Objectifs : manipuler une matrice stochastique et les lois marginales d'une chaîne de Markov ; utiliser la propriété de Markov simple ; utiliser la représentation d'une chaîne de Markov en termes d'aléas indépendants ; décomposer toute probabilité d'un événement en somme de probabilités trajectorielles.

1. Chaîne de Markov à deux états. On considère l'espace $\mathfrak{X} = \{1, 2\}$, et une matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

(a) À quelles conditions sur a, b, c, d la matrice P est-elle une matrice stochastique ? On supposera dans tout ce qui suit que ces conditions sont réunies. Réécrire dans ce cas P en fonction seulement des paramètres a et d. Dessiner le graphe dirigé $\mathcal{G}_P$ associé à cette matrice (qui peut dépendre des valeurs de a et d).

(b) On suppose pour les questions suivantes $(a, d) \notin \{(0, 0), (1, 1)\}$. Montrer que les deux vecteurs lignes

$$\pi = \left(\frac{1-d}{2-a-d}, \frac{1-a}{2-a-d}\right) \quad \text{et} \quad \eta = (1, -1)$$

sont des vecteurs propres pour l'action à droite de P : $\pi P = \lambda_\pi \pi$ et $\eta P = \lambda_\eta \eta$, pour des valeurs propres réelles λ_π et λ_η que l'on calculera en fonction de a et d.

(c) Soit π_0 une mesure de probabilité sur $\{1, 2\}$, et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la chaîne de Markov sur l'espace d'états $\{1, 2\}$ de matrice P et de mesure initiale π_0. Montrer qu'il existe un coefficient $\beta \in \mathbb{R}$ qu'on calculera en fonction de π_0 et de P tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}[X_n = 1] = \frac{1-d}{2-a-d} + \beta\,(a+d-1)^n;$$
$$\mathbb{P}[X_n = 2] = \frac{1-a}{2-a-d} - \beta\,(a+d-1)^n.$$

On pourra décomposer π_0 sur la base (π, η) de $\mathbb{R}^2$.

(d) Que peut-on dire de $\mathbb{P}[X_n = i]$ ($i \in \{1, 2\}$) lorsque n tend vers l'infini ?

(e) On suppose que $d = 1$ et $a < 1$. Montrer que $\mathbb{P}[\lim_{n\to\infty} X_n = 2] = 1$.

2. Modèle de file d'attente, I. On considère la matrice de transition sur l'espace $\mathfrak{X} = \mathbb{N}$ donnée par

$$P(0, 1) = 1 \qquad ; \qquad \forall k \geq 1,\ \ P(k, k+1) = p \qquad ; \qquad \forall k \geq 1,\ \ P(k, k-1) = 1 - p,$$

p étant un paramètre réel dans $(0, 1)$.

(a) Soit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables i.i.d. de loi $\mathbb{P}[\xi_n = 1] = 1 - \mathbb{P}[\xi_n = -1] = p$. On considère la suite aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} (\xi_k\, 1_{(X_{k-1}>0)} + 1_{(X_{k-1}=0)}),$$

X_0 étant indépendant de $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de loi notée π. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de loi $\mathbb{P}_{(P,\pi)}$ sur l'espace $\mathbb{N}$.

(b) On suppose $p > \frac{1}{2}$. Comparer X_n et $\sum_{k=1}^{n} \xi_k$, et montrer que $\mathbb{P}_\pi[\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty] = 1$ quelque soit la loi initiale π.

(c) On suppose $p < \frac{1}{2}$. Montrer que

$$0 \leq X_n \leq X_0 + \sum_{k=1}^{n} \xi_k + 2 \sum_{k=1}^{n} 1_{(X_{k-1}=0)}.$$

En déduire à l'aide de la loi des grands nombres que $\mathrm{card}(\{n \in \mathbb{N} \,|\, X_n = 0\}) = +\infty$ a probabilité 1 sour $\mathbb{P}_\pi$. Que vaut alors $\mathbb{P}_\pi\,[\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty]$?

3. Le problème du collectionneur. On considère un ensemble fini E de cardinal N, et une suite de variables aléatoires $(C_k)_{k\geq 1}$ indépendantes, avec chaque C_k de loi uniforme sur E :

$$\forall k \geq 1,\;\; \forall e \in E,\;\; \mathbb{P}[C_k = e] = \frac{1}{N}.$$

On note ensuite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$X_n = \mathrm{card}(\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}),$$

avec par convention $X_0 = 0$.

