,m):
```

```
            G += line([(x,0),(x,m-1)], color="black")
            G += line([(0,x),(m-1,x)], color="black")
        for x in range(0,m):
            for y in range(0,m):
                if c[(x,y)] == 1:
                    G += circle((x,y), 0.1, rgbcolor = (0,0,1), fill=True)
                if c[(x,y)] == 2:
                    G += circle((x,y), 0.1, rgbcolor = (0,0.5,0.5), fill=True)
                if c[(x,y)] == 3:
                    G += circle((x,y), 0.1, rgbcolor = (0,1,0), fill=True)
                if c[(x,y)] == 4:
                    G += circle((x,y), 0.1, rgbcolor = (0.5,0.5,0), fill=True)
                if c[(x,y)] == 5:
                    G += circle((x,y), 0.1, rgbcolor = (1,0,0), fill=True)
                if c[(x,y)] == 6:
                    G += circle((x,y), 0.1, rgbcolor = (0.5,0,0.5), fill=True)
        G.set_aspect_ratio(1)
        G.axes(False)
        resG.append(G)
    return sage.plot.animate.Animation(resG)
```

9. L'ensemble des couplages entre deux mesures de probabilités μ et ν sur un ensemble fini $E = [\![1, A]\!]$ est une partie fermée de $[0,1]^{E^2}$. En effet, c'est l'ensemble des fonctions $M \in [0,1]^{E^2}$ qui vérifient $\sum_{x \in E} M(x,y) = \nu(y)$ et $\sum_{y \in E} M(x,y) = \mu(x)$ pour tous $x, y \in E$; clairement, ces conditions sont stables par passage à la limite. Donc, on a un fermé borné dans un espace de dimension fini, c'est-à-dire un compact. Avec $E = \mathrm{CP}(G,N)$, la fonction qui à $M \in [0,1]^{E^2}$ associe $\sum_{c,d \in E} M(c,d)\,\rho(c,d)$ est continue, donc elle atteint son minimum sur l'ensemble compact des couplages entre μ et ν. Il en va de même pour la fonction qui à M associe $\sum_{c,d \in E} M(c,d)\,1_{c \neq d}$.

   Pour tous coloriages c et d, on a bien sûr $1_{c \neq d} \leq \rho(c,d)$. Par conséquent, pour tout couplage M,
$$\sum_{c,d \in E} M(c,d)\,1_{c \neq d} \leq \sum_{c,d \in E} M(c,d)\,\rho(c,d),$$
   et c'est en particulier vrai pour un couplage M_0 entre μ et ν tel que le terme de droite de l'inégalité ci-dessus réalise la borne inférieure, c'est-à-dire soit égal à $R(\mu,\nu)$. On a alors
$$d_{\mathrm{TV}}(\mu,\nu) \leq \sum_{c,d \in E} M_0(c,d)\,1_{c \neq d} \leq \sum_{c,d \in E} M_0(c,d)\,\rho(c,d) = R(\mu,\nu).$$

10. La construction de la fonction a est la suivante. Il suffit de définir $a(x,k)$ et $a(x,k+1)$, puisque pour les autres valeurs on peut prendre $a(x,l) = \lceil xl \rceil$. On définit aussi $a(x,k+1)$ par $\lceil x(k+1) \rceil$; on a bien $a(U,k+1)$ uniforme dans $[\![1,k+1]\!]$ si U est uniforme sur $[0,1]$. On pose ensuite
$$a(x,k) = \begin{cases} a(x,k+1) & \text{si } a(x,k+1) \leq k, \\ \lceil k(x(k+1)-k) \rceil & \text{si } a(x,k+1) = k+1. \end{cases}$$
   L'idée est que si $\lceil x(k+1) \rceil$ donne un entier plus petit que k, alors on le choisit, et sinon, le nombre réel $x(k+1)-k$ est entre 0 et 1 et on prend l'entier approchant k fois cette valeur

par excès pour retrouver de nouveau un entier plus petit que k. Par construction,

$$\mathbb{P}[a(U,k) \neq a(U,k+1)] = \mathbb{P}[a(U,k+1) = k+1] = \frac{1}{k+1}.$$

Soit c et d avec $\rho(c,d) = 1$, et v le sommet en lequel c et d diffèrent. On construit c' et d' en effectuant une transition de la chaîne de Markov issue de c ou de d, à l'aide des mêmes variables uniformes $U_0 \in [0,1]$ et $V_0 \in V$. On notera m_v le nombre de voisins de v

— Si $V_0 = v$, ce qui arrive avec probabilité $\frac{1}{m}$, alors $c' = c = d = d'$ partout en dehors de v, et on a aussi $c'(v) = d'(v) = e_{c,v,a(U_0,|E_{c,v}|)}$ puisque les ensembles $E_{c,v}$ et $E_{d,v}$ sont les mêmes. Donc, avec probabilité $\frac{1}{m}$, $c' = d'$ et $\rho(c',d') = 0$.

— Si $V_0 = w$ n'est pas voisin de v, ce qui arrive avec probabilité $\frac{m-m_v-1}{m}$, alors $c' = c = d = d'$ partout en dehors de $\{v, w\}$, et on aussi $c'(w) = d'(w) = e_{c,w,a(U_0,|E_{c,w}|)}$, puisque de nouveau les ensembles puisque les ensembles $E_{c,w}$ et $E_{d,w}$ sont les mêmes. On a en revanche $c'(v) = c(v) \neq d(v) = d'(v)$, donc $\rho(c',d') = 1$.

