Vitesse de convergence du modèle d'Ising

1. Vitesse de convergence et couplages

<u>Définition</u> : Soit π et ρ deux mesures de probabilité sur un espace d'états $\mathcal{X}$. Un couplage entre π et ρ est une mesure de probabilité M sur $\mathcal{X}^2$ telle que :

$$\forall x, \sum_{y \in \mathcal{X}} M(x,y) = \pi(x) \quad ; \quad \forall y, \sum_{x \in \mathcal{X}} M(x,y) = \rho(y).$$

Par abus de langage, on dira qu'un couple de variables aléatoires (X, Y) est un couplage de π et ρ si sa loi jointe M est un couplage de π et ρ.
$\Longleftrightarrow$ les lois marginales de X et Y sont π et ρ.

<u>Théorème</u> : $d_{TV}(\pi, \rho) = \min_{(X,Y) \text{ couplage}} \mathbb{P}[X \neq Y]$.

<u>Preuve</u> : On montre d'abord que la distance est plus petite que $\mathbb{P}[X \neq Y]$ pour tout couplage :

$$\pi(A) - \rho(A) = \mathbb{P}[X \in A] - \mathbb{P}[Y \in A]$$
$$\leq \mathbb{P}[X \in A] - \mathbb{P}[Y \in A \text{ et } X \in A] = \mathbb{P}[X \in A \text{ et } Y \notin A]$$
$$\leq \mathbb{P}[X \neq Y],$$

donc par passage à la borne supérieure :

$$d_{TV}(\pi, \rho) = \sup_{A \subset \mathcal{X}} (\pi(A) - \rho(A)) \leq \mathbb{P}[X \neq Y]$$

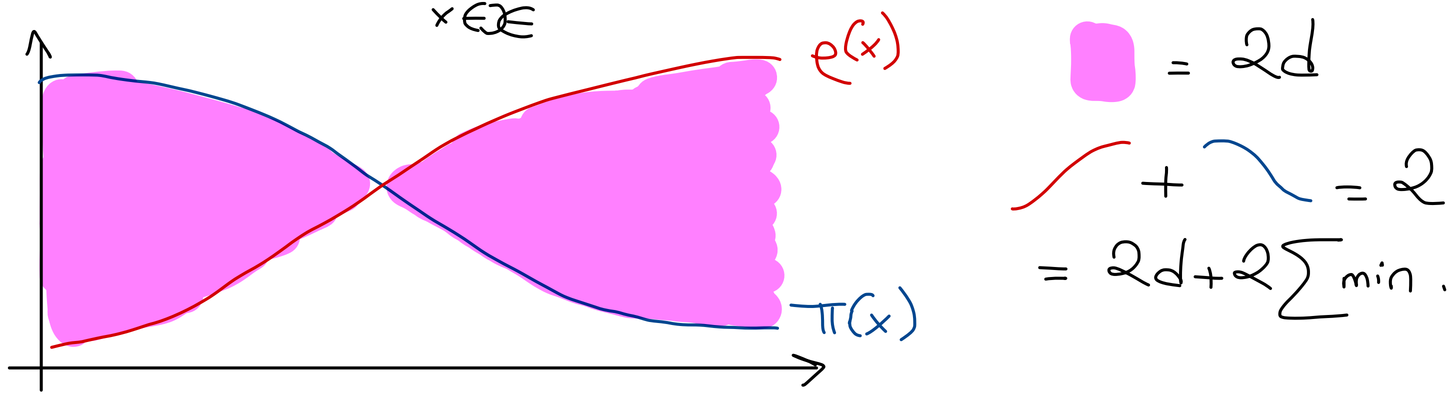
On construit maintenant un couplage optimal.

Si $d_{TV}(\pi, \rho) = 0$, $\pi = \rho$ et on peut prendre $X = Y$.

Si $d_{TV}(\pi, \rho) = 1$, π et ρ sont à supports disjoints et tout couplage convient.