(a) Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $\mathfrak{X} = [\![0, N]\!]$, dont on explicitera la matrice de transition.

(b) Soit $T = \inf(\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = N\})$. Montrer que T est fini presque sûrement.

(c) Montrer que pour tout $t \geq N$, on a :

$$\mathbb{P}[T = t] = \sum_{\substack{t_0,\ldots,t_{N-1}\geq 1 \\ t_0+t_1+\cdots+t_{N-1}=t}} (1-p_0)^{t_0-1} p_0\, (1-p_1)^{t_1-1} p_1 \cdots (1-p_{N-1})^{t_{N-1}-1} p_{N-1}$$

avec $p_k = 1 - \frac{k}{N}$ pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$. En déduire que la loi de T est celle d'une somme de variables géométriques indépendantes

$$G_0 + G_1 + \cdots + G_{N-1},$$

avec $\mathbb{P}[G_k = l] = (1-p_k)^{l-1} p_k$.

(d) Déduire de la question précédente la valeur de $\mathbb{E}[T]$ en fonction de N. Donner un équivalent simple de cette formule lorsque N tend vers l'infini.

4. Marche aléatoire sur la droite et transformation $M-X$. On considère la marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$: c'est la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrice de transition $P(x,y) = \frac{1}{2}\, 1_{|x-y|=1}$.

(a) On suppose que la mesure initiale est δ_0. Donner une représentation de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en termes d'aléas i.i.d. $(\xi_n)_{n\geq 1}$ avec $\mathbb{P}[\xi_n = 1] = \mathbb{P}[\xi_n = -1] = \frac{1}{2}$.

(b) On pose $M_n = \max(\{X_k,\, 0 \leq k \leq n\})$. Montrer que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une chaîne de Markov (indication : rendre tangible le fait que l'évolution de M_n dépend du moment où le précédent maximum a été atteint).

(c) On s'intéresse au vecteur $(X_n, M_n - X_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Montrer que

$$(X_{n+1}, M_{n+1} - X_{n+1}) - (X_n, M_n - X_n) = \begin{cases} (\xi_{n+1}, -\xi_{n+1}) & \text{si } M_n - X_n > 0, \\ (1, 0) & \text{si } M_n - X_n = 0 \text{ et } \xi_{n+1} = 1, \\ (-1, +1) & \text{si } M_n - X_n = 0 \text{ et } \xi_{n+1} = -1. \end{cases}$$

(d) Montrer que $(X_n, M_n - X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur l'espace $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

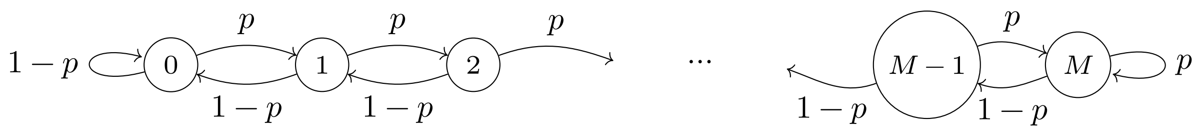
(e) Montrer que $(M_n - X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur l'espace $\mathbb{N}$, et préciser sa matrice de transition.

5. Chaînes de Markov et fonctions harmoniques, I. Soit P une matrice stochastique sur un espace d'états $\mathfrak{X}$, et $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est harmonique sur $\mathfrak{X}$ (par rapport à P) si elle vérifie :

$$\forall x \in \mathfrak{X},\;\; f(x) = \sum_{y\in\mathfrak{X}} P(x,y)\, f(y).$$

On suppose donnée une fonction f harmonique et bornée sur $\mathfrak{X}$. Montrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $\mathfrak{X}$ de matrice de transition P, alors la suite $(\mathbb{E}[f(X_n)])_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

6. Modèle de la ruine du joueur avec $p \neq \frac{1}{2}$. Dans cet exercice, on reprend le modèle de la ruine du joueur : étant fixé un paramètre $p \in (0,1)$ et un entier $M \geq 1$, on considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'espace d'états $\mathfrak{X} = [\![0, M]\!]$ et de matrice de transition P dont le graphe $\mathcal{G}_P$ est :



