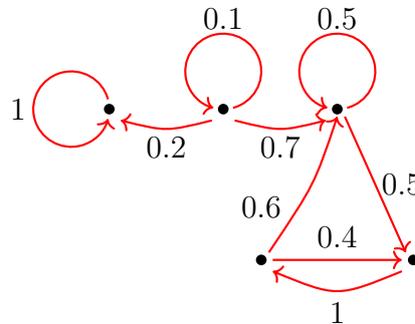


1. **Classification des états.** Dessinons le graphe de la chaîne de matrice  $P$  :



L'état 1 est absorbant :  $P(1, 1) = 1$ . Sous  $\mathbb{P}_1$ ,  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite constante égale à 1. En particulier, 1 est un état récurrent.

L'état 2 n'a aucune flèche pointant vers lui depuis un autre état. Donc, si  $X_1 \neq 2$  sous  $\mathbb{P}_2$ , alors  $\tau_2^+ = +\infty$ . On a ainsi :

$$\mathbb{P}_2[\tau_2^+ = +\infty] \geq \mathbb{P}_2[X_1 \neq 2] = 0.2 + 0.7 = 0.9 > 0.$$

Ceci implique 2 est un état transient.

Les états 3, 4, 5 correspondent à une sous-matrice de  $P$  qui est encore stochastique. Autrement dit, sous  $\mathbb{P}_x$  avec  $x \in \{3, 4, 5\}$ , tout se passe comme si on regardait une chaîne de Markov de matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.6 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Or, cette matrice est irréductible, donc les 3 états 3, 4, 5 sont récurrents puisqu'ils ont tous même statut (ils communiquent tous ensemble), et qu'au moins l'un d'eux est récurrent. Ainsi, la chaîne de matrice  $P$  admet un état transient 2, et deux classes d'états récurrents :  $\{1\}$  et  $\{3, 4, 5\}$ .

Sous la mesure  $\mathbb{P}_3$ ,  $\{X_n, n \in \mathbb{N}\} = \{3, 4, 5\}$  avec probabilité 1 : tous les états de la classe de récurrence sont visités infiniment souvent. Sous la mesure  $\mathbb{P}_2$ ,  $X_n$  reste en l'état 2 un certain temps, jusqu'à une première transition vers 1 avec probabilité  $\frac{2}{9}$ , et vers 3 avec probabilité  $\frac{7}{9}$ . Dans le premier cas,  $\{X_n, n \in \mathbb{N}\} = \{1, 2\}$ , et dans le second cas,  $\{X_n, n \in \mathbb{N}\} = \{2, 3, 4, 5\}$ , puisqu'après avoir atteint l'état 3, la chaîne explore la classe de récurrence  $\{3, 4, 5\}$ , et visite ces états une infinité de fois.

2. **Récurrence ou transience de la marche aléatoire sur la droite.**

(a) La chaîne de Markov de matrice  $P$  est irréductible si et seulement si le graphe orienté associé  $\mathcal{G}_P$  est connexe, et ici c'est clairement le cas. On peut aussi donner une preuve plus explicite de l'irréductibilité, en raisonnant comme suit. Soit  $k \neq l$  deux états de  $\mathbb{Z}$ ; on supposera  $k < l$ , l'autre cas étant tout à fait analogue. Alors,  $P^{l-k}(k, l) > 0$ , car :

$$P^{l-k}(k, l) \geq P(k, k+1) P(k+1, k+2) \cdots P(l-1, l) = p^{k-l} > 0.$$

Donc, pour toute paire d'états ( $k \neq l$ ), il existe  $n \geq 1$  tel que  $P^n(k, l) > 0$  : la chaîne est donc irréductible.

(b) Une représentation de la chaîne de Markov est

$$X_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

avec les variables  $\xi_n$  i.i.d., et  $\mathbb{P}[\xi_n = 1] = 1 - \mathbb{P}[\xi_n = -1] = p$ . Par la loi des grands nombres, avec probabilité 1,

$$\frac{X_n}{n} \rightarrow \mathbb{E}[\xi_1] = 2p - 1.$$

Si  $p \neq \frac{1}{2}$ , alors  $2p - 1 \neq 0$ , et on a donc

$$X_n \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } p > \frac{1}{2}, \\ -\infty & \text{si } p < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Or, si  $X_n \rightarrow +\infty$  par exemple, alors la chaîne ne peut visiter l'état 0 qu'un nombre fini de fois, donc 0 est transient. Comme la chaîne est irréductible, on en déduit que tous les états sont transients si  $p \neq \frac{1}{2}$ .

