

Objectifs : savoir classifier les états d'une chaîne finie (1), utiliser le critère numérique avec la série $\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, x)$ pour déterminer la récurrence ou transience d'une chaîne irréductible (2), déterminer la récurrence ou la transience des états d'une chaîne infinie avec des calculs ad hoc (3,4,6), utiliser la propriété de Markov simple (3,5).

1. Classification des états. On considère la chaîne de Markov sur $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Classifier les états de cette chaîne. On demande pour chaque état s'il est transient ou récurrent, et dans ce dernier cas, quelle est sa classe de récurrence. Décrire l'ensemble $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ sous la loi \mathbb{P}_3 , puis sous la loi \mathbb{P}_2 .

2. Récurrence ou transience de la marche aléatoire sur la droite. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la marche aléatoire sur la droite $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}$ et de paramètre $p \in (0, 1)$; sa matrice de transition est donnée par

$$P(k, k+1) = p \quad ; \quad P(k, k-1) = 1-p$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

(a) Montrer que cette chaîne est irréductible.

(b) Dans ce qui suit, on s'intéresse au caractère récurrent ou transient de la chaîne; on peut supposer sans perte de généralité que la loi initiale est δ_0 . On suppose d'abord $p \neq \frac{1}{2}$. Rappeler la représentation de X_n à l'aide de variables i.i.d. $\xi_{n \geq 1}$ à valeurs dans $\{\pm 1\}$. En utilisant la loi des grands nombres, montrer que la chaîne $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est transiente.

(c) On suppose à partir de maintenant $p = \frac{1}{2}$. Montrer que $P^{2n+1}(0, 0) = 0$ pour tout n , et que

$$P^{2n}(0, 0) = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

(d) En remarquant que $\binom{2n}{n} = 4 \frac{2n-1}{2n} \binom{2(n-1)}{n-1}$, montrer par récurrence sur n que $P^{2n}(0, 0) \geq \frac{1}{2n}$ pour tout $n \geq 1$. En déduire que si $p = \frac{1}{2}$, alors la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente.

3. Chaîne de vie et de mort, I. Soit $(p_k, q_k, r_k)_{k \geq 0}$ une suite de triplets de nombre réels positifs ou nuls, telle que $q_0 = 0$ et $p_k + q_k + r_k = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La chaîne de vie et de mort avec ces paramètres est la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'espace des états $\mathfrak{X} = \mathbb{N}$, et de probabilités de transition

$$P(k, k+1) = p_k \quad ; \quad P(k, k-1) = q_k \quad ; \quad P(k, k) = r_k$$

pour tout $k \geq 0$ (on a imposé $q_0 = 0$ pour ne pas avoir de transition possible de 0 vers -1).

(a) Dessiner le graphe \mathcal{G}_P de la chaîne de vie et de mort. Quels paramètres faut-il choisir pour retrouver le modèle de file d'attente de paramètre $p \in (0, 1)$?

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur la suite de paramètres $(p_k, q_k, r_k)_{k \geq 0}$ pour que la chaîne soit irréductible. Dans tout ce qui suit, on suppose que cette condition est vérifiée.

(c) On définit une fonction $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ par :

$$\phi(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0; \\ \sum_{l=0}^{k-1} \left(\prod_{j=1}^l \frac{q_j}{p_j} \right) & \text{si } k \geq 1, \end{cases}$$

le terme $l = 0$ d'une somme étant le produit vide, égal à 1. Soit $k < l$ deux entiers. Montrer que pour tout $x \in \llbracket k, l \rrbracket$,

$$\mathbb{P}_x[\tau_k < \tau_l \text{ et } \tau_k < +\infty] = \frac{\phi(l) - \phi(x)}{\phi(l) - \phi(k)}.$$

On pourra utiliser la propriété de Markov simple pour écrire une équation de récurrence vérifiée par la fonction $f(x) = \mathbb{P}_x[\tau_k < \tau_l \text{ et } \tau_k < +\infty]$, puis montrer que la formule ci-dessus est la seule solution. Les calculs pourront être simplifiés par l'introduction de $\delta_f(x) = f(x+1) - f(x)$.

(d) On pose $\phi(\infty) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \phi(k) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^l \frac{q_j}{p_j} \right)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- $\phi(\infty) = +\infty$.
- La chaîne de Markov est irréductible récurrente.

