Corrigé des exercices 1

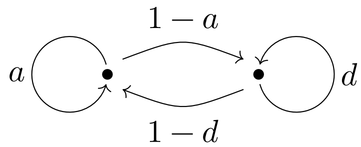
Chaînes de Markov 2025-2026

1. Chaîne de Markov à deux états.

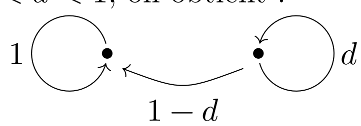
(a) Pour avoir une matrice stochastique, il faut $a, b, c, d \geq 0$, $a + b = c + d = 1$. On peut donc réécrire la matrice sous la forme

$$P = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-d & d \end{pmatrix}$$

avec $0 \leq a \leq 1$ et $0 \leq d \leq 1$. Si $\{a, d\} \cap \{0, 1\} = \emptyset$, alors le graphe associé est :



Si l'une des deux valeurs a ou d vaut 0 ou 1, alors le graphe associé a moins d'arêtes. Par exemple, avec $a = 1$ et $0 < d < 1$, on obtient :



(b) Le polynôme caractéristique de P est $X^2 - (a + d)X + (a + d - 1)$, qui admet deux racines : 1 et $a+d-1$. Sous les hypothèses de l'énoncé, $-1 < a+d-1 < 1$. On vérifie aisément que

$$\pi = \left(\frac{1-d}{2-a-d}, \frac{1-a}{2-a-d}\right)$$

est vecteur propre pour la valeur propre 1, et que $\eta = (1, -1)$ est vecteur propre pour la valeur propre $a + d - 1$.

(c) Comme (π, η) est une base de $\mathbb{R}^2$, on peut décomposer le vecteur π_0 sur cette base : $\pi_0 = \alpha\pi + \beta\eta$ pour certains coefficients α, β. En faisant la somme des coordonnées, on trouve :

$$1 = \pi_0(1) + \pi_0(2) = \alpha\pi(1) + \beta\eta(1) + \alpha\pi(2) + \beta\eta(2) = \alpha(\pi(1) + \pi(2)) = \alpha.$$

Ensuite, $\beta = \beta\eta(1) = \pi_0(1) - \pi(1) = \pi_0(1) - \frac{1-d}{2-a-d}$. Appliquons maintenant la matrice P à l'identité $\pi_0 = \pi + \beta\,\eta$:

$$\pi_n = \pi + \beta(a + d - 1)^n\,\eta.$$

Autrement dit :

$$\mathbb{P}[X_n = 1] = \frac{1-d}{2-a-d} + \left(\pi_0(1) - \frac{1-d}{2-a-d}\right)(a + d - 1)^n;$$
$$\mathbb{P}[X_n = 2] = \frac{1-a}{2-a-d} - \left(\pi_0(1) - \frac{1-d}{2-a-d}\right)(a + d - 1)^n.$$

(d) Comme $|a + d - 1| < 1$, sa puissance n-ième tend vers 0, donc le vecteur π_n tend vers π lorsque n tend vers l'infini :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_n = 1] = \pi(1) = \frac{1-d}{2-a-d} \qquad ; \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_n = 2] = \pi(2) = \frac{1-a}{2-a-d}.$$

(e) Si $d = 1$, alors une fois atteint l'état numéro 2, la chaîne de Markov ne peut plus en sortir. On a donc l'identité d'événements :

$$\left\{\lim_{n\to\infty} X_n = 2\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\uparrow \{X_n = 2\}.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}\left[\lim_{n\to\infty} X_n = 2\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_n = 2] = \frac{1-a}{1-a} = 1.$$

2. Modèle de file d'attente, I.

(a) On a une représentation du type $X_{n+1} = f(X_n, \xi_{n+1})$ avec des variables ξ_n i.i.d. et indépendantes de X_0, donc par le théorème de représentation des chaînes de Markov, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov. Calculons sa matrice de transition :

- si $X_n = 0$, alors $X_{n+1} = 1$ automatiquement, donc $P(0, 1) = 1$;
- si $X_n \geq 1$, alors $X_{n+1} - X_n = \xi_{n+1}$, donc $P(k, k+1) = p$ et $P(k, k-1) = 1-p$ pour $k \geq 1$.

La matrice de transition de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc P, et la loi de cette chaîne est $\mathbb{P}_{(P,\pi)}$.

(b) Supposons $p > \frac{1}{2}$. Remarquons que pour tout n, $\xi_n\, 1_{(X_{n-1}>0)} + 1_{(X_{n-1}=0)} \geq \xi_n$, donc $X_n \geq X_0 + \sum_{k=1}^n \xi_k$. Or, par la loi des grands nombres, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \xi_k \to_{n\to\infty,\text{p.s.}} 2p-1 > 0$, donc $X_n \to_{n\to\infty,\text{p.s.}} +\infty$ dans ce cas. Autrement dit,

$$\mathbb{P}_\pi\left[\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty\right] = 1.$$

(c) Supposons $p < \frac{1}{2}$. On a

$$\begin{aligned}0 \leq X_n &= X_0 + \sum_{k=1}^n (\xi_k\, 1_{(X_{k-1}>0)} + 1_{(X_{k-1}=0)}) = X_0 + \sum_{k=1}^n (\xi_k + 1_{(X_{k-1}=0)}(1-\xi_k))\\ &\leq X_0 + \sum_{k=1}^n \xi_k + 2\sum_{k=1}^n 1_{(X_{k-1}=0)}.\end{aligned}$$

Par la loi des grands nombres, la somme des ξ_k tend vers $-\infty$, donc pour compenser et rester positif, il faut que $\sum_{k=1}^n 1_{(X_{k-1}=0)}$ tende vers $+\infty$ presque sûrement. Ainsi, une infinité de fois, $X_{k-1} = 0$. Le nombre de visites de 0 est donc presque sûrement $+\infty$, et on ne peut pas avoir $X_n \to +\infty$:

$$\mathbb{P}_\pi\left[\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty\right] = 0.$$

