Chaînes de Markov :

la méthode d'un pas en avant.

1. Propriété de Markov simple

Les chaînes de Markov ont des propriétés :

- d'homogénéité en temps (la probabilité de transition $P(x,y) = \mathbb{P}[X_n = y \mid X_{n-1} = x]$ ne dépend pas de n)

- d'indépendance : conditionnellement à $X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n$, la loi de X_{n+1} est $P(x_n, \cdot)$ et ne dépend pas de $x_0 \dots x_{n-1}$.

Propriété de Markov : réinterprétation de ces propriétés.

<u>Théorème</u> Soit $\mathcal{X}$ un espace d'états

P matrice stochastique, π_0 loi initiale,

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CM de loi $\mathbb{P}_{(\pi_0, P)}$

Pour tout $x \in \mathcal{X}$, conditionnellement à l'événement $\{X_1 = x\}$, la chaîne décalée $(X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est encore une CM, de loi $\mathbb{P}_{(x,P)}$.

Autrement dit, pour tout événement $A \subset \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$,

$$\mathbb{P}_{\pi_0}\left[(X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \in A \mid X_1 = x \right] = \mathbb{P}_x \left[(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A \right].$$

<u>Preuve :</u> La probabilité $\mathbb{P}_{\pi_0}(X_1 = x)$ est $\pi_1(x) = \pi_0 P(x) = \sum_{\omega\in\mathcal{X}} \pi_0(\omega) P(\omega, x)$.

Alors, pour tout cylindre $C(y_0, \dots y_n)$:

$$\mathbb{P}_{\pi_0}[X_1 = y_0, X_2 = y_1, \dots X_{n+1} = y_n \mid X_1 = x]$$

$$= \frac{\delta_x(y_0)}{\mathbb{P}_{\pi_0}[X_1 = x]} \mathbb{P}_{\pi_0}[X_1 = y_0, \dots X_{n+1} = y_n]$$

$$= \frac{\delta_x(y_0)}{\sum_{\omega \in \mathcal{X}} \pi_0(\omega) P(\omega, x)} \sum_{\omega \in \mathcal{X}} \mathbb{P}_{\pi_0}[X_0 = \omega, X_1 = y_0 \dots X_{n+1} = y_n]$$

$$= \frac{\delta_x(y_0) \sum_{\omega \in \mathcal{X}} \pi_0(\omega) \underbrace{P(\omega, y_0)}_{= P(\omega, x)} P(y_0, y_1) \dots P(y_{n-1}, y_n)}{\sum_{\omega \in \mathcal{X}} \pi_0(\omega) P(\omega, x)}$$

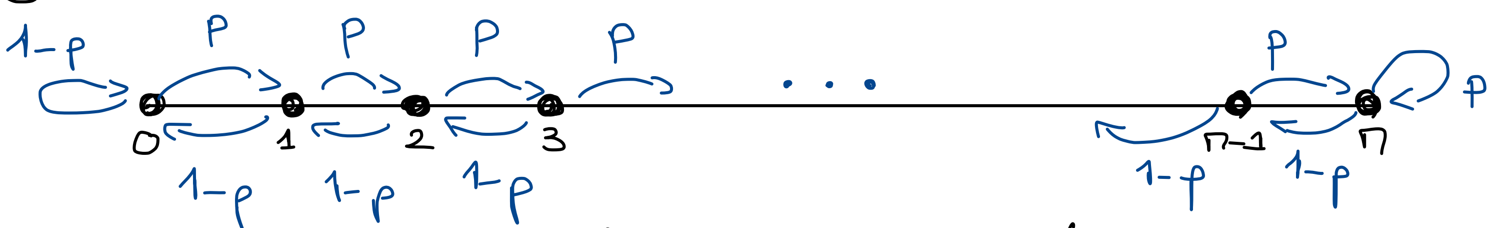
$$= \delta_x(y_0) P(y_0, y_1) \dots P(y_{n-1}, y_n). \qquad \square$$

2. Probabilité de ruine dans le modèle de ruine du joueur.

On considère la chaîne de Markov de la ruine du joueur

$\mathcal{X} = [\![0, N]\!]$

graphe de la matrice de transition :



On pose $\tau_0 = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = 0\}$

$=$ temps d'atteinte (aléatoire) de l'état 0

(par convention, $\tau_0 = +\infty$ si $0 \notin \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$).

