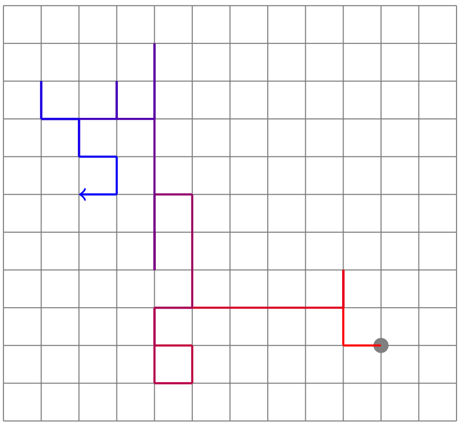
Durée : 3 heures. Les notes de cours (polycopiés ou notes manuscriptes) sont autorisées. Sont interdits : livres, calculatrices, téléphones, ordinateurs ou objets apparentés. Toutes les réponses doivent être justifiées, et la rédaction sera prise en compte. On pourra admettre un résultat d'une question précédente si nécessaire.

Dans tout le problème, $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}^2$ désigne l'ensemble des paires $v = (x, y)$ d'entiers relatifs, et on note $|v| = |x| + |y|$ la norme d'un vecteur dans $\mathfrak{X}$. Si $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on notera $\operatorname{sgn}(x) \in \{+1, -1\}$ son signe. On convient également que $\operatorname{sgn}(0) = 0$. On s'intéresse à une famille de chaînes de Markov d'espace d'états $\mathfrak{X}$ et dépendant d'un paramètre réel α ; la figure ci-dessus représente un tirage avec 50 pas et $\alpha = -0.5$. On cherchera en particulier à déterminer le caractère récurrent ou transient de la marche aléatoire en fonction de la valeur du paramètre α.



Partie I. Marche aléatoire de paramètre α sur le réseau $\mathbb{Z}^2$.

I.1 Si $v \in \mathfrak{X}$, les voisins de v sont les vecteurs $w \in \mathfrak{X}$ tels que $|v - w| = 1$. Montrer que pour tout $v \in \mathfrak{X}$, l'ensemble V_v des voisins de v contient quatre éléments, et que si $w \in V_v$, alors

$$|w| \in \{|v| - 1,\ |v| + 1\}.$$

I.2 Montrer plus précisément que

$$\operatorname{card}\,\{\, w \in V_v \mid |w| = |v| + 1 \,\} = \begin{cases} 2 & \text{si } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0, \\ 3 & \text{si } (x \neq 0 \text{ et } y = 0) \text{ ou } (x = 0 \text{ et } y \neq 0), \\ 4 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$$

Dans ce qui suit, on notera respectivement

$$\mathfrak{X}_0 = \{(0, 0)\};$$
$$\mathfrak{X}_1 = \{\, (x, y) \in \mathfrak{X} \mid (x \neq 0 \text{ et } y = 0) \text{ ou } (x = 0 \text{ et } y \neq 0) \,\};$$
$$\mathfrak{X}_2 = \{\, (x, y) \in \mathfrak{X} \mid x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \,\}.$$

Dessiner ces trois ensembles. *Dans la suite du problème, si une propriété est demandée pour tout $v \in \mathfrak{X}$, il pourra être utile de traiter séparément les cas d'un vecteur dans $\mathfrak{X}_0$, dans $\mathfrak{X}_1$ et dans $\mathfrak{X}_2$.*

I.3 Dans tout ce qui suit, $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre fixé. On définit une fonction de transition $P(v,w)$ sur les paires de vecteurs dans $\mathfrak{X}$ par la formule suivante :

$$P(v,w) = \begin{cases} \frac{(1+|w|)^\alpha}{2(|v|)^\alpha+2(2+|v|)^\alpha} & \text{si } v \in \mathfrak{X}_2 \text{ et } w \in V_v, \\ \frac{(1+|w|)^\alpha}{(|v|)^\alpha+3(2+|v|)^\alpha} & \text{si } v \in \mathfrak{X}_1 \text{ et } w \in V_v, \\ \frac{1}{4} & \text{si } v \in \mathfrak{X}_0 \text{ et } w \in V_v, \\ 0 & \text{si } w \notin V_v. \end{cases}$$

Montrer que $(P(v,w))_{(v,w)\in\mathfrak{X}^2}$ est une matrice stochastique d'espace d'états $\mathfrak{X}$, et que la chaîne de Markov correspondante est irréductible.

