Feuille d'exercices 2 — Chaînes de Markov 2025-2026

Objectifs : savoir classifier les états d'une chaîne finie ; utiliser le critère numérique avec la série $\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x,x)$ pour déterminer la récurrence ou transience d'une chaîne irréductible ; déterminer la récurrence ou la transience des états d'une chaîne infinie avec des calculs ad hoc *; utiliser la propriété de Markov simple.*

1. **Classification des états.** On considère la chaîne de Markov sur $\{1,2,3,4,5\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Classifier les états de cette chaîne. On demande pour chaque état s'il est transient ou récurrent, et dans ce dernier cas, quelle est sa classe de récurrence. Décrire l'ensemble $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ sous la loi $\mathbb{P}_3$, puis sous la loi $\mathbb{P}_2$.

2. **Récurrence ou transience de la marche aléatoire sur la droite.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire sur la droite $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}$ et de paramètre $p \in (0,1)$; sa matrice de transition est donnée par

$$P(k,k+1) = p \qquad ; \qquad P(k,k-1) = 1-p$$

   pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

   (a) Montrer que cette chaîne est irréductible.

   (b) Dans ce qui suit, on s'intéresse au caractère récurrent ou transient de la chaîne ; on peut supposer sans perte de généralité que la loi initiale est δ_0. On suppose d'abord $p \neq \frac{1}{2}$. Rappeler la représentation de X_n à l'aide de variables i.i.d. $\xi_{n\geq 1}$ à valeurs dans $\{\pm 1\}$. En utilisant la loi des grands nombres, montrer que la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est transiente.

   (c) On suppose à partir de maintenant $p = \frac{1}{2}$. Montrer que $P^{2n+1}(0,0) = 0$ pour tout n, et que

$$P^{2n}(0,0) = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

   (d) En remarquant que $\binom{2n}{n} = 4\,\frac{2n-1}{2n}\binom{2(n-1)}{n-1}$, montrer par récurrence sur n que $P^{2n}(0,0) \geq \frac{1}{2n}$ pour tout $n \geq 1$. En déduire que si $p = \frac{1}{2}$, alors la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente.

3. **Chaîne de vie et de mort, I.** Soit $(p_k, q_k, r_k)_{k\geq 0}$ une suite de triplets de nombre réels positifs ou nuls, telle que $q_0 = 0$ et $p_k + q_k + r_k = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La chaîne de vie et de mort avec ces paramètres est la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'espace des états $\mathfrak{X} = \mathbb{N}$, et de probabilités de transition

$$P(k,k+1) = p_k \qquad ; \qquad P(k,k-1) = q_k \qquad ; \qquad P(k,k) = r_k$$

   pour tout $k \geq 0$ (on a imposé $q_0 = 0$ pour ne pas avoir de transition possible de 0 vers -1).

   (a) Dessiner le graphe $\mathcal{G}_P$ de la chaîne de vie et de mort. Quels paramètres faut-il choisir pour retrouver le modèle de file d'attente de paramètre $p \in (0,1)$?

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur la suite de paramètres $(p_k, q_k, r_k)_{k\geq 0}$ pour que la chaîne soit irréductible. Dans tout ce qui suit, on suppose que cette condition est vérifiée.

(c) On définit une fonction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ par :

$$\phi(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0; \\ \sum_{l=0}^{k-1} \left(\prod_{j=1}^{l} \frac{q_j}{p_j}\right) & \text{si } k \geq 1, \end{cases}$$

le terme $l = 0$ d'une somme étant le produit vide, égal à 1. Soit $k < l$ deux entiers. Montrer que pour tout $x \in [\![k, l]\!]$,

$$\mathbb{P}_x[\tau_k < \tau_l \text{ et } \tau_k < +\infty] = \frac{\phi(l) - \phi(x)}{\phi(l) - \phi(k)}.$$

On pourra utiliser la propriété de Markov simple pour écrire une équation de récurrence vérifiée par la fonction $f(x) = \mathbb{P}_x[\tau_k < \tau_l \text{ et } \tau_k < +\infty]$, puis montrer que la formule ci-dessus est la seule solution. Les calculs pourront être simplifiés par l'introduction de $\delta_f(x) = f(x+1) - f(x)$.