Supposons maintenant $0 < d_{TV}(\pi, \rho) < 1$

<u>Lemme</u> : $1 - d_{TV}(\pi, \rho) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \min(\pi(x), \rho(x))$



On définit 4 variables indépendantes :

$$B \sim \text{Bernoulli}(1-d)$$

$$U \sim \frac{\min(\pi(x), \rho(x))}{1-d}$$

$$\left.\begin{aligned} V &\sim \frac{\pi(x) - \min(\pi(x), \rho(x))}{d} \\ W &\sim \frac{\rho(x) - \min(\pi(x), \rho(x))}{d} \end{aligned}\right\} \text{ à supports disjoints.}$$

et finalement
$$X = BU + (1-B)V$$
$$Y = BU + (1-B)W$$

On a $\mathbb{P}[X \neq Y] = \mathbb{P}[B = 0] = d$

Par ailleurs, X a bien loi π :

$$\mathbb{P}[X=x] = \underbrace{\min(\pi(x),\rho(x))}_{\mathbb{P}[B=1 \text{ et } U=x]} + \underbrace{\pi(x)-\min(\pi(x),\rho(x))}_{\mathbb{P}[B=0 \text{ et } V=x]} = \pi(x)$$

et de même, Y a loi ρ. $\square$.

<u>Application</u> Supposons donnée une distance D sur $\mathcal{X}$ telle que $D(x,y) \geq 1$ si $x \neq y$.

Alors, $d_{TV}(\pi,\rho) \leq \mathbb{E}[D(X,Y)]$ pour tout couplage (X,Y) de (π,ρ).

En particulier, pour une chaîne de Markov de loi invariante π, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim \mathbb{P}_{\pi_0}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors

$$d_{TV}(\pi_n, \pi) \leq \mathbb{E}[D(X_n, Y_n)].$$

2. Vitesse de convergence pour le modèle d'Ising.

rappels : • la mesure d'Ising de paramètre β sur $\mathcal{X}_N = \{\pm 1\}^{N^2}$ est

$$\mathbb{P}_{N,\beta}[\sigma] = \frac{1}{Z_{N,\beta}} \exp\Big(\beta \sum_{x \sim y} \sigma(x)\sigma(y)\Big)$$

• Cette mesure est réversible pour la chaîne de Markov dont les transitions se déroulent comme suit : partant d'une configuration σ,

1) on tire au hasard l'un des N^2 sites x de la grille, tous les sites étant équiprobables.

2) on change le signe de x en $+1$ avec probabilité

$$\frac{\exp\left(\beta \sum_{y : y \sim x} \sigma(y)\right)}{2\cosh\left(\beta \sum_{y : y\sim x} \sigma(y)\right)}$$

et en -1 avec la probabilité complémentaire $\frac{\exp(-\beta \dots)}{2\cosh(\beta \dots)}$.

Une distance naturelle sur les configurations de spins est :

$$d(\sigma, \sigma') = \sum_{x \in [\![1, N]\!]^2} \mathbb{1}(\sigma(x) \neq \sigma'(x))$$ = nbre de sites où σ et σ' diffèrent.

On a bien $d(\sigma, \sigma') \geq 1$ si $\sigma \neq \sigma'$, donc :

$d_{TV}(\pi, \rho) \leq \mathbb{E}[d(\sigma, \sigma')]$ $\forall (\sigma, \sigma')$ couplage de π et ρ.

on définit $d_C(\pi, \rho) = \min\limits_{(\sigma,\sigma') \text{ couplage}} \mathbb{E}[d(\sigma, \sigma')]$.

<u>Lemme difficile</u> : soit σ, τ deux configurations sur la grille $\mathbb{H}$ / $d(\sigma, \tau) = 1$. On suppose que $c(\beta) = 1 - 4\tanh(2\beta) > 0$ (vrai pour β petit).

Alors, $d_C(P(\sigma, \cdot), P(\tau, \cdot)) \leq \exp\left(-\frac{c(\beta)}{N^2}\right)$.

<u>Preuve</u> : on veut construire $\sigma_1 \sim P(\sigma, \cdot)$ avec

$\tau_1 \sim P(\tau, \cdot)$

$\mathbb{E}[d(\sigma_1, \tau_1))] \leq e^{-\frac{c(\beta)}{N^2}}$. Soit X uniforme sur $[\![1, N]\!]^2$;

U —— $[0, 1]$

X et U indépendant. On construit $\left|\begin{array}{l}\sigma_1 \text{ à partir de } \sigma \\ \tau_1 \text{ —— } \tau\end{array}\right.$ en utilisant le

même couple (X, U). Comme $d(\sigma, \tau) = 1$, il existe un

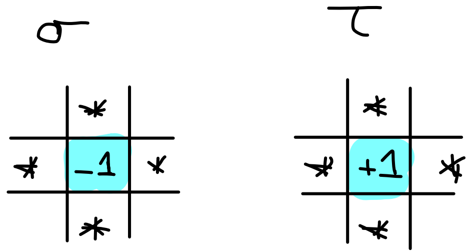
unique site x tel que $\sigma(x) \neq \tau(x)$, avec par exemple $\left|\begin{array}{l}\sigma(x) = -1 \\ \tau(x) = +1.\end{array}\right.$