I.4 Si $v = (x,y) \in \mathfrak{X}_2$ et $t \in [0,1]$, on pose :

$$f((x,y),t) = \begin{cases} (x+\mathrm{sgn}(x), y) & \text{si } 0 \le t \le \frac{(2+|v|)^\alpha}{2(|v|)^\alpha+2(2+|v|)^\alpha}, \\ (x, y+\mathrm{sgn}(y)) & \text{si } \frac{(2+|v|)^\alpha}{2(|v|)^\alpha+2(2+|v|)^\alpha} < t \le \frac{2(2+|v|)^\alpha}{2(|v|)^\alpha+2(2+|v|)^\alpha}, \\ (x-\mathrm{sgn}(x), y) & \text{si } \frac{2(2+|v|)^\alpha}{2(|v|)^\alpha+2(2+|v|)^\alpha} \le t \le \frac{(|v|)^\alpha+2(2+|v|)^\alpha}{2(|v|)^\alpha+2(2+|v|)^\alpha}, \\ (x, y-\mathrm{sgn}(y)) & \text{si } \frac{(|v|)^\alpha+2(2+|v|)^\alpha}{2(|v|)^\alpha+2(2+|v|)^\alpha} < t \le 1. \end{cases}$$

Soit U une variable uniformément distribuée sur $[0,1]$: pour tous $a < b$ dans le segment $[0,1]$, $\mathbb{P}[a \le U \le b] = b - a$. Montrer que la variable aléatoire $W = f(v,U)$ a pour loi $P(v,\cdot)$:

$$\forall w \in \mathfrak{X},\ \mathbb{P}[f(v,U) = w] = P(v,w).$$

I.5 Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées sur $[0,1]$. On étend la définition de la fonction $f : \mathfrak{X} \times [0,1] \to \mathfrak{X}$ au cas où le premier paramètre v appartient à $\mathfrak{X}_0$ ou à $\mathfrak{X}_1$ comme suit. Si $v \in \mathfrak{X}_0$, on pose :

$$f(v,t) = \begin{cases} (-1,0) & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{4}, \\ (1,0) & \text{si } \frac{1}{4} < t \le \frac{1}{2}, \\ (0,1) & \text{si } \frac{1}{2} < t \le \frac{3}{4}, \\ (0,-1) & \text{si } \frac{3}{4} < t \le 1, \end{cases}$$

et si $v = (x,y) \in \mathfrak{X}_1$, on pose :

$$f(v,t) = \begin{cases} (x+\mathrm{sgn}(x), y+\mathrm{sgn}(y)) & \text{si } 0 \le t \le \frac{(2+|v|)^\alpha}{(|v|)^\alpha+3(2+|v|)^\alpha}, \\ (x+\mathrm{sgn}(y), y-\mathrm{sgn}(x)) & \text{si } \frac{(2+|v|)^\alpha}{(|v|)^\alpha+3(2+|v|)^\alpha} < t \le \frac{2(2+|v|)^\alpha}{(|v|)^\alpha+3(2+|v|)^\alpha}, \\ (x-\mathrm{sgn}(y), y+\mathrm{sgn}(x)) & \text{si } \frac{2(2+|v|)^\alpha}{(|v|)^\alpha+3(2+|v|)^\alpha} < t \le \frac{3(2+|v|)^\alpha}{(|v|)^\alpha+3(2+|v|)^\alpha}, \\ (x-\mathrm{sgn}(x), y-\mathrm{sgn}(y)) & \text{si } \frac{3(2+|v|)^\alpha}{(|v|)^\alpha+3(2+|v|)^\alpha} \le t \le 1. \end{cases}$$