(d) On pose $\phi(\infty) = \lim_{k\to+\infty} \phi(k) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{l} \frac{q_j}{p_j}\right)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- $\phi(\infty) = +\infty$.
- La chaîne de Markov est irréductible récurrente.

On pourra établir les identités suivantes : $\mathbb{P}_0[\tau_0^+ = +\infty] = p_0\, \mathbb{P}_1[\tau_0 = +\infty]$, et

$$\mathbb{P}_0[\tau_0^+ < +\infty] \geq \mathbb{P}_1[\tau_0 < +\infty] = \lim_{l\to\infty} \mathbb{P}_1[\tau_0 < \tau_l \text{ et } \tau_0 < +\infty].$$

(e) On suppose que $\phi(\infty) < +\infty$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty$ avec probabilité 1 sous $\mathbb{P}_k$, pour tout état $k \in \mathbb{N}$.

(f) Application. On suppose que $r_k = 0$ pour tout k, et que $p_k = \frac{1}{2} + \varepsilon_k$, avec $\varepsilon_k \simeq C\, k^{-\alpha}$ lorsque $k \to \infty$, $C > 0$ et $\alpha > 0$ étant deux constantes. Si $\alpha > 1$, montrer que la chaîne est récurrente. Si $\alpha < 1$, montrer que la chaîne est transiente. Enfin, si $\alpha = 1$, discuter de la récurrence ou transience en fonction de la valeur de C.

4. Croissance ou retour en 0, I. On fixe une suite de paramètres $(p_k)_{k\geq 0}$ dans $[0, 1]$, et on considère la chaîne de Markov sur l'espace d'états $\mathbb{N}$, de matrice de transition :

$$P(k, k+1) = p_k \quad ; \quad P(k, 0) = 1 - p_k$$

pour tout $k \geq 0$ (les autres coefficients $P(k, l)$ sont nuls).

(a) Dessiner le graphe de la matrice de transition P. À quelle condition nécessaire et suffisante sur la suite des paramètres $(p_k)_{k\geq 0}$ la chaîne de Markov est-elle irréductible sur $\mathbb{N}$? On fera attention au fait que, en général, on peut redescendre d'un état k à l'état 0 en commençant par monter aux états $k + 1, k + 2, \ldots, k + l$ puis en descendant à 0 depuis $k + l$. Dans tout ce qui suit, on supposera la condition d'irréductibilité vérifiée.

(b) Pour $k \geq 0$, on note $q_k = \prod_{j=0}^{k-1} p_j = p_0 p_1 \cdots p_{k-1}$, et $r_k = q_k - q_{k+1}$; en particulier, $q_0 = 1$. Que dire de la suite de nombres réels $(q_k)_{k\geq 0}$? Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) On a $\sum_{k=0}^{\infty} r_k = 1$.

(ii) On a $\lim_{k\to\infty} q_k = 0$

(c) Pour $n \geq 0$, exprimer la probabilité de retour $\mathbb{P}_0[X_n = 0] = P^n(0,0)$ comme une somme de certains produits $r_{n_1} r_{n_2} \cdots r_{n_m}$:

$$P^n(0,0) = \sum_{(n_1,\ldots,n_m)\in I_n} r_{n_1} r_{n_2} \cdots r_{n_m},$$

où I_n est un ensemble de m-uplets d'entiers qu'on demande de déterminer (l'entier m est arbitraire et dans chaque ensemble I_n, il pourra y avoir des 1-uplets, des 2-uplets, des 3-uplets, etc.). On pourra décomposer tout chemin de longueur n reliant 0 à 0 en une concaténation de boucles $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \cdots \to n_i \to 0$.

(d) Relier les deux quantités suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^n(0,0) \quad \text{et} \quad \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k \right)^m.$$

En déduire que que la chaîne de Markov de matrice P est récurrente si et seulement si $\lim_{k\to+\infty} q_k = 0$.