3. Le problème du collectionneur.

(a) Si l'on souhaite utiliser le théorème de représentation pour montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov, il faut faire un peu attention à la construction des variables C_k. Notons $(B_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables indépendantes uniformément réparties sur $[\![1, N]\!]$, et notons par ailleurs $e_1, e_2, \ldots, e_N$ les éléments de E (on fixe donc une indexation). On définit par récurrence des parties aléatoires de E : $F_0 = \emptyset$, et si

$$\begin{aligned}F_n &= \{e_{i_{n,1}}, \ldots, e_{i_{n,l}}\} \quad \text{avec } i_1 < i_2 < \cdots < i_l;\\ E \setminus F_n &= \{e_{j_{n,1}}, \ldots, e_{j_{n,N-l}}\} \quad \text{avec } j_1 < j_2 < \cdots < j_{N-l},\end{aligned}$$

alors on pose $F_{n+1} = F_n \cup \{C_{n+1}\}$, où :

$$C_{n+1} = \begin{cases} e_{i_{n,B_{n+1}}} & \text{si } B_{n+1} \leq l, \\ e_{j_{n,B_{n+1}-l}} & \text{si } B_{n+1} > l. \end{cases}$$

Par construction, $F_n = \{C_1, \ldots, C_n\}$, et $X_n = \operatorname{card} F_n$. Bien que l'indexation des éléments de F_n et de $E \setminus F_n$ dépende de $C_1, \ldots, C_n$, la variable C_{n+1} reste indépendante de $(C_1, \ldots, C_n)$: en effet, pour tous $c_1, \ldots, c_n, c_{n+1} \in E$,

$$\mathbb{P}[C_{n+1} = c_{n+1} | \, C_1 = c_1, \ldots, C_n = c_n] = \frac{1}{N}.$$

Donc, la suite de variables $(C_k)_{k\geq 1}$ est bien une suite de variables indépendantes uniformes sur E. L'intérêt de notre construction (plutôt que de prendre par exemple $C_k = e_{B_k}$) est qu'on peut facilement suivre l'évolution de X_n :

$$X_{n+1} = X_n + 1_{(B_{n+1} > X_n)}.$$

On a donc écrit une relation de récurrence du type $X_{n+1} = F(X_n, B_{n+1})$ avec les variables $(B_k)_{k\geq 1}$ i.i.d. ; par le théorème de représentation, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien une chaîne de Markov. Son espace des états est $\mathfrak{X} = [\![0, N]\!]$, puisqu'on a toujours $F_n \subset E$ et donc $X_n = \operatorname{card} F_n \leq \operatorname{card} E = N$. La relation de récurrence montre que $X_{n+1} - X_n \in \{0, 1\}$ pour tout n ; par conséquent, la matrice de transition $P(k, l)$ s'annule en tout couple tel que $l \notin \{k, k+1\}$. Les valeurs non nulles sont :

$$P(k, k) = \mathbb{P}[B_1 \leq k] = \frac{k}{N};$$
$$P(k, k+1) = \mathbb{P}[B_1 > k] = 1 - \frac{k}{N}.$$

(b) Dire que T est fini presque sûrement revient à dire que l'ensemble croissant F_n défini par $F_n = \{C_1, \cdots, C_n\}$ croît presque sûrement vers E. Une preuve simple repose sur l'argument suivant : considérons pour $k \geq 0$ l'événement

$$A_k = \{C_{Nk+1} = e_1, C_{Nk+2} = e_2, \ldots, C_{Nk+N} = e_N\},$$

avec $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$. Cet événement a une probabilité non nulle $\frac{1}{N^N}$, et les A_k sont indépendants. Donc, dans la suite d'expérience de Bernoulli $(A_k)_{k\geq 0}$, il y a forcément un succès, et si A_k se réalise, alors $F_{Nk+N} = E$ et $T \leq Nk + N$. Le temps T est donc fini p.s.

(c) Pour que $T = t$ avec $t \geq N$, il faut que la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ait effectué les transitions $0 \to 1$, $1 \to 2$, etc. jusqu'à $N - 1 \to N$, cette dernière transition ayant lieu au temps t. En notant $t_0, t_0 + t_1, \ldots, t_0 + \cdots + t_{N-1}$ les instants des transitions $0 \to 1, 1 \to 2, \ldots, N-1 \to N$, on a donc :

$$\mathbb{P}[T = t] = \sum_{\substack{t_0, \ldots, t_{N-1} \geq 1 \\ t_0 + \cdots + t_{N-1} = t}} \mathbb{P}[\text{chaque transition } k \to k+1 \text{ a lieu au temps } t_0 + \cdots + t_{k-1}].$$

Or, l'événement dans la somme correspond à la trajectoire suivante pour la suite $(X_n)_{n\in[\![1,t]\!]}$:

$$\underbrace{(0, \ldots, 0)}_{t_0 - 1 \text{ valeurs}}, \underbrace{(1, \ldots, 1)}_{t_1 \text{ valeurs}}, \ldots, \underbrace{(N-1, \ldots, N-1)}_{t_{N-1} \text{ valeurs}}, N.$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}[T = t] = \sum_{\substack{t_0, \ldots, t_{N-1} \geq 1 \\ t_0 + \cdots + t_{N-1} = t}} (1 - p_0)^{t_0 - 1} p_0 \, (1 - p_1)^{t_1 - 1} p_1 \cdots (1 - p_{N-1})^{t_{N-1}} p_{N-1}.$$

C'est la formule du produit de convolution, pour la loi d'une somme de variables géométriques indépendantes $G_0 + G_1 + \cdots + G_{N-1}$ avec chaque G_k de paramètre $p_k = P(k, k+1) = 1 - \frac{k}{N}$.