On admet que la propriété $\mathbb{P}[f(v,U) = w] = P(v,w)$ pour U uniformément distribuée sur $[0,1]$ reste vraie pour $v \in \mathfrak{X}_0 \cup \mathfrak{X}_1$. Que peut-on alors dire de la suite de vecteurs aléatoires $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$V_0 = (0,0) \qquad ; \qquad V_{n+1} = f(V_n, U_n) \quad ?$$

Partie II. Mesure invariante de la marche. La suite du problème est consacrée à l'étude d'une chaîne de Markov $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'état initial $V_0 = (0,0)$ et de matrice de transition P définie par la question I.3.

II.1 Pour $v \in \mathfrak{X}$, on pose $g(v) = (1 + |v|)^{\alpha}$. Montrer que pour tous $(v, w) \in \mathfrak{X}^2$, on a

$$P(v, w) = 1_{(v \sim w)} \frac{g(w)}{\sum_{u \in V_v} g(u)},$$

$1_{(v \sim w)}$ étant la fonction indicatrice de l'événement (v et w sont voisins).

II.2 On pose

$$h(v) = g(v) \left(\sum_{u \in V_v} g(u) \right).$$

Donner une formule explicite pour $h(v)$ si $v \in \mathfrak{X}_2$ (on demande une formule qui ne fasse intervenir que $|v|$ et le paramètre α). Montrer que h vérifie la relation $h(v)\, P(v, w) = h(w)\, P(w, v)$ pour tous $(v, w) \in \mathfrak{X}^2$.

II.3 Montrer que h est une mesure invariante de la chaîne de Markov $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

II.4 On suppose $\alpha < 0$. Donner un équivalent simple de $h(v)$ lorsque $|v|$ tend vers l'infini. L'équivalence de toutes les normes dans $\mathbb{R}^2$ et une comparaison série-intégrale montrent que pour $\beta > 0$,

$$\left(\sum_{\substack{v \in \mathbb{Z}^2 \\ v \neq 0}} |v|^{-\beta} < +\infty \right) \text{ si et seulement si } \left(\iint_{\substack{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ x^2+y^2 \geq 1}} (\sqrt{x^2 + y^2})^{-\beta}\, dx\, dy < +\infty \right).$$

En déduire que la somme $\sum_{v \in \mathfrak{X}} h(v)$ est finie si et seulement si $\alpha < -1$.

II.5 Montrer que si $\alpha < -1$, alors la chaîne de Markov $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente positive. Que dire dans ce cas de $\mathbb{E}_0[T_0^+]$, avec $T_0^+ = \inf \{ n \geq 1 \mid V_n = (0, 0) \}$?

Partie III. Couplage avec une chaîne de vie et de mort.

III.1 Montrer que pour tout $v \in \mathfrak{X} \setminus \{(0, 0)\}$,

$$\mathbb{P}[|V_1| = |v| + 1 \,|\, V_0 = v] \geq \frac{1}{1 + (1 + \frac{2}{|v|})^{-\alpha}}.$$

III.2 On suppose dans tout ce qui suit $\alpha > 0$. On note $Q(k, l)$ la matrice stochastique sur $\mathbb{N}^2$ donnée par

$$Q(0, 1) = \frac{1}{1 + 3^{-\alpha}} \quad ; \quad Q(0, 0) = 1 - \frac{1}{1 + 3^{-\alpha}};$$

$$Q(k, k + 1) = \frac{1}{1 + (1 + \frac{2}{k+1})^{-\alpha}} \quad ; \quad Q(k, k - 1) = 1 - \frac{1}{1 + (1 + \frac{2}{k+1})^{-\alpha}} \quad \text{pour } k \geq 1.$$

On considère la même suite de variables aléatoires $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que dans la question I.5, et on définit une suite aléatoire $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation de récurrence :

$$X_0 = 0 \quad ; \quad X_{n+1} = g(X_n, U_n)$$

avec

$$g(k, t) = \begin{cases} k + 1 & \text{si } t \leq \frac{1}{1+(1+\frac{2}{k+1})^{-\alpha}}, \\ \max(0, k - 1) & \text{si } t > \frac{1}{1+(1+\frac{2}{k+1})^{-\alpha}}. \end{cases}$$

Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ de matrice de transition Q.