On suppose dans tout ce qui suit $p \neq \frac{1}{2}$, le cas $p = \frac{1}{2}$ ayant été vu dans le cours. On note

$$\tau = \tau((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \inf(\{n \in \mathbb{N} \,|\, X_n = 0 \text{ ou } X_n = M\}) \in \mathbb{N} \sqcup \{+\infty\};$$

c'est un temps aléatoire, qu'on peut voir comme une fonction de la trajectoire aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) On suppose $X_0 \notin \{0, M\}$. Écrire une équation reliant

$$\tau((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) \quad \text{et} \quad \tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}),$$

et, si les temps $\tau((X_n)_{n\in\mathbb{N}})$ et $\tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}})$ sont finis, une autre équation reliant

$$X_{\tau((X_n)_{n\in\mathbb{N}})} \quad \text{et} \quad X_{\tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}})+1}.$$

(b) Pour $k \in [\![0, M]\!]$, on pose

$$f(k) = \mathbb{P}_k[\tau < +\infty \text{ et } X_\tau = 0];$$
$$g(k) = \mathbb{E}_k[\tau].$$

Calculer $f(0)$, $g(0)$, $f(M)$ et $g(M)$. En utilisant la propriété de Markov, retrouver les relations de récurrence d'ordre 2 vérifiées par f et g :

$$\forall k \in [\![1, M-1]\!]\,,\;\; f(k) = p\, f(k+1) + (1-p)\, f(k-1);$$
$$\forall k \in [\![1, M-1]\!]\,,\;\; g(k) = p\, g(k+1) + (1-p)\, g(k-1) + 1.$$

(c) On pose $\delta_f(k) = f(k+1) - f(k)$, pour $k \in [\![0, M-1]\!]$. Que vaut $\sum_{k=0}^{M-1} \delta_f(k)$? Montrer que $(\delta_f(k))_{k\in[\![0,M-1]\!]}$ est une suite géométrique, et déterminer les valeurs de cette suite. En déduire que

$$f(k) = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^k - \left(\frac{1-p}{p}\right)^M}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^M} \quad \text{pour tout } k \in [\![0, M]\!].$$

(d) On pose $\delta_g(k) = g(k+1) - g(k) - \frac{1}{1-2p}$, pour $k \in [\![0, M-1]\!]$. Déterminer les valeurs de cette suite, et en déduire que

$$g(k) = \frac{M}{2p-1} \, \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^M} - \frac{k}{2p-1} \quad \text{pour tout } k \in [\![0, M]\!].$$

(e) On fait tendre M vers l'infini. Commenter le comportement limite des formules obtenues pour $f(k)$ et $g(k)$, selon que $p < \frac{1}{2}$ ou $p > \frac{1}{2}$.

7. Image d'une chaîne de Markov. Soit $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ deux espaces dénombrables, et une matrice stochastique $P = (P(x,y))_{x,y\in\mathfrak{X}}$ sur $\mathfrak{X}$, et $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$. On fixe une loi initiale π_0 sur $\mathfrak{X}$ et on note $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur $\mathfrak{X}$ de loi $\mathbb{P}_{(P,\pi_0)}$.

(a) Montrer par un contre-exemple simple que $(Y_n = f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas forcément une chaîne de Markov sur $\mathfrak{Y}$ (indication : prendre $\mathfrak{X} = \{1,2,3\}$, $\mathfrak{Y} = \{1,2\}$, P la matrice circulante de taille 3×3, et f une fonction surjective).

(b) Dans la suite de l'exercice, on suppose que la fonction f est surjective, ce qui ne coûte rien quitte à remplacer $\mathfrak{Y}$ par $f(\mathfrak{X})$. On suppose également que la condition suivante est vérifiée : pour tout couple $(y_1, y_2) \in \mathfrak{Y}$, si $f(x) = f(x') = y_1$, alors

$$P(x, f^{-1}(\{y_2\})) = P(x', f^{-1}(\{y_2\})),$$

les deux termes de la formule étant les sommes

$$\sum_{w \,|\, f(w)=y_2} P(x,w) \quad \text{et} \quad \sum_{w \,|\, f(w)=y_2} P(x',w).$$

On note alors cette quantité $Q(y_1, y_2)$. Montrer que, pour toute suite $(y_0, \ldots, y_n, y_{n+1})$ d'éléments de $\mathfrak{Y}$, on a

$$\mathbb{P}[Y_0 = y_0, Y_1 = y_1, \cdots, Y_{n+1} = y_{n+1}] = \mathbb{P}[Y_0 = y_0, Y_1 = y_1, \cdots, Y_n = y_n]\, Q(y_n, y_{n+1}).$$