On définit de même :

$$\tau_N = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = N\}$$

$$\tau = \min(\tau_0, \tau_N) = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n \in \{0, N\}\}.$$

<u>Questions</u> : – a-t-on τ fini ? que vaut $\mathbb{E}_k[\tau]$, $k \in [\![0, N]\!]$?

– si τ est fini, avec quelle probabilité a-t-on $\tau = \tau_0$?

On introduit $f(k) = \mathbb{P}_k[\tau < +\infty \text{ et } \tau = \tau_0]$.

$=$ probabilité de ruine partant de k

Propriété de Markov $\Longrightarrow$ équation de récurrence satisfaite par f.

Remarquons pour commencer :

$$f(0) = 1, \quad f(N) = 0.$$

<u>méthode d'un pas en avant</u> : calculer $f(k)$ en conditionnant par rapport au premier pas X_1.

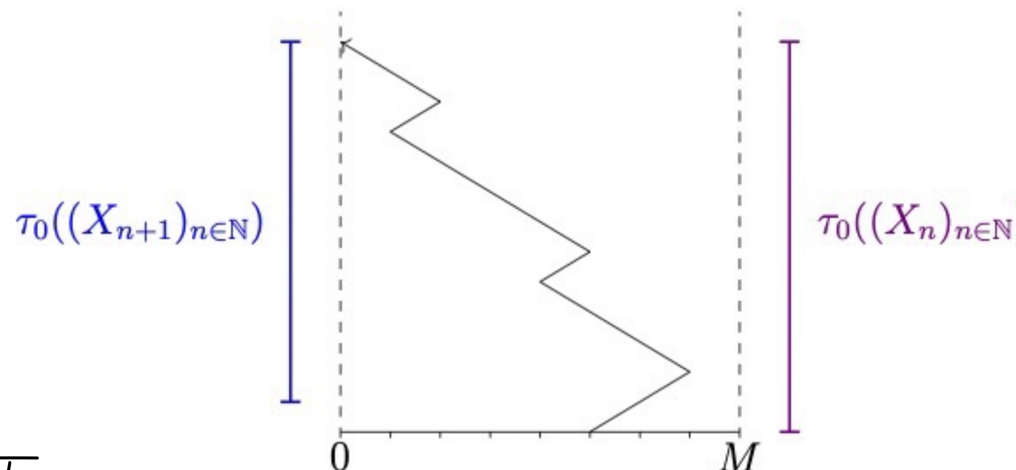
On peut voir τ, τ_0, τ_M comme des fonctions de la trajectoire aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Alors, si $X_0 \notin \{0, M\}$,

$\tau_0((X_n)_{n\in\mathbb{N}})$

$= 1 + \tau_0((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}})$

et de même pour τ_M, τ.



Pour $k \neq 0, N$:

$$f(k) = \mathbb{P}_k\left[\tau((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) < +\infty \text{ et } \tau((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \tau_0((X_n)_{n\in\mathbb{N}})\right]$$

$$= \mathbb{P}_k\left[\tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) < +\infty \text{ et } \tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) = \tau_0((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}})\right]$$

$$= \mathbb{P}_k[X_1 = k+1]\, \mathbb{P}_k\left[\tau((X_{n+1})) \text{ est fini et égal à } \tau_0((X_{n+1})) \,\middle|\, X_1 = k+1\right]$$

$$+ \mathbb{P}_k[X_1 = k-1]\, \mathbb{P}_k\left[\tau((X_{n+1})) \text{ est fini et égal à } \tau_0((X_{n+1})) \,\middle|\, X_1 = k-1\right]$$

$$= p\, \mathbb{P}_{k+1}\left[\tau((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) \text{ est fini et égal à } \tau_0((X_n)_{n\in\mathbb{N}})\right]$$

propriété de Markov

$$+ (1-p)\, \mathbb{P}_{k-1}\left[\tau((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) \text{ est fini et égal à } \tau_0((X_n)_{n\in\mathbb{N}})\right]$$

$$= p f(k+1) + (1-p) f(k-1).$$

Traitons le cas particulier $p = \frac{1}{2}$.