$\sigma_1 = f(\sigma, X, U)$

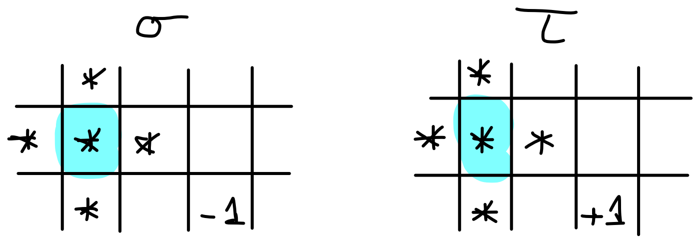
$\tau_1 = f(\tau, X, U)$

3 cas :

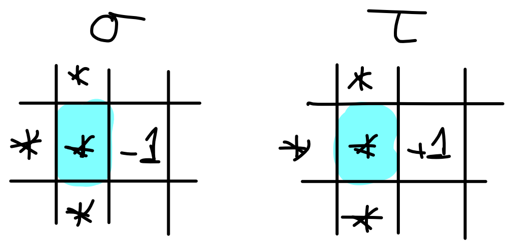
$X = x$



X loin de x



X voisin de x



1er cas : $X = x$. On met à jour $\left| \begin{array}{l} \sigma \to \sigma_1 \\ \tau \to \tau_1 \end{array} \right.$ en comparant U

au même seuil $\dfrac{\exp\left(\beta \sum_{y : y \sim x} \sigma(y)\right)}{2\cosh\left(\beta \sum_{y : y \sim x} \sigma(y)\right)} = \dfrac{\exp\left(\beta \sum_{y : y \sim x} \tau(y)\right)}{2\cosh\left(\beta \sum_{y : y \sim x} \tau(y)\right)}$

Donc, $\sigma_1(x) = \tau_1(x)$

et $\sigma_1(y) = \sigma(y) = \tau(y) = \tau_1(y) \quad \forall y \neq x$ $\Bigg| \Rightarrow \sigma_1 = \tau_1$.

2ème cas : $X \notin \{x, \text{voisins de } x\}$.

Alors, pour les mêmes raisons, $\sigma_1(X) = \tau_1(X)$

et $\sigma_1(y) = \tau_1(y) \quad \forall y \neq \{X, x\}$

$\Longrightarrow d(\sigma_1, \tau_1) = d(\sigma, \tau) = 1$.

<u>3ème cas</u> : X est un voisin de x

On peut dans ce cas avoir $\sigma_1(X) = -1$ et de même en x, donc
$\tau_1(X) = +1$

$d(\sigma_1, \tau_1) = 2$. Ceci se produit si :

$$\frac{\exp\left(\beta \sum_{y : y \sim X} \sigma(y)\right)}{2\cosh\left(\beta \sum_{y : y \sim X} \sigma(y)\right)} \leq U \leq \frac{\exp\left(\beta \sum_{y : y \sim X} \tau(y)\right)}{2\cosh\left(\beta \sum_{y : y \sim X} \tau(y)\right)}$$

Lemme de trigonométrie hyperbolique :

$$\frac{\exp(t)}{2\cosh(t)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{e^{t} - e^{-t}}{e^{t} + e^{t}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh(t)$$

et $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x)\tanh(y)}$

$\Longrightarrow$ si $x > y$, $\tanh(x) - \tanh(y) = (1 - \tanh(x)\tanh(y))\tanh(x-y)$

$\leq 2\tanh(x-y)$.

$\Longrightarrow$ la différence entre les deux seuils est donc plus petite que

$$\tanh\Big(\beta \sum_{y : y \sim x} \tau(y) - \sigma(y)\Big) = \tanh(2\beta).$$

Synthèse : si d_x = nbre de voisins de x, alors

$$\mathbb{E}[d(\sigma_1, \tau_1)] \leq \frac{1}{N^2} \times 0 + \frac{N^2 - d_x - 1}{N^2} \times 1 + \frac{d_x}{N^2}(1 + \tanh(2\beta))$$