(d) L'espérance d'une variable géométrique de paramètre p est :

$$\mathbb{E}[G] = \sum_{k=1}^{\infty} k\,(1-p)^{k-1} p = p\,\left.\left(\frac{1}{1-z}\right)'\right|_{z=1-p} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

On a donc par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{N}{N-k} = N \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} = N\,H_N,$$

où H_N est la N-ième somme harmonique. En utilisant l'équivalent bien connu $H_N \simeq \log N$, on en déduit que $\mathbb{E}[T] \simeq N\,\log N$ lorsque N est grand.

4. Marche aléatoire sur la droite et transformation $M - X$.

(a) La formule $X_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ avec des variables i.i.d. ξ_n de loi $\mathcal{B}_{\pm 1}(\frac{1}{2})$ définit une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$ de matrice de transition $P(k, k+1) = P(k, k-1) = \frac{1}{2}$.

(b) Raisonnons par l'absurde et supposons que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une chaîne de Markov de matrice Q sur $\mathbb{N}$. On a

$$Q(0,1) = \mathbb{P}[M_1 = 1 \,|\, M_0 = 0] = \mathbb{P}[X_1 = 1 \,|\, X_0 = 0] = P(0,1) = \frac{1}{2};$$
$$Q(0,0) = \mathbb{P}[M_1 = 0 \,|\, M_0 = 0] = \mathbb{P}[X_1 = -1 \,|\, X_0 = 0] = P(0,-1) = \frac{1}{2}.$$

Alors, $\mathbb{P}[M_2 = 0 \,|\, M_0 = 0] = (Q(0,0))^2 = \frac{1}{4}$. Mais il y a deux chemins possibles tels que $M_2 = 0$:

$$\mathbb{P}[M_2 = 0 \,|\, M_0 = 0] = \mathbb{P}[(X_1 = -1,\, X_2 = 0) \text{ ou } (X_1 = -1,\, X_2 = -2) \,|\, X_0 = 0] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

d'où une contradiction.

(c) Si $M_n - X_n = 0$, alors X_n est égal à sa valeur maximale jusqu'au temps n, et au temps suivant :

- avec probabilité $\frac{1}{2}$, $\xi_{n+1} = 1$, donc $X_{n+1} = X_n + 1$ et $M_{n+1} = X_{n+1}$. On a alors :
$$(X_{n+1}, M_{n+1} - X_{n+1}) - (X_n, M_n - X_n) = (1, 0-0) = (1,0).$$
- avec probabilité $\frac{1}{2}$, $\xi_{n+1} = -1$, donc $X_{n+1} = X_n - 1$ et $M_{n+1} = X_n = X_{n+1} + 1$. On a alors :
$$(X_{n+1}, M_{n+1} - X_{n+1}) - (X_n, M_n - X_n) = (-1, 1-0) = (-1,1).$$

Si $M_n - X_n > 0$, alors X_n n'est pas égal à sa valeur maximale jusqu'au temps n, donc $M_{n+1} = M_n$ et

$$(X_{n+1}, M_{n+1} - X_{n+1}) - (X_n, M_n - X_n) = (X_{n+1} - X_n, X_n - X_{n+1}) = (\xi_{n+1}, -\xi_{n+1}).$$

(d) On peut donc écrire $(X_{n+1}, M_{n+1} - X_{n+1}) = f((X_n, M_n - X_n), \xi_{n+1})$ pour une certaine fonction f et une suite de variables i.i.d. $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc par le théorème de représentation des chaînes de Markov, $(X_n, M_n - X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne d'espace d'états $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

(e) La question (c) permet d'écrire :

$$M_{n+1} - X_{n+1} = M_n - X_n - 1_{(M_n - X_n > 0)}\,\xi_{n+1} + 1_{(M_n - X_n = 0)}\,\frac{1 - \xi_{n+1}}{2}.$$

Il existe donc une fonction g telle que $M_{n+1}-X_{n+1} = g(M_n-X_n, \xi_{n+1})$, ce qui garantit comme précédemment que $(M_n-X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne d'espace d'états $\mathbb{N}$. Sa matrice de transition est :

$$P(0,0) = \frac{1}{2} \quad ; \quad P(0,1) = \frac{1}{2} \quad ; \quad P(k,k-1) = P(k,k+1) = \frac{1}{2} \quad \text{pour } k \geq 1.$$

5. Chaînes de Markov et fonctions harmoniques, I. Pour toute chaîne de Markov de matrice P, on a

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1}) \,|\, X_n = x] = \sum_{y\in\mathfrak{X}} P(x,y)\, f(y) = (Pf)(x).$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1})] = \sum_{x\in\mathfrak{X}} \mathbb{P}[X_n = x]\, \mathbb{E}[f(X_{n+1}) \,|\, X_n = x] = \sum_{x\in\mathfrak{X}} \mathbb{P}[X_n = x]\, (Pf)(x) = \mathbb{E}[(Pf)(X_n)].$$

Si f est harmonique, $Pf = f$, donc $\mathbb{E}[f(X_{n+1})] = \mathbb{E}[f(X_n)]$, et la suite $(\mathbb{E}[f(X_n)])_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

6. Modèle de la ruine du joueur avec $p \neq \frac{1}{2}$.

(a) On voit τ comme un fonction sur les trajectoires, à valeurs dans $\mathbb{N} \sqcup \{+\infty\}$. Alors, il faut un pas de moins à $(X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ pour atteindre l'un des bords de l'intervalle $[0,M]$ par rapport à $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc

$$\tau((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) = 1 + \tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}).$$