(c) Comme les variables  $\xi_n$  sont dans  $\pm 1$ ,  $X_n \equiv n \pmod 2$  presque sûrement sous  $\mathbb{P}_0$ . Alors,

$$P^{2n+1}(0, 0) = \mathbb{P}_0[X_{2n+1} = 0] \leq \mathbb{P}_0[X_{2n+1} \text{ est pair}] = 0.$$

Calculons maintenant  $P^{2n}(0, 0) = \mathbb{P}_0[X_{2n} = 0]$ . Chaque chemin  $0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_{2n} = 0$  avec  $|x_i - x_{i-1}| = 1$  pour tout  $i$  a pour probabilité  $(\frac{1}{2})^{2n} = \frac{1}{4^n}$ . Pour construire un tel chemin, il suffit de choisir quels pas  $x_i - x_{i-1}$  seront égaux à  $+1$ ; les autres pas seront égaux à  $-1$ , et comme  $x_{2n} = 0$ , il y a autant de pas positifs  $+1$  que de pas négatifs  $-1$ . On a donc :

$$(\text{nombre de chemins}) = (\text{nombre de façons de choisir } n \text{ pas positifs parmi } 2n) = \binom{2n}{n}.$$

On conclut que

$$P^{2n}(0, 0) = (\text{nombre de chemins}) \times (\text{probabilité d'un chemin}) = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

(d) On remarque que :

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{2n(2n-1)}{n^2} \binom{2n-2}{n-1} = 4 \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \binom{2n-2}{n-1}.$$

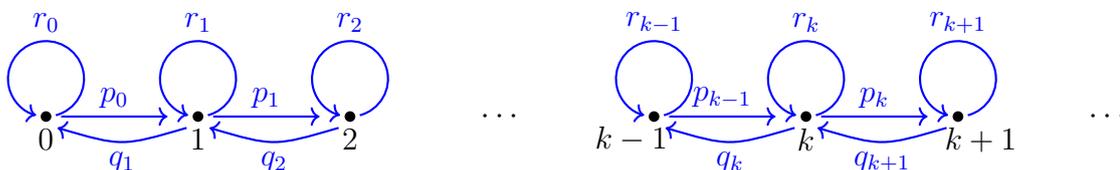
Ceci implique par récurrence sur  $n$  que  $P^{2n}(0, 0) \geq \frac{1}{2n}$  pour tout  $n \geq 1$ . Si  $n = 1$ , on a en effet  $P^2(0, 0) = \frac{1}{2}$ . Supposons le résultat établi jusqu'au rang  $n - 1 \geq 1$ . Alors,

$$\begin{aligned} P^{2n}(0, 0) &= \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \frac{1}{4^{n-1}} \binom{2n-2}{n-1} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) P^{2n-2}(0, 0) \\ &\geq \frac{2n-1}{2n} \frac{1}{2n-2} \geq \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Donc, avec  $p = \frac{1}{2}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} P^n(0, 0) \geq \sum_{n=1}^{\infty} P^{2n}(0, 0) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = +\infty$ . Ceci implique la récurrence de la chaîne (irréductible)  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur l'espace d'états  $\mathbb{Z}$ .

### 3. Chaîne de vie et de mort, I.

(a) Le graphe de la chaîne de vie et de mort est :



On retrouve le modèle de file d'attente en posant  $r_k = 0$  pour tout  $k$ ,  $p_0 = 1$ ,  $p_{k \geq 1} = p$  et  $q_{k \geq 1} = 1 - p$ .