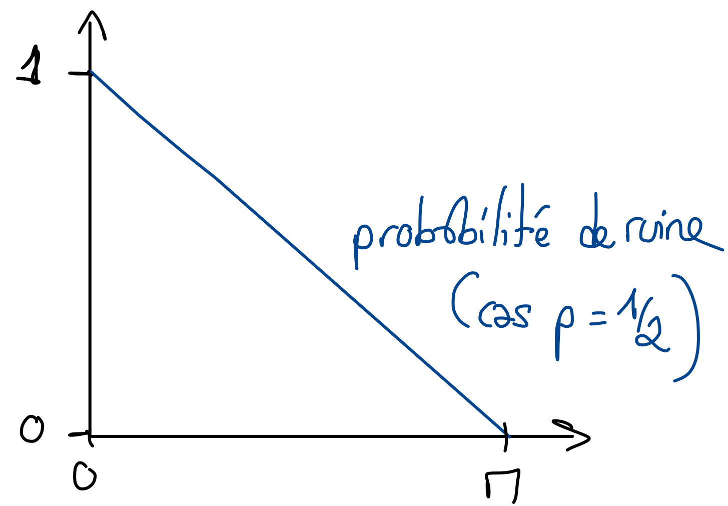
$$f(k) = \frac{1}{2} f(k+1) + \frac{1}{2} f(k-1)$$

$$\iff \frac{1}{2}\big(f(k) - f(k-1)\big) = \frac{1}{2}\big(f(k+1) - f(k)\big)$$

$$\iff f(k) - f(k-1) = f(k+1) - f(k)$$ pente constante.

$$f(0) = 1, \quad f(n) = 0$$

$$\implies f(k) = 1 - \frac{k}{n}.$$



3. Espérance du temps de jeu.

On peut calculer avec les mêmes techniques d'autres quantités

par exemple : $g(k) = \mathbb{E}_k[\tau]$ = espérance du temps de jeu.

$g(0) = g(N) = 0$.

Traitons le cas $p = 1/2$.

Si $k \neq 0, N$:

$$\begin{aligned} g(k) &= \mathbb{E}_k[\tau((X_n)_{n\in\mathbb{N}})] \\ &= 1 + \mathbb{E}_k[\tau((X_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}] \\ &= 1 + \mathbb{P}_k[X_1 = k+1]\, \mathbb{E}_k[\tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) \mid X_1 = k+1] \\ &\quad + \mathbb{P}_k[X_1 = k-1]\, \mathbb{E}_k[\tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \mid X_1 = k-1] \end{aligned}$$

La propriété de Markov passe aux espérances :

$$\mathbb{E}_k\left[\tau\left((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}\right) \mid X_1 = k+1\right]$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} t \cdot \mathbb{P}_k\left[\tau\left((X_{n+1})_n\right) = t \mid X_1 = k+1\right]$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} t \cdot \mathbb{P}_{k+1}\left[\tau\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = t\right]$$

$$= \mathbb{E}_{k+1}\left[\tau\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\right] = g(k+1)$$

On en déduit l'équation de récurrence :

$$g(k) = 1 + \frac{1}{2} g(k+1) + \frac{1}{2} g(k-1).$$

On résoud en posant $\delta_g(k) = g(k+1) - g(k)$.

On a $\sum_{k=0}^{n-1} \delta_g(k) = g(n) - g(0) = 0$

et $\delta_g(k) = \delta_g(k-1) - 2$.

$\Longrightarrow \delta_g(k) = \delta_g(0) - 2k$

et $0 = \sum_{k=0}^{n-1} \delta_g(0) - 2k = n\,\delta_g(0) - 2\sum_{k=0}^{n-1} k$

$= n\,\delta_g(0) - n(n-1) \Rightarrow \delta_g(0) = n-1$.