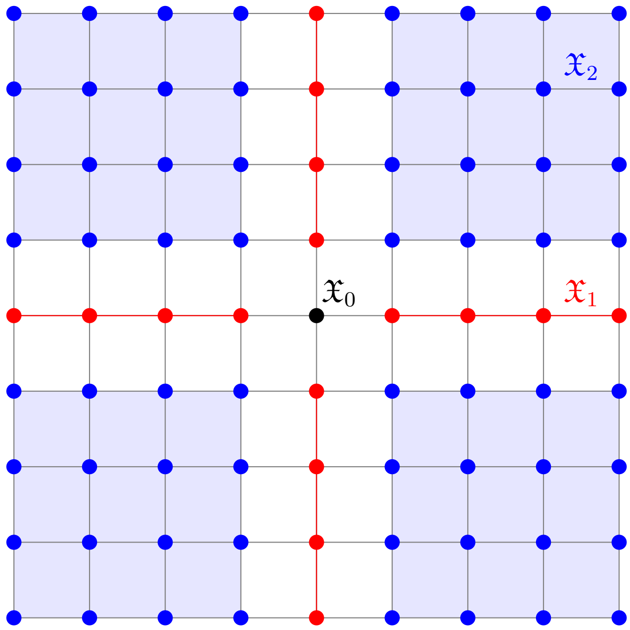
III.3 On construit la chaîne de Markov $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme dans la question I.5. Montrer par récurrence sur n que $|V_n| \geq X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. *Ceci permet de montrer que au moins pour $\alpha > \frac{1}{2}$, la chaîne $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est transiente.*

I.1 Si $|v-w| = 1$, alors le vecteur $w-v$ appartient à l'ensemble $E = \{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\}$ des quatre vecteurs de $\mathbb{Z}^2$ de norme 1. Donc, $w = v + e$ avec $e \in E$, et il y a quatre possibilités pour w : l'ensemble des voisins V_v est donc de toujours de cardinal 4. Remarquons de plus que tous les éléments de V_v diffèrent de $v = (x, y)$ en exactement une coordonnée : si $w \in V_v$, alors soit $w = (x', y)$ avec $x' - x \in \{+1, -1\}$, soit $w = (x, y')$ avec $y' - y \in \{+1, -1\}$. On a dans le premier cas :

$$|w| = |x'| + |y| \in \{|x| + |y| + 1, |x| + |y| - 1\} = \{|v| + 1, |v| - 1\},$$

et de même dans le second cas. Les voisins w de v sont donc tous de norme $|v| + 1$ ou $|v| - 1$.

I.2 L'ensemble $\mathfrak{X}_0$ contient seulement l'origine $(0,0)$; l'ensemble $\mathfrak{X}_1$ contient les axes (abscisse et ordonnée) privés de l'origine ; et l'ensemble $\mathfrak{X}_2$ est le reste des points du réseau $\mathbb{Z}^2$.



Pour évaluer le cardinal $c(v)$ de $\{\, w \in V_v \mid |w| = |v| + 1 \,\}$ en fonction de v, on peut utiliser une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, π ou $\frac{3\pi}{2}$ autour de l'origine pour se ramener au cas où $v = (x, y)$ avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$; en effet, ces rotations laissent stable $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}^2$ et conservent la distance $d(v, w) = |v-w|$, et elles permettent d'envoyer tout point du réseau sur l'un des quarts de plan.