L'identité est encore valable si les deux membres valent $+\infty$. S'ils sont finis, alors

$$X_{\tau((X_n)_{n\in\mathbb{N}})} = X_{1+\tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}})} \quad \text{(et vaut 0 ou } M).$$

(b) On a $f(0) = 1$, $f(M) = 0$, $g(0) = g(M) = 0$. On écrit pour f la propriété de Markov comme suit : si $0 < k < M$, alors

$$\begin{aligned}
f(k) &= \mathbb{P}_k[\tau((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) < \infty \text{ et } X_{\tau((X_n)_{n\in\mathbb{N}})} = 0] \\
&= \mathbb{P}_k[\tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) < \infty \text{ et } X_{\tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}})+1} = 0] \\
&= p\, \mathbb{P}_k[\tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) < \infty \text{ et } X_{\tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}})+1} = 0 \,|\, X_1 = k+1] \\
&\quad + (1-p)\, \mathbb{P}_k[\tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) < \infty \text{ et } X_{\tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}})+1} = 0 \,|\, X_1 = k-1] \\
&= p\, \mathbb{P}_{k+1}[\tau((Y_n)_{n\in\mathbb{N}}) < \infty \text{ et } Y_{\tau((Y_n)_{n\in\mathbb{N}})} = 0] \\
&\quad + (1-p)\, \mathbb{P}_{k-1}[\tau((Y_n)_{n\in\mathbb{N}}) < \infty \text{ et } Y_{\tau((Y_n)_{n\in\mathbb{N}})} = 0] \\
&= p\, f(k+1) + (1-p)\, f(k-1).
\end{aligned}$$

Dans cette suite d'égalités, on a introduit la notation $Y_n = X_{n+1}$ pour la chaîne décalée ; conditionnellement à $X_1 = k \pm 1$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la loi de la chaîne de même matrice P que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et de point de départ $k \pm 1$. On traite de même le cas de la fonction g, en utilisant par exemple la formule $\mathbb{E}[T] = \sum_{j=0}^{\infty} j\, \mathbb{P}[T = j]$ (on pourrait aussi utiliser directement des espérances conditionnelles) :

$$\begin{aligned}
g(k) &= \mathbb{E}_k[\tau((X_n)_{n\in\mathbb{N}})] = \sum_{j=0}^{\infty} j\, \mathbb{P}_k[\tau((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) = j] \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} j\, \mathbb{P}_k[\tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) + 1 = j] = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)\, \mathbb{P}_k[\tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) = l] \\
&= 1 + \sum_{l=0}^{\infty} l\, \mathbb{P}_k[\tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) = l]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + p \sum_{l=0}^{\infty} l\, \mathbb{P}_k[\tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) = l \,|\, X_1 = k+1] \\
&\quad + (1-p) \sum_{l=0}^{\infty} l\, \mathbb{P}_k[\tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) = l \,|\, X_1 = k-1] \\
&= 1 + p \sum_{l=0}^{\infty} l\, \mathbb{P}_{k+1}[\tau((Y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = l] + (1-p) \sum_{l=0}^{\infty} l\, \mathbb{P}_{k-1}[\tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) = l] \\
&= 1 + p\, g(k+1) + (1-p)\, g(k-1).
\end{aligned}
$$

(c) La somme télescopique $\sum_{k=0}^{M-1} \delta_f(k)$ vaut $f(M) - f(0) = -1$. Par ailleurs, la relation de récurrence pour f se réécrit :

$$\delta_f(k) = \frac{1-p}{p}\, \delta_f(k-1).$$

On a donc une suite géométrique de rapport $r = \frac{1-p}{p}$, et $-1 = \delta_f(0) \sum_{k=0}^{M-1} r^k = \delta_f(0)\, \frac{1-r^M}{1-r}$, d'où

$$\delta_f(k) = -r^k \frac{1-r}{1-r^M}.$$

Alors, pour tout k,

$$f(k) = f(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \delta_f(j) = 1 - \frac{1-r^k}{1-r^M} = \frac{r^k - r^M}{1-r^M}.$$

(d) On garde la même notation $r = \frac{1-p}{p}$ que précédemment. Si $\delta_g(k) = g(k+1) - g(k) - \frac{1}{1-2p}$, alors la relation de récurrence pour g se réécrit :

$$\delta_g(k) = r\, \delta_g(k-1).$$

Comme $\sum_{k=0}^{M-1} \delta_g(k) = -\frac{M}{1-2p}$, on en déduit que $-\frac{M}{1-2p} = \delta_g(0)\, \frac{1-r^M}{1-r}$, puis que

$$\delta_g(k) = -\frac{M}{1-2p} r^k \frac{1-r}{1-r^M}.$$

Alors, $g(k) - g(0) - \frac{k}{1-2p} = \sum_{j=0}^{k-1} \delta_g(j) = -\frac{M}{1-2p} \frac{1-r^k}{1-r^M}$, donc

$$g(k) = \frac{k}{1-2p} - \frac{M}{1-2p} \frac{1-r^k}{1-r^M}.$$

(e) Supposons d'abord $p < \frac{1}{2}$, et donc $r > 1$. Alors, lorsque M tend vers l'infini, $f(k)$ tend vers 1 pour tout k, et $g(k)$ tend vers $\frac{k}{1-2p}$ pour tout k. Ceci laisse penser que la marche aléatoire sur $\mathbb{N} = [\![0, +\infty]\!]$ avec pas ± 1 de probabilités p et $1-p$ retourne toujours vers 0 lorsqu'elle part d'un entier k, et qu'elle met un temps aléatoire d'espérance $\frac{k}{1-2p}$; on verra que ce résultat est juste.