- (b) Pour avoir l'irréductibilité, il faut et il suffit que le graphe orienté dessiné précédemment soit connexe. Ceci est le cas si :

$$p_k > 0 \quad \forall k \geq 0 \quad ; \quad q_k > 1 \quad \forall k \geq 1.$$

- (c) On introduit comme dans le modèle de file d'attente la fonction

$$f(x) = \mathbb{P}_x[\tau_k < \tau_l \text{ et } \tau_k < +\infty].$$

Cette fonction vérifie  $f(k) = 1$ ,  $f(l) = 0$  et pour  $k < x < l$ ,

$$f(x) = r_x f(x) + q_x f(x-1) + p_x f(x+1).$$

C'est une conséquence immédiate de la méthode d'un pas en avant (voir le corrigé de l'exercice 2 de la feuille 1). Comme  $r_x = 1 - p_x - q_x$ , on peut réécrire l'équation ci-dessus comme suit :

$$f(x+1) - f(x) = \frac{q_x}{p_x} (f(x) - f(x-1)).$$

On a donc  $\delta_f(x) = A \prod_{j=1}^x \frac{q_j}{p_j}$  pour une certaine constante  $A$ , et pour tout  $x$  dans l'intervalle  $[[k, l]]$ . Avec la définition de  $\phi$  donnée dans l'énoncé, on peut donc écrire :

$$\delta_f(x) = A (\phi(x+1) - \phi(x)).$$

Puis,  $f(x) = f(k) + \sum_{y=k}^{x-1} \delta_f(y) = 1 + A (\phi(x) - \phi(k))$ , et la constante  $A$  est obtenue en évaluant cette identité en  $x = l$  :

$$0 = f(l) = 1 + A (\phi(l) - \phi(k)) \quad ; \quad A = -\frac{1}{\phi(l) - \phi(k)}.$$

Ainsi,

$$f(x) = 1 - \frac{\phi(x) - \phi(k)}{\phi(l) - \phi(k)} = \frac{\phi(l) - \phi(x)}{\phi(l) - \phi(k)}.$$

- (d) Par la propriété de Markov,

$$\mathbb{P}_0[\tau_0^+ < +\infty] = r_0 + p_0 \mathbb{P}_1[\tau_0 < +\infty] \geq (r_0 + p_0) \mathbb{P}_1[\tau_0 < +\infty] = \mathbb{P}_1[\tau_0 < +\infty].$$

Par ailleurs, sous  $\mathbb{P}_1$ , la suite des temps d'atteinte  $(\tau_l)_{l \geq 1}$  est strictement croissante, donc la suite  $(\mathbb{P}_1[\tau_0 < \tau_l \text{ et } \tau_0 < +\infty])_{l \geq 1}$  est croissante et

$$\mathbb{P}_1[\tau_0 < +\infty] = \lim_{l \rightarrow \infty} \mathbb{P}_1[\tau_0 < \tau_l \text{ et } \tau_0 < +\infty] = \lim_{l \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{\phi(l)} = 1 - \frac{1}{\phi(+\infty)}.$$

Si  $\phi(+\infty) = +\infty$ , alors  $\mathbb{P}_1[\tau_0 < +\infty] = 1$ , donc  $\mathbb{P}_0[\tau_0^+ < +\infty] = 1$  et la chaîne est récurrente irréductible.

Pour la réciproque, notons qu'on a de nouveau par la propriété de Markov :

$$\mathbb{P}_0[\tau_0^+ = +\infty] = p_0 \mathbb{P}_1[\tau_0 = +\infty] = p_0 (1 - \mathbb{P}_1[\tau_0 < +\infty]) = \frac{p_0}{\phi(+\infty)}.$$

Si la chaîne est récurrente irréductible, alors  $\mathbb{P}_0[\tau_0^+ = +\infty] = 0$ , donc  $\phi(+\infty) = +\infty$ .

- (e) Par transience de la chaîne, pour tout intervalle fini  $[[0, M]]$ , la chaîne  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne visite qu'un nombre fini de fois les états de cet intervalle, donc il existe  $N$  (aléatoire) tel que  $X_n > M$  pour tout  $n \geq N$ . Ceci veut dire que  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty$  avec probabilité 1.