- Si $v = (0,0)$, alors les quatre voisins de v sont $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ et $(0,-1)$, et ils ont tous norme 1, donc $c(v) = 4$.
- Si $v \in \mathfrak{X}_1$, alors l'utilisation des rotations permet de se ramener au cas où $v = (x, 0)$ avec $x > 0$. Alors, les trois voisins $(x+1, 0)$, $(x, 1)$ et $(x, -1)$ ont norme $|w| = x + 1 = |v| + 1$, et le voisin $(x-1, 0)$ a pour norme $|w| = x - 1 = |v| - 1$, donc $c(v) = 3$.
- Si $v \in \mathfrak{X}_2$, alors en supposant $x > 0$ et $y > 0$, on trouve deux voisins $(x+1, y)$ et $(x, y+1)$ de norme $|w| = x + y + 1 = |v| + 1$, et deux voisins $(x-1, y)$ et $(x, y-1)$ de norme $|w| = x + y - 1 = |v| - 1$, donc $c(v) = 2$.

I.3 Remarquons d'abord que $P(v, w) > 0$ pour tout $w \in V_v$, quelque soit le sommet $v \in \mathfrak{X}$. Étant donnés deux sommets $v_1 = (x_1, y_1)$ et $v_2 = (x_2, y_2)$ dans $\mathfrak{X}$, on peut trouver un chemin reliant v_1 à v_2 se déplaçant de voisin en voisin : par exemple, si $x_1 \leq x_2$ et $y_1 \leq y_2$, alors

$$(x_1, y_1), (x_1 + 1, y_1), \ldots, (x_2 - 1, y_1), (x_2, y_1), (x_2, y_1 + 1), \ldots, (x_2, y_2 - 1), (x_2, y_2)$$

convient, et les trois autres cas $(x_1 > x_2, y_1 \leq y_2)$, $(x_1 \leq x_2, y_1 > y_2)$ et $(x_1 > x_2, y_1 > y_2)$ sont semblables. Par conséquent, si l'on montre que P est une matrice stochastique, alors elle sera irréductible sur l'espace d'états $\mathfrak{X}$.

— Si $v = (0,0)$, alors on a bien

$$\sum_{w \in V_{(0,0)}} P((0,0), w) = \sum_{w \in V_{(0,0)}} \frac{1}{4} = 4 \times \frac{1}{4} = 1.$$

— Si $v \in \mathfrak{X}_1$, alors v a trois voisins de norme $|v|+1$, et un voisin de norme $|v|-1$, donc

$$\sum_{w \in V_v} P(v,w) = 3\,\frac{(2+|v|)^\alpha}{(|v|)^\alpha + 3(2+|v|)^\alpha} + \frac{(|v|)^\alpha}{(|v|)^\alpha + 3(2+|v|)^\alpha} = 1.$$

— Enfin, si $v \in \mathfrak{X}_2$, alors v a deux voisins de norme $|v|+1$ et deux voisins de norme $|v|-1$, donc

$$\sum_{w \in V_v} P(v,w) = 2\,\frac{(2+|v|)^\alpha}{2(|v|)^\alpha + 2(2+|v|)^\alpha} + 2\,\frac{(|v|)^\alpha}{2(|v|)^\alpha + 2(2+|v|)^\alpha} = 1.$$

Ainsi, la famille $(P(v,w))_{(v,w)\in\mathfrak{X}^2}$ est une famille de nombres positifs avec $\sum_{w \in V_v} P(v,w) = 1$ pour tout $v \in \mathfrak{X}$, donc c'est bien une matrice stochastique.

I.4 Remarquons que pour tout $v = (x,y)$ dans $\mathfrak{X}_2$, $(x + \operatorname{sgn}(x), y)$ et $(x, y + \operatorname{sgn}(y))$ sont les deux voisins de v de norme $|v|+1$, et $(x - \operatorname{sgn}(x), y)$ et $(x, y - \operatorname{sgn}(y))$ sont les deux voisins de v de norme $|v|-1$. Comme U est de loi uniforme sur $[0,1]$, si $w = f(v,U)$, alors les deux premiers voisins sont obtenus avec probabilité

$$\frac{(2+|v|)^\alpha}{2(|v|)^\alpha + 2(2+|v|)^\alpha}$$

et les deux derniers voisins sont obtenus avec probabilité

$$\frac{(|v|)^\alpha}{2(|v|)^\alpha + 2(2+|v|)^\alpha}.$$

On reconnaît dans les deux cas la formule $\frac{(1+|w|)^\alpha}{2(|v|)^\alpha + 2(2+|v|)^\alpha} = P(v,w)$, donc la variable $f(v,U)$ a pour loi la mesure de transition $P(v,\cdot)$.