On pourra utiliser en les justifiant les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0[\tau_0^+ < +\infty] &\geq \mathbb{P}_1[\tau_0 < +\infty] \geq \lim_{l \rightarrow \infty} \mathbb{P}_1[\tau_0 < \tau_l \text{ et } \tau_0 < +\infty]; \\ \frac{1}{p_0} \mathbb{P}_0[\tau_0^+ = +\infty] &= \mathbb{P}_1[\tau_0 = +\infty] = \lim_{l \rightarrow \infty} \mathbb{P}_1[\tau_0 > l] \geq \lim_{l \rightarrow \infty} \mathbb{P}_1[\tau_0 > \tau_l]. \end{aligned}$$

(e) On suppose que $\phi(\infty) < +\infty$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty$ avec probabilité 1 sous \mathbb{P}_k , pour tout état $k \in \mathbb{N}$.

(f) Application. On suppose que $r_k = 0$ pour tout k , et que $p_k = \frac{1}{2} + \varepsilon_k$, avec $\varepsilon_k \simeq C k^{-\alpha}$ lorsque $k \rightarrow \infty$, $C > 0$ et $\alpha > 0$ étant deux constantes. Si $\alpha > 1$, montrer que la chaîne est récurrente. Si $\alpha < 1$, montrer que la chaîne est transiente. Enfin, si $\alpha = 1$, discuter de la récurrence ou transience en fonction de la valeur de C .

4. Matrices sous-stochastiques et critère de transience. Soit \mathfrak{X} un espace d'états fini ou dénombrable. Une matrice *sous-stochastique* sur \mathfrak{X} est une matrice $(Q(x, y))_{x, y \in \mathfrak{X}}$ à coefficients réels positifs telle que $\sum_{y \in \mathfrak{X}} Q(x, y) \leq 1$ pour tout $x \in \mathfrak{X}$.

(a) Montrer que si Q est sous-stochastique, alors ses puissances Q^n le sont également. Plus précisément, montrer que pour tout $x \in \mathfrak{X}$, les sommes sur une ligne

$$\sigma_{Q^n}(x) = \sum_{y \in \mathfrak{X}} Q^n(x, y)$$

forment une suite $(\sigma_{Q^n}(x))_{n \geq 1}$ qui est décroissante.

(b) On note $h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{Q^n}(x)$. Montrer que $h = Qh$. Soit k une solution positive de l'équation $k = Qk$, avec $0 \leq k(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathfrak{X}$. Montrer que $k(x) \leq \sigma_Q(x)$, puis

par récurrence que $k(x) \leq \sigma_{Q^n}(x)$ pour tout $n \geq 1$. En déduire que $k(x) \leq h(x)$, et que h est la solution maximale du système d'équations

$$\begin{cases} k(x) = \sum_{y \in \mathfrak{X}} Q(x, y) k(y); \\ 0 \leq k(x) \leq 1. \end{cases}$$

- (c) Soit P la matrice de transition d'une chaîne de Markov irréductible sur \mathfrak{X} , et $x_0 \in \mathfrak{X}$ un état arbitraire. On pose

$$Q(x, y) = \begin{cases} P(x, y) & \text{si } y \neq x_0, \\ 0 & \text{si } y = x_0. \end{cases}$$

Montrer que Q est une matrice sous-stochastique, et que la fonction

$$k(x) = \mathbb{P}_x[\forall n \geq 1, X_n \neq x_0]$$

est solution à valeurs dans $[0, 1]$ du système d'équations $k = Qk$.

- (d) En déduire qu'une chaîne de Markov irréductible de matrice de transition P est transiente si et seulement si, pour un état $x_0 \in \mathfrak{X}$ fixé, il existe une solution non nulle au système d'équations

$$\begin{cases} k(x) = \sum_{y \neq x_0} P(x, y) k(y); \\ 0 \leq k(x) \leq 1. \end{cases}$$

- (e) Application. On considère le modèle de file d'attente, qui est la chaîne de Markov sur \mathbb{N} de matrice de transition

$$\begin{aligned} P(k, k+1) &= p \quad \text{et} \quad P(k, k-1) = 1-p \quad \text{pour tout } k \geq 1; \\ P(0, 1) &= 1; \end{aligned}$$

p est un paramètre réel dans $(0, 1)$. Trouver l'ensemble des solutions du système de la question précédente avec $x_0 = 0$. En déduire en fonction de p la récurrence ou la transience de cette chaîne de Markov irréductible.

5. Chaînes de Markov et fonctions harmoniques, II. Soit \mathfrak{X} un ensemble fini, et P une matrice de transition irréductible sur cet ensemble. On rappelle qu'une fonction $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite harmonique pour P si elle vérifie l'équation $Pf = f$. Plus généralement, si $\emptyset \subsetneq A \subsetneq \mathfrak{X}$ est une partie non vide et non pleine et si $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, le *problème de Dirichlet* est le système d'équations suivant : on cherche $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$.
- en dehors de A , f est harmonique : pour tout $x \notin A$, $f(x) = \sum_{y \in \mathfrak{X}} P(x, y) f(y)$.