- (f) Le rapport  $\frac{q_j}{p_j}$  est équivalent à  $\frac{1-2Cj^{-\alpha}}{1+2Cj^{-\alpha}} \simeq 1 - 4Cj^{-\alpha} \simeq \exp(-4Cj^{-\alpha})$ . Le produit  $\prod_{j=1}^l \frac{q_j}{p_j}$  a donc le même comportement asymptotique que

$$\exp\left(-4C \sum_{j=1}^l \frac{1}{j^\alpha}\right).$$

Si  $\alpha > 1$ , la série  $\sum_{j=1}^l \frac{1}{j^\alpha}$  est convergente, donc le produit est borné inférieurement par une constante strictement positive. Alors,  $\phi(l) \geq Kl$  pour une certaine constante  $K > 0$ , et  $\phi(+\infty) = +\infty$ . Ceci implique que la chaîne est récurrente.

Si  $\alpha < 1$ , alors la série  $\sum_{j=1}^l \frac{1}{j^\alpha}$  est divergente, et de comportement asymptotique équivalent à

$$\int^l \frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} l^{1-\alpha}.$$

Les termes de la série  $\phi(+\infty) = \sum_{l=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{l-1} \frac{q_j}{p_j}$  décroissent donc comme  $\exp(-K l^{1-\alpha})$ , et  $\phi(+\infty) < +\infty$  : la chaîne est donc transiente.

Finalement, si  $\alpha = 1$ , en supposant que  $\frac{q_j}{p_j} \simeq \exp(-4Cj^{-1} + O(j^{-\beta}))$  avec  $\beta > 1$ , on voit que  $\prod_{j=0}^{l-1} \frac{q_j}{p_j}$  a le même comportement asymptotique que

$$\exp(-4C \log l) = l^{-4C}.$$

La série  $\phi(+\infty)$  est donc convergente si et seulement si  $C > \frac{1}{4}$ ; dans ce cas, on a une chaîne transiente. Si  $C \leq \frac{1}{4}$ , alors la chaîne est récurrente.

#### 4. Matrices sous-stochastiques et critère de transience.

- (a) Comparons  $\sigma_{Q^n}(x)$  et  $\sigma_{Q^{n+1}}(x)$  :

$$\begin{aligned} \sigma_{Q^{n+1}}(x) &= \sum_{y \in \mathfrak{X}} Q^{n+1}(x, y) = \sum_{y, z \in \mathfrak{X}} Q^n(x, z) Q(z, y) \\ &\leq \sum_{z \in \mathfrak{X}} Q^n(x, z) \quad \text{car } Q \text{ est sous-stochastique,} \\ &\leq \sigma_{Q^n}(x). \end{aligned}$$

En particulier,  $\sigma_{Q^n}(x) \leq \sigma_Q(x) \leq 1$ , et la matrice  $Q^n$  est sous-stochastique pour tout  $n \geq 1$ .

- (b) Par définition,  $h(x)$  est la limite décroissante de la suite  $(\sigma_{Q^n}(x))_{n \geq 1}$ . On calcule alors :

$$(Qh)(x) = \sum_{y \in \mathfrak{X}} Q(x, y) h(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{y \in \mathfrak{X}} Q(x, y) \sigma_{Q^n}(y) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{Q^{n+1}}(x) = h(x).$$

Justifions l'interversion de somme et de limite : les éléments  $\sigma_{Q^n}(y)$  sont dans  $[0, 1]$ , et la série  $\sum_{y \in \mathfrak{X}} Q(x, y)$  est convergente, donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée.

Soit  $k$  une solution positive de l'équation  $k = Qk$  avec  $0 \leq k(x) \leq 1$  pour tout  $x \in \mathfrak{X}$ . On a :

$$k(x) = (Qk)(x) = \sum_{y \in \mathfrak{X}} Q(x, y) k(y) \leq \sum_{y \in \mathfrak{X}} Q(x, y) = \sigma_Q(x).$$

Comme on a aussi  $k = Q^n k$  pour tout  $n \geq 1$ , la même preuve donne  $k(x) \leq \sigma_{Q^n}(x)$ . En faisant tendre  $n$  vers l'infini, on obtient  $k(x) \leq h(x)$ .