5. La chaîne de Markov des arbres de Galton–Watson. On considère une famille $(\xi_{n,m})_{n\geq 0,\, m\geq 1}$ de variables indépendantes identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi commune μ : pour tout $n \geq 0$, tout $m \geq 1$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}[\xi_{n,m} = k] = \mu(k).$$

Le *modèle de Galton–Watson* associé à la loi de reproduction μ est la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec X_0 indépendant des variables $\xi_{n,m}$, et

$$X_{n+1} = \sum_{m=1}^{X_n} \xi_{n,m}$$

pour tout $n \geq 0$. On convient que la somme est nulle si $X_n = 0$. Ce modèle correspond à la situation suivante : X_n est le nombre d'individus d'une population au temps n, et chaque individu $m \in [\![1, X_n]\!]$ de la n-ième génération a $\xi_{n,m}$ enfants, ce nombre d'enfants étant aléatoire et indépendant de tout ce qui s'est passé précédemment et de toutes les autres descendances $\xi_{n,m'\neq m}$.

(a) Utiliser un théorème du cours pour montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur l'espace d'états $\mathfrak{X} = \mathbb{N}$. Montrer que la matrice de transition de cette chaîne est

$$P(k,l) = \sum_{\substack{l_1+l_2+\cdots+l_k=l \\ l_1,l_2,\ldots,l_k\geq 0}} \mu(l_1)\mu(l_2)\cdots\mu(l_k) = \mu^{*k}(l),$$

où μ^{*k} désigne la loi de la somme de k variables aléatoires indépendantes de loi μ (convolée k-ième de la loi μ).

(b) Montrer que 0 est un état *absorbant* : $P(0,0) = 1$. La chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle irréductible ?

(c) Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que $\mu(0) > 0$, et on se placera sous la loi $\mathbb{P}_1 : X_0 = 1$. Montrer que 0 est le seul état récurrent de la chaîne. En déduire que

$$\mathbb{P}_1\left[\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty\right] + \mathbb{P}_1\left[\lim_{n\to\infty} X_n = 0\right] = 1.$$

(d) On souhaite calculer en fonction de μ la *probabilité d'extinction* $p_e = \mathbb{P}_1[\lim_{n\to\infty} X_n = 0]$. Expliquer pourquoi

$$p_e = \lim_{n\to\infty} \left(\mathbb{P}_1[X_n = 0]\right).$$

On pose $G_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1[X_n = k]\, s^k$, qui est une fonction croissante de s définie au moins sur l'intervalle $[0,1]$. Montrer que $G_1(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(k)\, s^k$, puis, par récurrence sur n :

$$G_n(s) = \underbrace{G_1 \circ G_1 \circ \cdots \circ G_1}_{n \text{ fois}}(s) = (G_1)^{\circ n}(s).$$

Interpréter $G_n(0)$ comme une probabilité. Que vaut p_e par rapport à la suite de fonctions $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

(e) On suppose que le nombre moyen de descendants $m = \sum_{k=0}^{\infty} k\, \mu(k)$ est fini. Montrer que $m = (G_1)'(1)$. En déduire qu'il y a dans ce cas équivalence entre :

$$(p_e = 1) \iff (m \leq 1).$$

On conseille de dessiner l'aspect de la fonction $G_1 : [0,1] \to [0,1]$ en fonction du paramètre m.

6. Chaînes de Markov et fonctions harmoniques, II. Soit $\mathfrak{X}$ un ensemble fini, et P une matrice de transition irréductible sur cet ensemble. On rappelle qu'une fonction $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ est dite harmonique pour P si elle vérifie l'équation $Pf = f$. Plus généralement, si $\emptyset \subsetneq A \subsetneq \mathfrak{X}$ est une partie non vide et non pleine et si $g : A \to \mathbb{R}$ est une fonction, le *problème de Dirichlet* est le système d'équations suivant : on cherche $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ telle que :

- pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$.
- en dehors de A, f est harmonique : pour tout $x \notin A$, $f(x) = \sum_{y\in\mathfrak{X}} P(x,y)\, f(y)$.