- (a) On suppose dans cette question que g est la fonction nulle et que f est une solution du problème de Dirichlet. Soit x_0 un point de $\mathfrak{X} \setminus A$ tel que

$$f(x_0) = \max\{f(x) \mid x \in \mathfrak{X} \setminus A\}.$$

Montrer en raisonnant par l'absurde que $f(x_0) \leq 0$. En déduire que $f = 0$.

- (b) Montrer que si $A \neq \{\emptyset, \mathfrak{X}\}$, alors il y a au plus une solution au problème de Dirichlet pour la paire (A, g) associée à une fonction $g : A \rightarrow \mathbb{R}$.

- (c) On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de matrice de transition P sur \mathfrak{X} , et on note

$$\tau_A = \inf\{n \geq 0 \mid X_n \in A\}.$$

Montrer que τ_A est fini presque sûrement (quelque soit la mesure initiale π_0).

(d) Montrer que $f(x) = \mathbb{E}_x[g(X_{\tau_A})]$ est bien définie et est l'unique solution du problème de Dirichlet pour la paire (A, g) .

6. La chaîne de Markov des arbres de Galton–Watson. On considère une famille $(\xi_{n,m})_{n \geq 0, m \geq 1}$ de variables indépendantes identiquement distribuées à valeurs dans \mathbb{N} , de loi commune μ : pour tout $n \geq 0$, tout $m \geq 1$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}[\xi_{n,m} = k] = \mu(k).$$

Le modèle de Galton–Watson associé à la loi de reproduction μ est la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec X_0 indépendant des variables $\xi_{n,m}$, et

$$X_{n+1} = \sum_{m=1}^{X_n} \xi_{n,m}$$

pour tout $n \geq 0$. On convient que la somme est nulle si $X_n = 0$. Ce modèle correspond à la situation suivante : X_n est le nombre d'individus d'une population au temps n , et chaque individu $m \in \llbracket 1, X_n \rrbracket$ de la n -ième génération a $\xi_{n,m}$ enfants, ce nombre d'enfants étant aléatoire et indépendant de tout ce qui s'est passé précédemment et de toutes les autres descendance $\xi_{n,m'} \neq m$.

(a) Utiliser un théorème du cours pour montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur l'espace d'états $\mathcal{X} = \mathbb{N}$. Montrer que la matrice de transition de cette chaîne est

$$P(k, l) = \sum_{\substack{l_1 + l_2 + \dots + l_k = l \\ l_1, l_2, \dots, l_k \geq 0}} \mu(l_1) \mu(l_2) \dots \mu(l_k) = \mu^{*k}(l),$$

où μ^{*k} désigne la loi de la somme de k variables aléatoires indépendantes de loi μ (convolée k -ième de la loi μ).

(b) Montrer que 0 est un état *absorbant* : $P(0, 0) = 1$. La chaîne $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle irréductible ?

(c) Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que $\mu(0) > 0$, et on se placera sous la loi \mathbb{P}_1 : $X_0 = 1$. Montrer que 0 est le seul état récurrent de la chaîne. En déduire que

$$\mathbb{P}_1 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty \right] + \mathbb{P}_1 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0 \right] = 1.$$

(d) On souhaite calculer en fonction de μ la *probabilité d'extinction* $p_e = \mathbb{P}_1[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0]$. Expliquer pourquoi

$$p_e = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{P}_1[X_n = 0]).$$

On pose $G_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1[X_n = k] s^k$, qui est une fonction croissante de s définie au moins sur l'intervalle $[0, 1]$. Montrer que $G_1(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(k) s^k$, puis, par récurrence sur n :

$$G_n(s) = \underbrace{G_1 \circ G_1 \circ \dots \circ G_1}_{n \text{ fois}}(s) = (G_1)^{\circ n}(s).$$

Interpréter $G_n(0)$ comme une probabilité. Que vaut p_e par rapport à la suite de fonctions $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

(e) On suppose que le nombre moyen de descendants $m = \sum_{k=0}^{\infty} k \mu(k)$ est fini. Montrer que $m = (G_1)'(1)$. En déduire qu'il y a dans ce cas équivalence entre :

$$(p_e = 1) \iff (m \leq 1).$$

On conseille de dessiner l'aspect de la fonction $G_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ en fonction du paramètre m .