- (c) La matrice  $Q$  est obtenue à partir de  $P$  en changeant la colonne  $x_0$  et en mettant des 0 à la place : elle est donc évidemment sous-stochastique. Posons  $k(x) = \mathbb{P}_x[\forall n \geq 1, X_n \neq x_0]$ . Par la propriété de Markov,

$$\begin{aligned} k(x) &= \sum_{y \in \mathfrak{X}} P(x, y) \mathbb{P}_y[\forall n \geq 0, X_n \neq x_0] \\ &= \sum_{y \neq x_0} P(x, y) \mathbb{P}_y[\forall n \geq 1, X_n \neq x_0] \\ &= \sum_{y \in \mathfrak{X}} Q(x, y) k(y) = (Qk)(x). \end{aligned}$$

Ainsi,  $k$  est solution dans  $[0, 1]$  de l'équation  $k = Qk$ .

- (d) Si la chaîne de Markov est transiente, alors

$$k(x_0) = \mathbb{P}_{x_0}[\forall n \geq 1, X_n \neq x_0] = \mathbb{P}_{x_0}[\tau_{x_0}^+ = +\infty] > 0,$$

donc il existe une solution non nulle au système. Pour la réciproque, on va montrer que la fonction  $k$  de la question précédente est en fait la solution *maximale* de l'équation  $k = Qk$ . Remarquons que

$$\begin{aligned} \sigma Q^n(x) &= \sum_{y_1, \dots, y_n \in \mathfrak{X}} Q(x, y_1) Q(y_1, y_2) \cdots Q(y_{n-1}, y_n) \\ &= \sum_{y_1, \dots, y_n \in \mathfrak{X} \setminus \{x_0\}} \mathbb{P}_x[X_1 = y_1, X_2 = y_2, \dots, X_n = y_n] \\ &= \mathbb{P}_x[\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_k \neq x_0]. \end{aligned}$$

Donc,  $h(x) \leq \mathbb{P}_x[\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_k \neq x_0]$  pour tout  $n \geq 1$ , et en passant à la limite, on obtient  $h(x) \leq k(x)$ . Donc,  $k$  est la solution maximale, et s'il existe une solution non nulle, alors  $k \neq 0$ , ce qui implique que la chaîne est transiente. En effet, fixons  $x$  tel que  $k(x) > 0$ . Si  $x = x_0$ , c'est fini, car  $k(x_0) = \mathbb{P}_{x_0}[\tau_{x_0}^+ = +\infty]$ . Sinon, comme la chaîne est irréductible, il existe un entier  $n \geq 1$  tel que  $Q^n(x_0, x) > 0$ , et alors,

$$k(x_0) = \sum_{y \in \mathfrak{X}} Q^n(x_0, y) k(y) \geq Q^n(x_0, x) k(x) > 0.$$

- (e) Pour le modèle de file d'attente, l'équation  $k = Qk$  avec  $x_0 = 0$  s'écrit :

$$k(0) = k(1) = A \text{ constante} \quad ; \quad k(2) = \frac{k(1)}{p} = \frac{A}{p}$$

et

$$k(x) = pk(x+1) + (1-p)k(x-1)$$

pour tout  $x \geq 2$ . Ainsi,

$$k(x+1) - k(x) = \frac{1-p}{p} (k(x) - k(x-1)) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{x-1} (k(2) - k(1)) = A \left(\frac{1-p}{p}\right)^x.$$

Avec  $r = \frac{1-p}{p}$ , on a donc

$$k(x) = k(2) + \sum_{y=2}^{x-1} k(y+1) - k(y) = \begin{cases} A \frac{1-r^x}{1-r} & \text{si } r \neq 1, \\ Ax & \text{si } r = 1, \end{cases}$$

pour tout  $x \geq 2$ . Pour avoir une solution bornée dans  $[0, 1]$  et non triviale, il faut donc  $r < 1$ , c'est-à-dire que  $p > \frac{1}{2}$ . La chaîne est donc transiente pour  $p > \frac{1}{2}$  et récurrente pour  $p \leq \frac{1}{2}$ .