En déduire que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de matrice Q sur $\mathfrak{Y}$, et de loi initiale $f_*\pi_0$:

$$(f_*\pi_0)(y) = \pi_0(f^{-1}(\{y\})) = \sum_{w \,|\, f(w)=y} \pi_0(w).$$

(c) Application : on considère la marche aléatoire sur l'hypercube $\mathfrak{X} = \{0,1\}^N$, qui est la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les probabilités de transition sont

$$P((x_1, \ldots, x_N), (y_1, \ldots, y_N)) = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{si } x \text{ et } y \text{ diffèrent en une seule coordonnée } x_i = 1 - y_i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $f : \mathfrak{X} \to [\![0, N]\!]$ la fonction qui à un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_N)$ associe $f(x) = \sum_{i=1}^N x_i$, qui est le nombre de coordonnées égales à 1 dans x. Si $Y_n = f(X_n)$, montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $[\![0, N]\!]$, et calculer sa matrice de transition.

La chaîne $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est celle du modèle des urnes d'Ehrenfest ; elle modélise le nombre de particules dans une moitié d'une boîte contenant un gaz avec N particules qui sont libres de s'y déplacer.

8. Transformation $2M-X$. On considère comme dans l'exercice 4. la marche aléatoire simple symétrique $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{Z}$: $P(x,y) = \frac{1}{2}\,1_{|x-y|=1}$. On pose $M_n = \max(\{X_k,\ 0 \leq k \leq n\})$. L'objectif de l'exercice est de montrer que

$$Y_n = 2M_n - X_n$$

est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$.

(a) Dessiner sur une même figure une trajectoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et la trajectoire $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ correspondante. Montrer que $Y_n \geq X_n$ pour tout n, et qu'on a égalité si et seulement si n est un temps où X_n atteint son maximum ($M_n = X_n$).

(b) On réalise $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suite des sommes de pas ξ_n indépendants :

$$X_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$$

avec $\mathbb{P}[\xi_n = 1] = \mathbb{P}[\xi_n = -1] = \frac{1}{2}$. On note $\mathfrak{X} = \{(k,l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \,|\, k \leq l\}$, et $F : \mathfrak{X} \times \{\pm 1\} \to \mathfrak{X}$ la fonction définie comme suit :

$$F(k,l,\xi) = \begin{cases} (k+\xi, l-\xi) & \text{si } k < l, \\ (k+\xi, l+1) & \text{si } k = l. \end{cases}$$

Montrer que $(X_{n+1}, Y_{n+1}) = F(X_n, Y_n, \xi_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que la suite de couples $(X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $\mathfrak{X}$, et donner sa matrice de transition $P((k_1,l_1),(k_2,l_2))$.

(c) Si $l \in \mathbb{N}$, on notera $I_l = \{-l, -l+2, -l+4, \ldots, l-2, l\}$: c'est l'ensemble des $l+1$ entiers relatifs qui sont plus petits en valeur absolue que l, et qui ont même parité que l. Montrer que pour tout n, X_n appartient à l'ensemble I_{Y_n}. Ainsi, $(X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur l'espace d'états restreint $\mathfrak{X}^* = \bigcup_{l\in\mathbb{N}} I_l \times \{l\}$.

(d) Considérons la fonction $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{N}$ définie par $f(k,l) = l$. Montrer que le critère de l'exercice précédent sur les images de chaînes de Markov ne s'applique pas (la suite de l'exercice va néanmoins établir que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov).

(e) Soient l, l' deux entiers positifs avec $|l' - l| = 1$, et $k' \in I_{l'}$. Calculer la somme $\sum_{k\in I_l} P((k,l),(k',l'))$, et montrer que le résultat est indépendant de k', l et l' (à condition que $|l'-l| = 1$ et $k' \in I_{l'}$). On séparera les cas $l' = l+1$ et $l' = l-1$.