Supposons maintenant $p > \frac{1}{2}$, et donc $r < 1$. Lorsque M tend vers l'infini, $f(k)$ tend vers r^k, et $g(k)$ tend vers l'infini. Ainsi, dans ce cas, la marche aléatoire "limite" sur $\mathbb{N}$ devrait atteindre le point 0 partant de k seulement avec probabilité r^k ; on peut de nouveau montrer que c'est effectivement le cas.

7. Image d'une chaîne de Markov.

(a) Prenons la matrice de transition sur trois états $\{0,1,2\}$:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $X_0 = 0$, alors $X_n = n \bmod 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit f la fonction de $\{0,1,2\}$ vers $\{0,1\}$ définie par $f(0) = 0$, $f(1) = f(2) = 1$. Si $Y_n = f(X_n)$, alors

$$Y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \equiv 0 \bmod 3, \\ 1 & \text{si } n \equiv 1 \text{ ou } 2 \bmod 3. \end{cases}$$

Raisonnons par l'absurde et supposons donnée une matrice Q de taille 2×2 telle que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une chaîne de Markov de matrice Q. Alors,

$$Q(0,1) = \mathbb{P}[Y_1 = 1 \,|\, Y_0 = 0] = \mathbb{P}[X_1 \in \{1,2\} \,|\, X_0 = 0] = 1$$

et donc $Q(0,0) = 0$. Puis,

$$Q^3(0,0) = \mathbb{P}[Y_3 = 0 \,|\, Y_0 = 0] = \mathbb{P}[X_3 = 0 \,|\, X_0 = 0] = 1.$$

Or, on peut développer $Q^3(0,0) = \sum_{i,j} Q(0,i)Q(i,j)Q(j,0)$, et comme $Q(0,0) = 0$, ceci implique

$$1 = Q(0,1)Q(1,1)Q(1,0) = Q(1,1)Q(1,0).$$

Alors, $Q(1,1)$ et $Q(1,0)$ sont des nombres dans $[0,1]$ dont le produit vaut 1, donc ils valent tous les deux 1. Mais $Q(1,1) + Q(1,0) = 1 \neq 2$, d'où une contradiction. L'image $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas une chaîne de Markov.

(b) On décompose la probabilité en fonction des valeurs de $X_0, \dots, X_{n+1}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[Y_0 = y_0, \dots, Y_n = y_n, Y_{n+1} = y_{n+1}] \\
&= \sum_{\substack{x_0 \in f^{-1}(\{y_0\}), \dots, x_n \in f^{-1}(\{y_n\}) \\ x_{n+1} \in f^{-1}(\{y_{n+1}\})}} \mathbb{P}[X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1}] \\
&= \sum_{\substack{x_0 \in f^{-1}(\{y_0\}), \dots, x_n \in f^{-1}(\{y_n\}) \\ x_{n+1} \in f^{-1}(\{y_{n+1}\})}} \mathbb{P}[X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n]\, \mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \,|\, X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n] \\
&= \sum_{\substack{x_0 \in f^{-1}(\{y_0\}), \dots, x_n \in f^{-1}(\{y_n\}) \\ x_{n+1} \in f^{-1}(\{y_{n+1}\})}} \mathbb{P}[X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n]\, P(x_n, x_{n+1}) \\
&= \sum_{x_0 \in f^{-1}(\{y_0\}), \dots, x_n \in f^{-1}(\{y_n\})} \mathbb{P}[X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n]\, P(x_n, f^{-1}(\{y_{n+1}\})) \\
&= \mathbb{P}[Y_0 = y_0, \dots, Y_n = y_n]\, Q(y_n, y_{n+1})
\end{aligned}$$

Ainsi, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de matrice Q. Sa loi initiale est

$$\mathbb{P}[Y_0 = y_0] = \sum_{x_0 \in f^{-1}(\{y_0\})} \pi_0(x_0) = \pi_0(f^{-1}(\{y_0\})).$$

Autrement dit, c'est la mesure image $f_*\pi_0$ de la loi initiale π_0 de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par f.

(c) Fixons des nombres y_1 et y_2 dans N. Soit x et x' deux vecteurs avec le même nombre y_1 de coordonnées égales à 1. On a

$$P(x, f^{-1}(\{y_2\})) = \begin{cases} \frac{N-y_1}{N} & \text{si } y_2 = y_1 + 1, \\ \frac{y_1}{N} & \text{si } y_2 = y_1 - 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

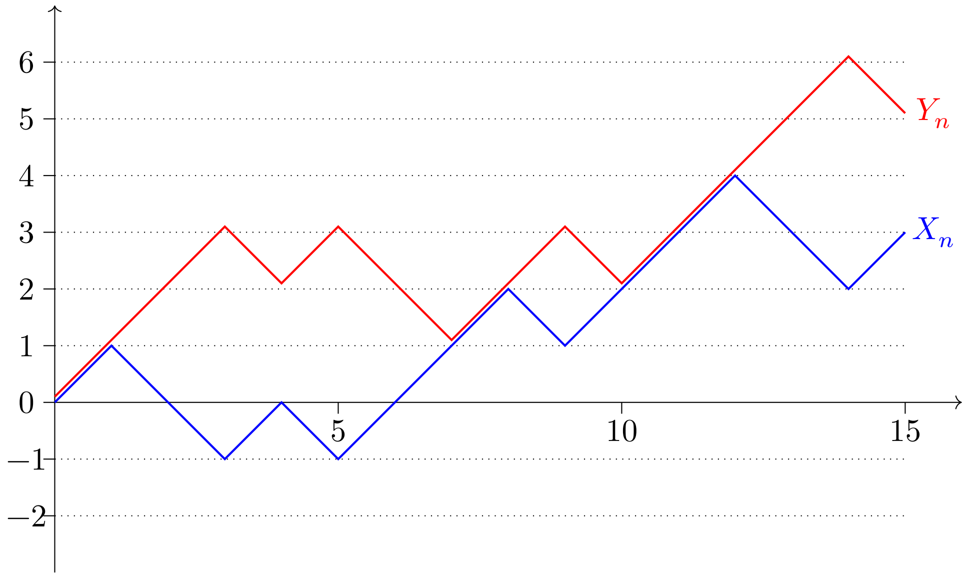
En effet, pour le premier cas par exemple, il y a $N - y_1$ vecteurs qui différent de x en exactement une coordonnée, changée de 0 en 1 ; et tous ces vecteurs ont pour probabilité de transition $\frac{1}{N}$.