## 5. Chaînes de Markov et fonctions harmoniques, II.

- (a) Soit  $f$  harmonique sur  $\mathfrak{X} \setminus A$ , égale à 0 sur  $A$ . On considère un point  $x_0 \notin A$  tel que  $f(x_0)$  soit maximum, égal à  $M$ . Supposons  $M > 0$ . Alors,

$$M = f(x_0) = (Pf)(x_0) = \sum_{y \in \mathfrak{X}} P(x_0, y) f(y)$$

est la moyenne d'éléments plus petits que  $M$ , donc tous les voisins  $y$  de  $x_0$  dans le graphe  $\mathcal{G}_P$  de la chaîne de Markov doivent aussi vérifier  $f(y) = M$ . Alors, de proche en proche, comme la chaîne est irréductible, on atteint un point  $y \in A$  tel que  $f(y) = M$ , ce qui contredit l'hypothèse  $f(y) = 0$  pour  $y \in A$ . Ainsi,  $M \leq 0$ , et symétriquement, on montre que  $m = \min\{f(y), y \notin A\} \geq 0$ , donc  $f$  est constante égale à 0.

- (b) Dans le cas général, si  $f_1$  et  $f_2$  sont deux solutions du problème de Dirichlet pour la paire  $(A, g)$ , alors la différence  $f_1 - f_2$  est solution pour la paire  $(A, 0)$ , donc par la question précédente,  $f_1 - f_2 = 0$  et  $f_1 = f_2$ . On a donc établi en toute généralité l'unicité de la solution à un problème de Dirichlet.
- (c) La chaîne finie irréductible est automatiquement récurrente irréductible, donc tous les états  $x \in \mathfrak{X}$  sont visités (et même infiniment souvent). Ceci implique, quelque soit  $\pi_0, \tau_A < +\infty$  presque sûrement.
- (d) Comme  $\tau_A < +\infty$ , on peut bien définir la variable  $X_{\tau_A}$ , puis  $f(x) = \mathbb{E}_x[g(X_{\tau_A})]$ . Si  $x \in A$ , alors  $\tau_A = 0$ , donc  $X_{\tau_A} = x$  presque sûrement sous  $\mathbb{P}_x$ , et  $f(x) = g(x)$ . Supposons maintenant  $x \notin A$ . Alors, par la propriété de Markov,

$$f(x) = \sum_{y \in \mathfrak{X}} P(x, y) f(y) = (Pf)(x).$$

Donc, la fonction  $f$  est l'unique solution du problème de Dirichlet.

## 6. La chaîne de Markov des arbres de Galton–Watson.

- (a) Notons  $\xi_n = (\xi_{n,m})_{m \geq 1}$ , qui est un élément aléatoire de  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ . On peut écrire  $X_{n+1} = f(X_n, \xi_n)$  pour une certaine fonction  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$  :

$$f(k, (x_m)_{m \geq 1}) = \sum_{m=1}^k x_m.$$

Comme les suites aléatoires  $\xi_n$  sont des variables i.i.d. dans  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  et indépendantes de  $X_0$ , par le théorème de représentation des chaînes de Markov,  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov. Sa matrice de transition est :

$$P(k, l) = \mathbb{P}[f(k, \xi_0) = l] = \mathbb{P}[\xi_{0,1} + \xi_{0,2} + \cdots + \xi_{0,k} = l] = \sum_{l=l_1+\cdots+l_k} \mu(l_1) \cdots \mu(l_k) = \mu^{*k}(l).$$

- (b) Par définition, si  $X_n = 0$ , alors  $X_{n+1} = 0$ , donc  $P(0, 0) = 1$  et 0 est un état absorbant, donc récurrent. La chaîne n'est donc pas irréductible, puisque 0 ne communique qu'avec lui-même.
- (c) Si  $\mu(0) > 0$ , alors  $P(k, 0) = (\mu(0))^k > 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , donc tout état communique avec 0. Tout état  $k \geq 1$  est donc transient. En effet, supposons par l'absurde  $k \geq 1$  récurrent. La relation de communication est une relation d'équivalence sur les états récurrents, donc comme  $k$  communique avec 0, 0 communique avec  $k$ . C'est une contradiction, car 0 ne communique qu'avec lui-même.

Une trajectoire de la chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a donc deux possibilités sous  $\mathbb{P}_1$  :

- soit elle visite 0 à un certain temps  $t$ , et elle reste alors stationnaire à 0 :  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0$  (extinction de l'espèce).
- soit elle ne visite pas 0. Alors, toute partie finie  $A = \llbracket 1, M \rrbracket$  n'est visitée qu'un nombre fini de fois par transience des éléments de cette partie, donc :

$$\forall M \geq 1, \exists N \geq 0, (n \geq N) \Rightarrow (X_n > M).$$

avec probabilité 1. On a donc dans ce cas  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty$ .