(f) On fixe une suite $(l_1, l_2, \ldots, l_n, l_{n+1})$ d'entiers positifs, avec $|l_i - l_{i-1}| = 1$ pour tout i (et avec pour convention $l_0 = 0$). En utilisant le fait que $(X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov, montrer que

$$\mathbb{P}[Y_{n+1} = l_{n+1} \,|\, Y_1 = l_1, \ldots, Y_n = l_n] = \sum_{\substack{k_n \in I_{l_n} \\ k_{n+1} \in I_{l_{n+1}}}} p_{l_1,l_2,\ldots,l_n}(k_n)\, P((k_n,l_n),(k_{n+1},l_{n+1}))$$

avec $p_{l_1,l_2,\ldots,l_n}(k_n) = \mathbb{P}[X_n = k_n \,|\, Y_1 = l_1, \ldots, Y_n = l_n]$. On pourra décomposer la probabilité à gauche en fonction des valeurs de $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}$.

(g) Montrer par récurrence sur n l'identité suivante : $p_{l_1,l_2,\ldots,l_n}(k_n) = \frac{1}{l_n+1}$ pour tout $k_n \in I_{l_n}$. On pourra décomposer une probabilité $p_{l_1,l_2,\ldots,l_{n+1}}(k_{n+1})$ en fonction de la valeur $X_n = k_n$. Ainsi, conditionnellement à la trajectoire $(Y_1 = l_1, \ldots, Y_n = l_n)$, X_n est distribué uniformément sur l'ensemble d'entiers I_{l_n}.

(h) En combinant les deux questions précédentes, montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$, et donner sa matrice de transition Q.

Le fait que les transformations $M - X$ et $2M - X$ appliquées à une marche aléatoire symétrique simple donnent des chaînes de Markov est un petit miracle : il n'y a pas d'autre transformation affine $\lambda M - X$ avec cette propriété.

9. Marche aléatoire sur le cercle et dernier site occupé. Soit N un entier plus grand que 2. On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'espace d'états $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \{0, 1, \ldots, N-1\}$

et de matrice de transition

$$P(k, k+1) = P(k, k-1) = \frac{1}{2},$$

étant entendu que $0 = N$ dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. C'est la marche aléatoire sur le graphe qui est un cercle avec N points. Pour tout état $x \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, on note $\tau_x = \inf\{n \in \mathbb{N} \,|\, X_n = x\}$ le temps d'atteinte de l'état x par la chaîne. On admettra que tous ces temps sont finis presque sûrement (l'explication de ce fait sera donnée dans le chapitre suivant).

(a) On note Y le dernier état visité par $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\{Y = y\}$ si et seulement si $\tau_y = \max_{1\leq x\leq N} \tau_x$. Expliquer pourquoi

$$\{Y = y\} = \{\tau_{y+1} < \tau_{y-1} < \tau_y\} \sqcup \{\tau_{y-1} < \tau_{y+1} < \tau_y\}.$$

(b) Fixons $y \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, et notons $f(k) = \mathbb{P}_k[\tau_{y+1} < \tau_y]$. En utilisant la méthode d'un pas en avant (propriété de Markov), écrire une équation de récurrence vérifiée par f. Que valent $f(y)$ et $f(y+1)$? Montrer que

$$f(y-1) = \mathbb{P}_{y-1}[\tau_{y+1} < \tau_y] = \frac{1}{N-1}.$$

(c) Jusqu'à la fin de l'exercice, on fixe deux états $x \neq y \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Pour $t \geq 0$, montrer que

$$\mathbb{P}_x[\tau_{y-1} = t,\, \tau_{y-1} < \tau_{y+1} < \tau_y] = \mathbb{P}_x[\tau_{y-1} = t,\, \tau_{y-1} < \tau_{y+1}]\, \mathbb{P}_{y-1}[\tau_{y+1} < \tau_y].$$

On pourra décomposer l'événement de la probabilité à gauche en l'union des trajectoires

$$\{X_0 = x, X_1 = x_1, \ldots, X_t = x_t = y-1, \ldots, X_u = x_u = y+1, \ldots, X_v = x_v = y\}$$

avec $t < u < v$, $x_i \notin \{y-1, y+1\}$ pour $i \in [\![1, t-1]\!]$, $x_i \notin \{y+1, y\}$ pour $i \in [\![t+1, u-1]\!]$ et $x_i \neq y$ pour $i \in [\![u+1, v-1]\!]$. En déduire que

$$\mathbb{P}_x[\tau_{y-1} < \tau_{y+1} < \tau_y] = \frac{1}{N-1}\, \mathbb{P}_x[\tau_{y-1} < \tau_{y+1}].$$

(d) Montrer que sous $\mathbb{P}_x$, la variable aléatoire Y suit une loi uniforme sur $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \setminus \{x\}$. Commenter ce résultat.