— Supposons finalement que $V_0 = w$ soit un voisin de v, ce qui arrive avec probabilité $\frac{m_v}{m}$. Les ensembles de couleurs possibles $E_{c,w}$ et $E_{d,w}$ peuvent différer, car ils ne contiennent pas $c(v)$ ou $d(v)$, ce qui impose des restrictions différentes sur ces ensembles. S'il s'agit des mêmes ensembles, alors le même raisonnement que précédemment montre que $c'(w) = d'(w)$ et donc que $\rho(c',d') = 1$. Si ce ne sont pas les mêmes ensembles, alors la différence de cardinaux $|E_{c,w} - E_{d,w}|$ est au plus égale à 1. Sans perte de généralités, on peut donc supposer $k = |E_{c,w}| = |E_{d,w}| - 1$, et on a par ailleurs $k + 1 \geq N - \deg G$. Notons

$$\begin{aligned} E_{c,w} &= \{e_1, \ldots, e_k\} \\ E_{d,w} &= \{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}\}. \end{aligned}$$

Avec la fonction a construite précédemment, on a $c'(w) = d'(w) = e_{a(U_0,k)}$ avec probabilité plus grande que $\frac{k}{k+1}$, auquel cas $\rho(c',d') = 1$. L'autre cas donne $\rho(c',d') = 2$, avec probabilité plus petite que $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{N-\deg G}$ (conditionnellement au fait que w ne soit pas un voisin de v).

On conclut en réunissant les contributions que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\rho(c',d')] &\leq \frac{m - m_v - 1}{m} + \frac{m_v}{m}\left(1 + \frac{1}{N - \deg G}\right) = 1 - \frac{1}{m} + \frac{m_v}{m}\,\frac{1}{N - \deg G} \\ &\leq 1 - \frac{1}{m} + \frac{\deg G}{m}\,\frac{1}{N - \deg G} = 1 - \frac{1}{m}\left(\frac{N - 2\deg G}{N - \deg G}\right). \end{aligned}$$

On a construit conjointement c' et d' sous les lois $P(c,\cdot)$ et $P(d,\cdot)$, donc l'espérance à gauche est celle sous un couplage de ces lois. La quantité est donc plus grande que $R(P(c,\cdot), P(d,\cdot))$. Notons que le terme bornant l'espérance est strictement plus petit que 1, puisque l'on suppose $N > 2\deg G$.

11. Si c et d sont deux coloriages arbitraires, choisissant une suite de coloriages $c_0, c_1, \ldots, c_r$ avec $r = \rho(c,d)$, $c = c_0$, $d = c_r$ et $\rho(c_{i-1}, c_i) = 1$, on obtient

$$R(P(c,\cdot), P(d,\cdot)) \leq \sum_{i=1}^{r} R(P(c_{i-1},\cdot), P(c_i,\cdot)) \leq r\left(1 - \frac{1}{m}\left(\frac{N - 2\deg G}{N - \deg G}\right)\right)$$

en utilisant l'inégalité triangulaire pour R, et le résultat de la question précédente. C'est ce que l'on veut puisque $r = \rho(c,d)$.

12. Calculons la première marginale de la loi L définie par l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\sum_{d'\in\mathrm{CP}(G,N)} L(c',d') &= \sum_{c,d,d'} M_{\mu,\nu}(c,d)\, M_{c,d}(c',d') \\
&= \sum_{c,d} M_{\mu,\nu}(c,d)\, P(c,c') \quad \text{puisque } M_{c,d} \text{ couple } P(c,\cdot) \text{ et } P(d,\cdot), \\
&= \sum_{c} \mu(c)\, P(c,c') \qquad\quad \text{puisque } M_{\mu,\mu} \text{ couple } \mu \text{ et } \nu, \\
&= (\mu P)(c').
\end{aligned}$$

On montre de même que $\sum_{c'\in\mathrm{CP}(G,N)} L(c',d') = (\nu P)(d')$, donc L est bien un couplage entre μP et νP. Estimons alors $\sum_{c',d'\in\mathrm{CP}(G,N)} L(c',d')\,\rho(c',d')$, qui est plus grand que $R(\mu P,\nu P)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{c',d'\in\mathrm{CP}(G,N)} L(c',d')\,\rho(c',d') &= \sum_{c,d,c',d'} M_{\mu,\nu}(c,d)\, M_{c,d}(c',d')\,\rho(c',d') \\
&= \sum_{c,d} M_{\mu,\nu}(c,d)\, R(P(c,\cdot),P(d,\cdot)) \quad \text{par définition de } M_{c,d} \\
&\leq \left(1-\frac{1}{m}\left(\frac{N-2\deg G}{N-\deg G}\right)\right)\sum_{c,d} M_{\mu,\nu}(c,d)\,\rho(c,d) \\
&\leq \left(1-\frac{1}{m}\left(\frac{N-2\deg G}{N-\deg G}\right)\right) R(\mu,\nu) \quad \text{par définition de } M_{\mu,\nu}.
\end{aligned}$$

13. Si μ_0 est la loi de C_0 coloriage propre obtenu par l'algorithme "naif", alors comme la mesure uniforme μ_∞ est invariante, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
d_{\mathrm{TV}}(\mu_n,\nu_\infty) \leq R(\mu_n,\mu_\infty) &= R(\mu_0 P^n, \mu_\infty P^n) \\
&\leq R(\mu_0,\mu_\infty)\left(1-\frac{1}{m}\left(\frac{N-2\deg G}{N-\deg G}\right)\right)^n,
\end{aligned}$$

et la quantité $R(\mu_0,\mu_\infty)$ peut être bornée par $K = \max_{c,d\in\mathrm{CP}(G,N)}\rho(c,d)$. Cette distance maximale dans le graphe de la chaîne de Markov est plus petite que $\sum_{i=1}^m 1+m-i = \frac{m(m+1)}{2}$ d'après le raisonnement ayant montré l'irréducibilité de la chaîne. On a donc une estimée de la vitesse de convergence de $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la loi uniforme.