I.5 Par le théorème de représentation des chaînes de Markov, puisque $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de variable i.i.d. avec $\mathbb{P}[f(v,U) = w] = P(v,w)$ pour tout $v \in \mathfrak{X}$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov (irréductible) d'espace d'états $\mathfrak{X}$ et de matrice de transition P.

II.1 Traitons séparément les cas $v \in \mathfrak{X}_0$, $v \in \mathfrak{X}_1$ et $v \in \mathfrak{X}_2$.

— Si $v = (0,0)$, alors $\sum_{u \in V_v} g(u) = \sum_{u \in V_v} 2^\alpha = 4 \times 2^\alpha$, et $g(w) = 2^\alpha$ pour tout voisin de v, donc

$$P(v,w) = \frac{1}{4} = \frac{g(w)}{\sum_{u \in V_v} g(u)}$$

pour tout $w \in V_v$.

— Si $v \in \mathfrak{X}_1$, alors $\sum_{u \in V_v} g(u) = (|v|)^\alpha + 3(2+|v|)^\alpha$, donc

$$P(v,w) = \frac{(1+|w|)^\alpha}{(|v|)^\alpha + 3(2+|v|)^\alpha} = \frac{g(w)}{\sum_{u \in V_v} g(u)}$$

pour tout $w \in V_v$.

— Enfin, si $v \in \mathfrak{X}_1$, alors $\sum_{u \in V_v} g(u) = 2(|v|)^\alpha + 2(2+|v|)^\alpha$, donc de nouveau

$$P(v,w) = \frac{(1+|w|)^\alpha}{2(|v|)^\alpha + 2(2+|v|)^\alpha} = \frac{g(w)}{\sum_{u \in V_v} g(u)}$$

pour tout $w \in V_v$.

II.2 Si $v \in \mathfrak{X}_2$, on a :

$$h(v) = 2\,(|v|(1+|v|))^\alpha + 2\,((1+|v|)(2+|v|))^\alpha.$$

Notons tout de suite que pour $\alpha \neq 0$, $h(v)$ est équivalent à $4\,|v|^{2\alpha}$ lorsque $|v|$ tend vers l'infini avec $v \in \mathfrak{X}_2$. Ce sera encore vrai si $v \in \mathfrak{X}_1$, car dans ce cas

$$h(v) = (|v|(1+|v|))^\alpha + 3\,((1+|v|)(2+|v|))^\alpha.$$

Si v et w sont deux vecteurs de $\mathfrak{X}$, on a $h(v)\,P(v,w) = h(w)\,P(w,v) = 0$ si v et w ne sont pas voisins. S'ils sont voisins, alors

$$h(v)\,P(v,w) = g(v)\,\left(\sum_{u \in V_v} g(u)\right)\,\frac{g(w)}{\sum_{u \in V_v} g(u)} = g(v)\,g(w)$$

et symétriquement, $h(w)\,P(w,v) = g(w)\,g(v)$; l'identité de réversibilité est donc aussi vraie dans ce cas.

II.3 On rappelle que toute mesure réversible est invariante : en effet,

$$(hP)(v) = \sum_{w \in V_v} h(w)\,P(w,v) = \sum_{w \in V_v} h(v)\,P(v,w) = h(v) \times 1 = h(v).$$

II.4 On a expliqué ci-dessus l'équivalent $h(v) \simeq 4\,|v|^{2\alpha}$ pour $\alpha < 0$ et $|v| \to +\infty$. La mesure h est donc de masse finie si et seulement si

$$\left(\sum_{\substack{v \in \mathfrak{X} \\ v \neq 0}} |v|^{2\alpha} < +\infty\right) \Leftrightarrow \left(\iint_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \\ x^2+y^2 \geq 1}} (x^2+y^2)^\alpha\,dx\,dy < +\infty\right).$$