Le résultat ne dépend que de y_1 et y_2, donc on obtient la même formule lorsqu'on calcule $P(x', f^{-1}(\{y_2\})$. Ainsi, $Y_n = f(X_n)$ est une chaîne de Markov, de matrice de transition :

$$Q(k, k+1) = \frac{N-k}{N} \qquad ; \qquad Q(k, k-1) = \frac{k}{N}.$$

8. Transformation $2M - X$.

(a) Voici sur un même dessin une trajectoire $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la trajectoire $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ correspondante :



Comme $X_n \leq M_n$, on a toujours

$$Y_n = 2M_n - X_n \geq M_n = \left(\max_{0 \leq k \leq n} X_n \right) \geq X_n.$$

On a égalité si et seulement si $X_n = M_n$; ainsi, $Y_n = X_n$ aux instants n où X_n atteint son maximum.

(b) Si $X_n < Y_n$, alors $X_n < M_n$ d'après la question précédente. Le maximum au temps $n+1$ ne pourra donc pas augmenter, car $X_{n+1} \leq X_n + 1 \leq M_n$. Ainsi,

$$(X_n < Y_n) \Rightarrow (M_{n+1} = M_n) \Rightarrow (Y_{n+1} = 2M_n - X_{n+1} = 2M_n - X_n - \xi_{n+1} = Y_n - \xi_{n+1}).$$

On a donc montré que si $X_n < Y_n$, alors $(X_{n+1}, Y_{n+1}) = (X_n + \xi_{n+1}, Y_n - \xi_{n+1})$. Supposons maintenant $X_n = M_n = Y_n$. Alors, le maximum au temps $n+1$ peut augmenter d'une unité si $X_{n+1} = X_n + 1$ (dans le cas contraire, $M_{n+1} = M_n$). On a donc :

$$\begin{cases} (\xi_{n+1} = 1) & \Rightarrow (M_{n+1} = M_n + 1) \Rightarrow (Y_{n+1} = 2M_n + 2 - X_n - 1 = Y_n + 1); \\ (\xi_{n+1} = -1) & \Rightarrow (M_{n+1} = M_n) \qquad \Rightarrow (Y_{n+1} = 2M_n - X_n + 1 = Y_n + 1). \end{cases}$$

Ainsi, si $X_n = Y_n$, alors $(X_{n+1}, Y_{n+1}) = (X_n + \xi_{n+1}, Y_n + 1)$. On a donc bien montré que $(X_{n+1}, Y_{n+1}) = F(X_n, Y_n, \xi_{n+1})$ dans tous les cas. Par le théorème de représentation, $(X_n, Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une chaîne de Markov sur $\mathfrak{X}$, de matrice de transition donnée par :

$$P((k,l),(k+1,l-1)) = P((k,l),(k-1,l+1)) = \frac{1}{2}$$

si $k < l$, et

$$P((k,l),(k+1,l+1)) = P((k,l),(k-1,l+1)) = \frac{1}{2}$$

si $k = l$.

(c) Comme $Y_n = 2M_n - X_n$, Y_n et X_n ont même parité. On sait déjà que $Y_n \geq X_n$, et comme $M_n \geq 0$, $Y_n \geq -X_n$, d'où $Y_n \geq X_n \geq -Y_n$. Ainsi, $X_n \in I_{Y_n}$.

(d) On aimerait montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov en utilisant le résultat de l'exercice précédent ; il faut alors en particulier calculer pour $(k,l) \in \mathfrak{X}^*$ la probabilité

$$P((k,l), f^{-1}(l+1))$$

avec $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{N}$ projection sur la deuxième coordonnée. Par la question précédente, $f^{-1}(l+1) = I_{l+1} \times \{l+1\}$. On a donc :

$$\begin{aligned} P((k,l), f^{-1}(l+1)) &= \sum_{j\in I_{l+1}} P((k,l),(j,l+1)) \\ &= P((k,l),(k+1,l+1)) + P((k,l),(k-1,l+1)) = 1_{(k=l)}. \end{aligned}$$

Cette valeur dépend explicitement de $x = (k,l)$, alors qu'elle ne devrait dépendre que de l pour appliquer le critère de l'exercice précédent.

(e) Supposons d'abord $l' = l+1$, et fixons $k' \in I_{l'}$. Notons que, pour que $P((k,l),(k',l'))$ soit non nulle, il faut que $k \in \{k'+1, k'-1\}$. On a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k\in I_l} P((k,l),(k',l+1)) &= P((k'-1,l),(k',l+1)) + 1_{(k'+1\leq l)} P((k'+1,l),(k',l+1)) \\ &= \frac{1_{(k'=l')}}{2} + \frac{1_{(k'<l')}}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Si $l' = l-1$, on calcule de même :

$$\sum_{k\in I_l} P((k,l),(k',l-1)) = P((k'+1,l),(k',l-1)) + P((k'-1,l),(k',l-1)) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

en utilisant le fait que, puisque $k' \in I'_l$, on a $k' \leq l'$, donc $k'-1 < l'+1 = l$.