(a) On suppose dans cette question que g est la fonction nulle et que f est une solution du problème de Dirichlet. Soit x_0 un point de $\mathfrak{X} \setminus A$ tel que

$$f(x_0) = \max\{f(x) \,|\, x \in \mathfrak{X} \setminus A\}.$$

Montrer en raisonnant par l'absurde que $f(x_0) \leq 0$. En déduire que $f = 0$.

(b) Montrer que si $A \neq \{\emptyset, \mathfrak{X}\}$, alors il y a au plus une solution au problème de Dirichlet pour la paire (A, g) associée à une fonction $g : A \to \mathbb{R}$.

(c) On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrice de transition P sur $\mathfrak{X}$, et on note

$$\tau_A = \inf\{n \geq 0 \,|\, X_n \in A\}.$$

Montrer que τ_A est fini presque sûrement (quelque soit la mesure initiale π_0).

(d) Montrer que $f(x) = \mathbb{E}_x[g(X_{\tau_A})]$ est bien définie et est l'unique solution du problème de Dirichlet pour la paire (A, g).

7. Matrices sous-stochastiques et critère de transience. Soit $\mathfrak{X}$ un espace d'états fini ou dénombrable. Une matrice *sous-stochastique* sur $\mathfrak{X}$ est une matrice $(Q(x,y))_{x,y\in\mathfrak{X}}$ à coefficients réels positifs telle que $\sum_{y\in\mathfrak{X}} Q(x,y) \leq 1$ pour tout $x \in \mathfrak{X}$.

(a) Montrer que si Q est sous-stochastique, alors ses puissances Q^n le sont également. Plus précisément, montrer que pour tout $x \in \mathfrak{X}$, les sommes sur une ligne

$$\sigma_{Q^n}(x) = \sum_{y\in\mathfrak{X}} Q^n(x,y)$$

forment une suite $(\sigma_{Q^n}(x))_{n\geq 1}$ qui est décroissante.

(b) On note $h(x) = \lim_{n\to\infty} \sigma_{Q^n}(x)$. Montrer que $h = Qh$. Soit k une solution positive de l'équation $k = Qk$, avec $0 \leq k(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathfrak{X}$. Montrer que $k(x) \leq \sigma_Q(x)$, puis par récurrence que $k(x) \leq \sigma_{Q^n}(x)$ pour tout $n \geq 1$. En déduire que $k(x) \leq h(x)$, et que h est la solution maximale du système d'équations

$$\begin{cases} k(x) = \sum_{y \in \mathfrak{X}} Q(x,y)\, k(y); \\ 0 \leq k(x) \leq 1. \end{cases}$$

(c) Soit P la matrice de transition d'une chaîne de Markov irréductible sur $\mathfrak{X}$, et $x_0 \in \mathfrak{X}$ un état arbitraire. On pose

$$Q(x,y) = \begin{cases} P(x,y) & \text{si } y \neq x_0, \\ 0 & \text{si } y = x_0. \end{cases}$$

Montrer que Q est une matrice sous-stochastique, et que la fonction

$$k(x) = \mathbb{P}_x[\forall n \geq 1,\ X_n \neq x_0]$$

est solution à valeurs dans $[0,1]$ du système d'équations $k = Qk$.

(d) En déduire qu'une chaîne de Markov irréductible de matrice de transition P est transiente si et seulement si, pour un état $x_0 \in \mathfrak{X}$ fixé, il existe une solution non nulle au système d'équations

$$\begin{cases} k(x) = \sum_{y \neq x_0} P(x,y)\, k(y); \\ 0 \leq k(x) \leq 1. \end{cases}$$

(e) Application. On considère le modèle de file d'attente, qui est la chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ de matrice de transition

$$\begin{aligned} &P(k,k+1) = p \quad \text{et} \quad P(k,k-1) = 1-p \quad \text{pour tout } k \geq 1; \\ &P(0,1) = 1; \end{aligned}$$

p est un paramètre réel dans $(0,1)$. Trouver l'ensemble des solutions du système de la question précédente avec $x_0 = 0$. En déduire en fonction de p la récurrence ou la transience de cette chaîne de Markov irréductible.