Un changement en variables polaires permet de calculer l'intégrale à droite :

$$I = 2\pi \int_{r=1}^{\infty} r^{2\alpha}\,r\,dr = \begin{cases} -\frac{\pi}{1+\alpha} & \text{si } \alpha < -1, \\ +\infty & \text{si } \alpha \geq -1. \end{cases}$$

Ainsi, la mesure invariante h est de masse finie si et seulement si $\alpha < -1$ (lorsque $\alpha \geq 0$, $h(v) \geq 4$ pour tout $v \in \mathfrak{X}$, donc la somme est clairement infinie).

II.5 Si $\alpha < -1$, alors la chaîne de Markov irréductible $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une mesure invariante de masse finie, donc elle est récurrente positive. Son unique mesure de probabilité invariante est $\pi(v) = \frac{h(v)}{\sum_{w \in \mathfrak{X}} h(w)}$, et on a

$$\mathbb{E}_0[T_0^+] = \frac{1}{\pi((0,0))} = \frac{1}{4 \times 2^\alpha} \sum_{w \in \mathfrak{X}} h(w) < +\infty.$$

III.1 Si $v \in \mathfrak{X}_2$, alors v a deux voisins de norme $|w| = |v| + 1$, et les probabilités de transition vers ces deux voisins sont toutes deux égales à $\frac{(2+|v|)^\alpha}{2(|v|)^\alpha+2(2+|v|)^\alpha}$, donc

$$\mathbb{P}[|V_1| = |v| + 1 \,|\, V_0 = v] = \frac{2(2+|v|)^\alpha}{2(|v|)^\alpha + 2(2+|v|)^\alpha} = \frac{1}{1 + (1 + \frac{2}{|v|})^{-\alpha}}.$$

Si $v \in \mathfrak{X}_1$, alors v a trois voisins de norme $|w| = |v| + 1$, donc par le même raisonnement,

$$\mathbb{P}[|V_1| = |v| + 1 \,|\, V_0 = v] = \frac{3(2+|v|)^\alpha}{(|v|)^\alpha + 3(2+|v|)^\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}(1 + \frac{2}{|v|})^{-\alpha}}.$$

Cette probabilité est plus grande que la précédente.

III.2 Puisque $\mathbb{P}[g(k,U) = l] = Q(k,l)$ pour tout couple d'entiers $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, c'est immédiat par le théorème de représentation des chaînes de Markov.

III.3 Comme $|V_0| = X_0 = 0$, l'inégalité est vraie pour $n = 0$. Supposons $|V_n| \geq X_n$. Si $|V_n| \geq X_n+2$, alors comme $X_{n+1} \leq X_n + 1$ et $|V_{n+1}| \geq |V_n| - 1$, on a encore $|V_{n+1}| \geq X_{n+1}$. Traitons les cas restants :

- $|V_n| = X_n + 1 = k + 1$, $k \geq 0$. Il faut alors montrer qu'on ne peut pas avoir $|V_{n+1}| = k$ et $|X_{n+1}| = k + 1$. Or, par la question III.1, la première identité implique que

  $$U_n > \frac{1}{1 + (1 + \frac{2}{k+1})^{-\alpha}}$$

  et la seconde implique que

  $$U_n \leq \frac{1}{1 + (1 + \frac{2}{k+1})^{-\alpha}};$$

  les deux inégalités sont incompatibles.

- $|V_n| = X_n = k$, $k \geq 1$. Il faut montrer qu'on ne peut pas avoir $|V_{n+1}| = k - 1$ et $X_{n+1} = k + 1$. Comme précédemment, on aurait alors

  $$\frac{1}{1 + (1 + \frac{2}{k})^{-\alpha}} < U_n \leq \frac{1}{1 + (1 + \frac{2}{k+1})^{-\alpha}},$$

  ce qui est impossible car $\alpha > 0$.

- $|V_n| = X_n = 0$. Alors, on a forcément $|V_{n+1}| = 1 \geq X_{n+1}$.