(f) On calcule

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[Y_{n+1} = l_{n+1} \,|\, Y_1 = l_1, \dots, Y_n = l_n] \\ &= \frac{\mathbb{P}[Y_1 = l_1, \dots, Y_n = l_n, Y_{n+1} = l_{n+1}]}{\mathbb{P}[Y_1 = l_1, \dots, Y_n = l_n]} \\ &= \sum_{k_1,\dots,k_{n+1}} \frac{\mathbb{P}[(X_1,Y_1) = (k_1,l_1), \dots, (X_n,Y_n) = (k_n,l_n), (X_{n+1},Y_{n+1}) = (k_{n+1},l_{n+1})]}{\mathbb{P}[Y_1 = l_1, \dots, Y_n = l_n]} \\ &= \sum_{k_1,\dots,k_{n+1}} \frac{\mathbb{P}[(X_1,Y_1) = (k_1,l_1), \dots, (X_n,Y_n) = (k_n,l_n)]}{\mathbb{P}[Y_1 = l_1, \dots, Y_n = l_n]} P((k_n,l_n),(k_{n+1},l_{n+1})) \\ &= \sum_{k_n,k_{n+1}} \frac{\mathbb{P}[Y_1 = l_1, \dots, Y_n = l_n, X_n = k_n]}{\mathbb{P}[Y_1 = l_1, \dots, Y_n = l_n]} P((k_n,l_n),(k_{n+1},l_{n+1})) \\ &= \sum_{k_n,k_{n+1}} p_{(l_1,\dots,l_n)}(k_n)\, P((k_n,l_n),(k_{n+1},l_{n+1})). \end{aligned}$$

(g) Le résultat est clair pour $n = 0$. Supposons le résultat établi jusqu'au rang n, et calculons

$$p_{(l_1,\dots,l_n,l_{n+1})}(k_{n+1}) = \frac{\mathbb{P}[Y_1 = l_1,\dots,Y_n = l_n, Y_{n+1} = l_{n+1}, X_{n+1} = k_{n+1}]}{\mathbb{P}[Y_1 = l_1,\dots,Y_n = l_n, Y_{n+1} = l_{n+1}]}.$$

Le dénominateur de cette fraction se décompose comme suit :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[Y_1 = l_1,\dots,Y_n = l_n, Y_{n+1} = l_{n+1}, X_{n+1} = k_{n+1}]\\
&= \sum_{k_n \in I_{l_n}} \mathbb{P}[Y_1 = l_1,\dots,Y_n = l_n, Y_{n+1} = l_{n+1}, X_n = k_n, X_{n+1} = k_{n+1}]\\
&= \sum_{k_n \in I_{l_n}} \mathbb{P}[Y_1 = l_1,\dots,Y_n = l_n, X_n = k_n]\, P((k_n,l_n),(k_{n+1},l_{n+1}))\\
&= \sum_{k_n \in I_{l_n}} \mathbb{P}[Y_1 = l_1,\dots,Y_n = l_n]\, p_{(l_1,\dots,l_n)}(k_n)\, P((k_n,l_n),(k_{n+1},l_{n+1}))\\
&= \sum_{k_n \in I_{l_n}} \mathbb{P}[Y_1 = l_1,\dots,Y_n = l_n]\, \frac{P((k_n,l_n),(k_{n+1},l_{n+1}))}{l_n+1}
\end{aligned}$$

Le numérateur est égal à la somme sur toutes les valeurs possibles de X_{n+1} de la quantité ci-dessus, c'est-à-dire :

$$\sum_{\substack{k_n \in I_{l_n}\\ \tilde{k}_{n+1} \in I_{l_{n+1}}}} \mathbb{P}[Y_1 = l_1,\dots,Y_n = l_n]\, \frac{P((k_n,l_n),(\tilde{k}_{n+1},l_{n+1}))}{l_n+1}.$$

Lorsque l'on fait le ratio, les probabilités $\mathbb{P}[Y_1 = l_1,\dots,Y_n = l_n]$ se simplifient et on obtient simplement

$$p_{(l_1,\dots,l_n,l_{n+1})}(k_{n+1}) = \frac{\sum_{k_n \in I_{l_n}} P((k_n,l_n),(k_{n+1},l_{n+1}))}{\sum_{k_n \in I_{l_n},\tilde{k}_{n+1} \in I_{l_{n+1}}} P((k_n,l_n),(\tilde{k}_{n+1},l_{n+1}))}.$$

Le numérateur vaut $\frac{1}{2}$ et le dénominateur vaut $\frac{1}{2}\operatorname{card}(I_{l_{n+1}}) = \frac{l_{n+1}+1}{2}$. Ainsi,

$$p_{(l_1,\dots,l_n,l_{n+1})}(k_{n+1}) = \frac{1}{l_{n+1}+1}.$$

(h) En combinant les deux questions précédentes, on obtient :

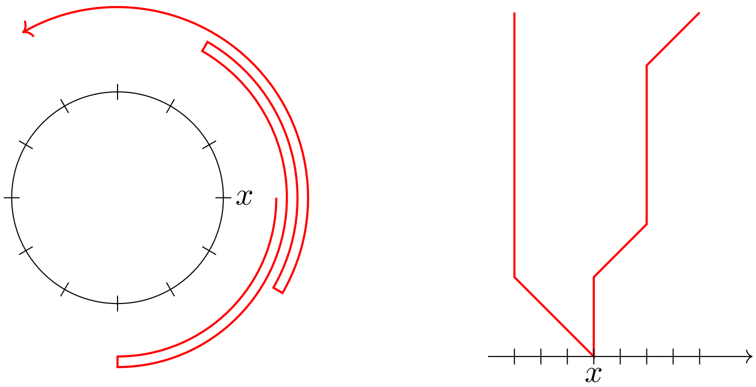
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[Y_{n+1} = l_{n+1}\,|\,Y_1 = l_1,\dots,Y_n = l_n] &= \frac{1}{l_n+1} \sum_{\substack{k_n \in I_{l_n}\\ k_{n+1} \in I_{l_{n+1}}}} P((k_n,l_n),(k_{n+1},l_{n+1}))\\
&= \frac{\operatorname{card}(I_{l_{n+1}})}{2\,(l_n+1)} = \frac{l_{n+1}+1}{2(l_n+1)}.
\end{aligned}$$