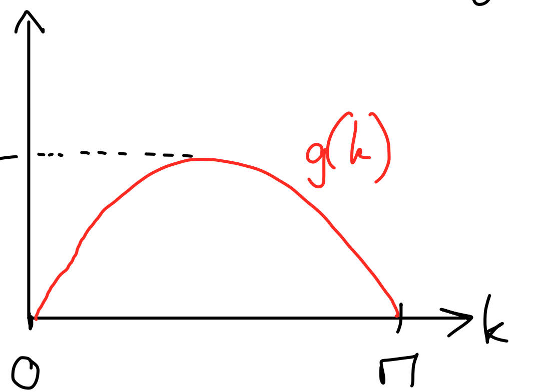
On obtient finalement : $\delta_g(k) = n - 1 - 2k$

puis : $g(k) = \sum_{j=0}^{k-1} \delta_g(j) = k(n-1) - 2\sum_{j=0}^{k-1} j$

$= k(n-1) - k(k-1)$

Ainsi, $g(k) = k(n-k)$ fonction quadratique.

temps de jeu maximal pour $k \sim \frac{n}{2}$.



4. Vers la propriété de Markov forte.

propriété de Markov simple : conditionnellement à $X_1 = x$, la chaîne décalée en temps $(X_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ suit une loi $\mathbb{P}_x$.

propriété de Markov forte : généralisation pour une chaîne décalée $(X_{n+T})_{n\in\mathbb{N}}$ avec T temps aléatoire.

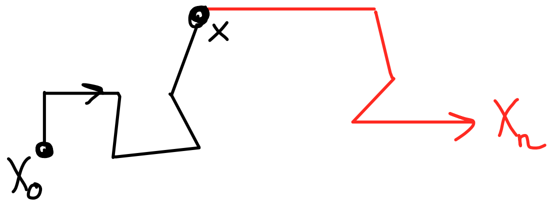
<u>Proposition</u> Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CM de loi $\mathbb{P}_{(\pi_0, P)}$ sur un espace d'états $\mathcal{X}$.

$x \in \mathcal{X}$, $t \geq 1$

$\tau_x^+ = \inf\{n \geq 1 \mid X_n = x\}$ temps de premier retour en x

Conditionnellement à $\{\tau_x^+ = t\}$, la chaîne décalée $(X_{n+t})_{n\in\mathbb{N}}$

- suit une loi $\mathbb{P}_{(x, P)}$;
- est indépendante de $(X_0, X_1, \dots, X_{t-1})$.



Conditionnellement à $\{\tau_x^+ = t\}$, la partie rouge est une trajectoire aléatoire de loi $\mathbb{P}_x$, indépendante du passé.

<u>Preuve</u> : On a $\mathbb{P}_{\pi_0}[\tau_x^+ = t]$

$$= \sum_{\substack{x_0 \in \mathcal{X} \\ x_1 \dots x_{t-1} \neq x}} \pi_0(x_0) P(x_0, x_1) \dots P(x_{t-1}, x)$$

Puis, $\mathbb{P}_{\pi_0}[X_0 = y_0, \dots X_{t-1} = y_{t-1}, \tau_{x^+} = t, X_{t+1} = z_1, \dots, X_{t+n} = z_n]$

$$= \pi_0(y_0) P(y_0, y_1) \dots \quad P(y_{t-1}, x) P(x, z_1) P(z_1, z_2) \dots P(z_{n-1}, z_n)$$

pour tout $y_0 \in \mathcal{X}$ et $y_1 \dots y_{t-1} \neq x$.

En prenant le ratio, on obtient :

$$\mathbb{P}_{\pi_0}\left[(X_0 \dots X_{t-1}) = (y_0 \dots y_{t-1}) \text{ et } (X_{t+1} \dots X_{t+n}) = (z_1 \dots z_n) \,\middle|\, \tau_x^+ = t \right]$$

$$= \underbrace{\frac{\pi_0(y_0)\, P(y_0, y_1) \dots P(y_{t-1}, x)}{\displaystyle\sum_{\substack{x_0 \in \mathcal{X} \\ x_1 \dots x_{t-1} \neq x}} \pi_0(x_0)\, P(x_0, x_1) \dots P(x_{t-1}, x)}}_{\text{loi de } (X_0 \dots X_{t-1})} \times \underbrace{P(x, z_1)\, P(z_1, z_2) \dots P(z_{n-1}, z_n)}_{\mathbb{P}_x\left[(X_0 \dots X_n) = (x, z_1, \dots z_n)\right]}$$

$\square$