1er cas 2ème cas 3ème cas

$$\leq 1 - \frac{1}{N^2}\left(1 - d_x \tanh(2\beta)\right)$$

$$\leq 1 - \frac{1}{N^2}\, c(\beta) \qquad \text{car } d_x \leq 4$$

$$\leq e^{-\frac{c(\beta)}{N^2}} \qquad \square$$

<u>Proposition</u> : $\forall \sigma, \tau$ configuration,

$$d_C\left(P(\sigma, \cdot), P(\tau, \cdot)\right) \leq d(\sigma, \tau) \cdot e^{-\frac{c(\beta)}{N^2}}.$$

<u>Preuve</u> : utiliser une chaîne

$$\sigma = \sigma_0 \longrightarrow \sigma_1 \longrightarrow \sigma_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \sigma_\ell = \tau$$

avec $\ell = d(\sigma, \tau)$, $d(\sigma_i, \sigma_{i+1}) = 1 \ \forall i$. $\square$

Proposition : $\forall \mu, \pi$ mesures de probabilité sur $\mathfrak{X}_N$,

$$d_C(\mu P, \pi P) \leq d_C(\mu, \pi)\, e^{-\frac{c(\beta)}{N^2}}.$$

Preuve : Soit $M_{\mu,\pi}$ un couplage de μ et π tel que

$$d_C(\mu,\pi) = \sum_{\sigma,\tau} M_{\mu,\pi}(\sigma,\tau)\, d(\sigma,\tau).$$

On fixe également pour chaque paire σ, τ un couplage $M_{\sigma,\tau}$ tel que

$$d_C(P(\sigma,\cdot), P(\tau,\cdot)) = \sum_{\sigma_1,\tau_1} M_{\sigma,\tau}(\sigma_1,\tau_1)\, d(\sigma_1,\tau_1)$$

Comment créer un bon couplage de μP et πP ?

Une formule naturelle est :

$$M(\sigma_1,\tau_1) = \sum_{\sigma,\tau} M_{\mu,\pi}(\sigma,\tau)\, M_{\sigma,\tau}(\sigma_1,\tau_1).$$

C'est bien un couplage de μP et πP :

$$\sum_{\tau_1} M(\sigma_1,\tau_1) = \sum_{\sigma,\tau,\tau_1} M_{\mu,\pi}(\sigma,\tau)\, \underbrace{M_{\sigma,\tau}(\sigma_1,\tau_1)}_{\text{couplage de } P(\sigma,\cdot),\ P(\tau,\cdot)}$$

$$= \sum_{\sigma,\tau} \underbrace{M_{\mu,\pi}(\sigma,\tau)}_{\text{couplage de } \mu \text{ et } \pi}\, P(\sigma,\sigma_1)$$

$$= \sum_{\sigma} \mu(\sigma)\, P(\sigma,\sigma_1) = (\mu P)(\sigma_1).$$

Alors, $d_C(\psi P, \pi P)$

$$\leq \sum_{\sigma_1, \tau_1} M(\sigma_1, \tau_1)\, d(\sigma_1, \tau_1)$$

$$\leq \sum_{\sigma, \tau, \sigma_1, \tau_1} M_{\psi,\pi}(\sigma, \tau)\, M_{\sigma,\tau}(\sigma_1, \tau_1)\, d(\sigma_1, \tau_1)$$

$$\leq \sum_{\sigma, \tau} M_{\psi,\pi}(\sigma, \tau)\, d_C(P(\sigma, \cdot), P(\tau, \cdot))$$

$$\leq \left(\sum_{\sigma, \tau} M_{\psi,\pi}(\sigma, \tau)\, d(\sigma, \tau)\right) e^{-\frac{c(\beta)}{N^2}}$$

$$\leq d_C(\psi, \pi) \cdot e^{-\frac{c(\beta)}{N^2}} \qquad \square.$$

On arrive finalement au :

Théorème : Supposons β suffisamment petit, tel que

$$c(\beta) = 1 - 4\tanh(2\beta) > 0.$$

On a $\boxed{d_{TV}(\pi_n, \mathbb{P}_{N,\beta}) \leq N^2 \exp\left(-\frac{n\, c(\beta)}{N^2}\right)}$.

Donc, si $n = \frac{1}{c(\beta)} N^2(\log N^2 + c)$, alors la d_{TV} est $\leq e^{-c}$.

$\Longrightarrow$ borne supérieure sur le temps de mélange.

Preuve : par récurrence, $\pi = \pi_0$ et $\mu = \mathbb{P}_{N,\beta}$ invariante. $\square$