Le résultat ne dépend que de (l_n, l_{n+1}), donc on a montré que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov. Sa matrice de transition est :

$$Q(l,l+1) = \frac{l+2}{2(l+1)} \quad ; \quad Q(l,l-1) = \frac{l}{2(l+1)}.$$

9. Marche aléatoire sur le cercle et dernier site occupé.

(a) Lorsqu'on se déplace sur le cercle en partant d'un état x, l'ensemble des états visités est un arc de cercle contenant x et croissant avec le temps, jusqu'à ce qu'il recouvre entièrement le cercle.



Si $Y = y$ est le dernier état visité, alors juste avant, l'arc de cercle des états visités est $y+1 \to x \to y-1$ (en écrivant tous les entiers modulo N). On a donc $\tau_y > \tau_{y+1}$ et $\tau_y > \tau_{y-1}$, ce qui caractérise l'état y. Par disjonction des cas,

$$\{Y = y\} = \{\tau_y > \tau_{y-1} > \tau_{y+1}\} \sqcup \{\tau_y > \tau_{y+1} > \tau_{y-1}\}.$$

(b) On a $f(y+1) = 1$ et $f(y) = 0$, et pour $k \notin \{y, y+1\}$,

$$\begin{aligned} f(k) &= \mathbb{P}_k[\tau_{y+1}((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) < \tau_y((X_n)_{n\in\mathbb{N}})] \\ &= \mathbb{P}_k[\tau_{y+1}((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) < \tau_y((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}})] \\ &= \frac{1}{2}\,\mathbb{P}_k[\tau_{y+1}((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) < \tau_y((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) \,|\, X_1 = k+1] \\ &\quad \frac{1}{2}\,\mathbb{P}_k[\tau_{y+1}((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) < \tau_y((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) \,|\, X_1 = k-1] \\ &= \frac{1}{2}\,\mathbb{P}_{k+1}[\tau_{y+1}((Y_n)_{n\in\mathbb{N}}) < \tau_y((Y_n)_{n\in\mathbb{N}})] + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}_{k-1}[\tau_{y+1}((Y_n)_{n\in\mathbb{N}}) < \tau_y((Y_n)_{n\in\mathbb{N}})] \\ &= \frac{1}{2}\,f(k+1) + \frac{1}{2}\,f(k-1). \end{aligned}$$

C'est essentiellement le même argument que pour la chaîne de la ruine du joueur (exercice 2). On peut réécrire ceci $f(k+1) - f(k) = f(k) - f(k-1)$, donc la fonction f est affine sur l'arc de cercle $y+1 \to x \to y$. Comme il y a $N-1$ pas, $f(y-1) = \frac{1}{N-1}$.

(c) On écrit :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_x[\tau_{y-1} = t < \tau_{y+1} < \tau_y] \\ &= \sum_{\substack{t<u<v \\ x_1,\ldots,x_{t-1} \neq y-1,y,y+1 \\ x_{t+1},\ldots,x_{u-1} \neq y,y+1 \\ x_{u+1},\ldots,x_{v-1} \neq y}} \mathbb{P}_x[X_1 = x_1, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = y-1, \ldots, X_u = y+1, \ldots, X_v = y]. \end{aligned}$$

Chaque terme de la somme peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned} &P(x, x_1) \cdots P(x_{t-1}, y-1)\, P(y-1, x_{t+1}) \cdots P(x_{u-1}, y+1)\, P(y+1, x_{u+1}) \cdots P(x_{v-1}, y) \\ &= \mathbb{P}_x[X_1 = x_1, \ldots, X_t = y-1]\, \mathbb{P}_{y-1}[Y_1 = x_{t+1}, \ldots, Y_{u-y} = y+1, \ldots, Y_{v-t} = y] \end{aligned}$$

avec $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (X_{n+t})_{n\in\mathbb{N}}$, qui est une chaîne de Markov de même matrice de transition. En resommant sur les états x_i, on obtient :

$$\mathbb{P}_x[\tau_{y-1} = t < \tau_{y+1} < \tau_y] = \mathbb{P}_x[t = \tau_{y-1} < \tau_{y+1}]\, \mathbb{P}_{y-1}[\tau_{y+1} < \tau_y] = \frac{1}{N-1}\, \mathbb{P}_x[t = \tau_{y-1} < \tau_{y+1}].$$

En sommant sur toutes les valeurs possibles sur t, on en déduit que pour $x \neq y$,

$$\mathbb{P}_x[\tau_{y-1} < \tau_{y+1} < \tau_y] = \frac{1}{N-1}\, \mathbb{P}_x[\tau_{y-1} < \tau_{y+1}].$$

(d) Symétriquement, on a bien sûr $\mathbb{P}_x[\tau_{y+1} < \tau_{y-1} < \tau_y] = \frac{1}{N-1}\,\mathbb{P}_x[\tau_{y+1} < \tau_{y-1}]$, donc en sommant ces deux identités,

$$\mathbb{P}_x[Y = y] = \frac{1}{N-1}\,\mathbb{P}_x[\tau_{y-1} < \tau_{y+1}] + \frac{1}{N-1}\,\mathbb{P}_x[\tau_{y+1} < \tau_{y-1}] = \frac{1}{N-1}$$

pour tout $x \neq y$. Ainsi, le dernier état atteint Y suit une loi uniforme sur $\mathfrak{X} \setminus \{x\}$.