On conclut que  $\mathbb{P}_1[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0] + \mathbb{P}_1[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty] = 1$ .

(d) Comme 0 est un état absorbant,

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0 \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \uparrow \{X_n = 0\}.$$

Par conséquent,  $p_e = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_1[X_n = 0]$ . Sous la mesure  $\mathbb{P}_1$ ,  $X_1$  a pour loi  $\mu$ , donc

$$G_1(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1[X_1 = k] s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(k) s^k.$$

Supposons établie jusqu'au rang  $n$  la formule  $G_n(s) = (G_1)^{\circ n}(s)$ . Alors,

$$\begin{aligned} G_{n+1}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1[X_{n+1} = k] s^k \\ &= \sum_{j,k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1[X_n = j, X_{n+1} = k] s^k \\ &= \sum_{j,k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1[X_n = j] P(j, k) s^k. \end{aligned}$$

Or, si  $j$  est fixé, alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} P(j, k) s^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1 + \dots + k_j = k} \mu(k_1) \dots \mu(k_j) s^k \\ &= \left( \sum_{k_1=0}^{\infty} \mu(k_1) s^{k_1} \right) \dots \left( \sum_{k_j=0}^{\infty} \mu(k_j) s^{k_j} \right) \\ &= (G_1(s))^j. \end{aligned}$$

Donc,  $G_{n+1}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}_1[X_n = j] (G_1(s))^j = G_n(G_1(s)) = (G_1)^{\circ(n+1)}(s)$ . La formule  $G_n = (G_1)^{\circ n}$  est donc vraie pour tout  $n \geq 1$ .

Si l'on pose  $s = 0$ , on obtient

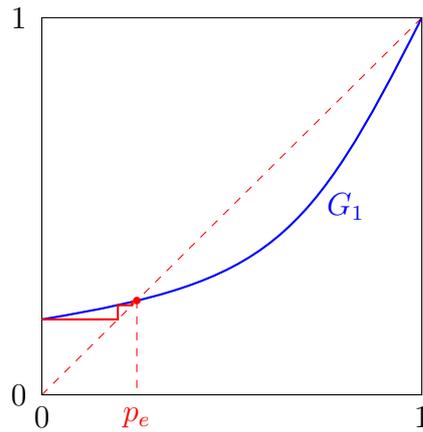
$$G_n(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1[X_n = k] 0^k = \mathbb{P}_1[X_n = 0].$$

Donc,  $p_e = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (G_1)^{\circ n}(0)$ .

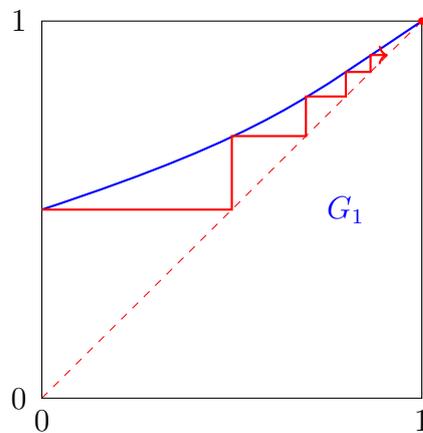
(e) La fonction  $G_1(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(k) s^k$  est croissante, convexe, bien définie au moins pour  $s \in [0, 1]$ . Sa dérivée sur cet intervalle est

$$G_1'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k \mu(k) s^{k-1}.$$

En particulier,  $G_1'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k \mu(k) = m$ . Si  $m > 1$ ,  $G_1$  et la suite  $(G_1)^{\circ n}(0)$  ont l'aspect suivant (considérer les abscisses successives des points sur l'«escalier» et sur la diagonale) :



On a donc dans ce cas  $p_e < 1$ . Inversement, si  $m \leq 1$ , alors  $G_1$  et la suite  $(G_1)^{\circ n}(0)$  ont l'aspect suivant :



On a donc dans ce cas  $p_e = 1$ .