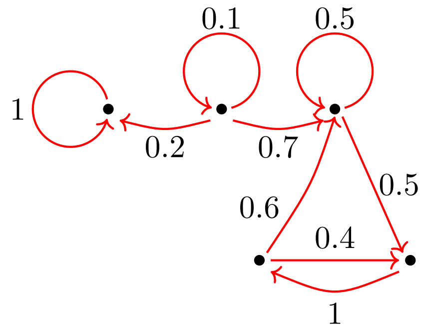
Corrigé des exercices 2

Chaînes de Markov 2025-2026

1. Classification des états. Dessinons le graphe de la chaîne de matrice P :



L'état 1 est absorbant : $P(1,1) = 1$. Sous $\mathbb{P}_1$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1. En particulier, 1 est un état récurrent.

L'état 2 n'a aucune flèche pointant vers lui depuis un autre état. Donc, si $X_1 \neq 2$ sous $\mathbb{P}_2$, alors $\tau_2^+ = +\infty$. On a ainsi :

$$\mathbb{P}_2[\tau_2^+ = +\infty] \geq \mathbb{P}_2[X_1 \neq 2] = 0.2 + 0.7 = 0.9 > 0.$$

Ceci implique 2 est un état transient.

Les états $3, 4, 5$ correspondent à une sous-matrice de P qui est encore stochastique. Autrement dit, sous $\mathbb{P}_x$ avec $x \in \{3, 4, 5\}$, tout se passe comme si on regardait une chaîne de Markov de matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.6 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Or, cette matrice est irréductible, donc les 3 états $3, 4, 5$ sont récurrents puisqu'ils ont tous même statut (ils communiquent tous ensemble), et qu'au moins l'un deux est récurrent. Ainsi, la chaîne de matrice P admet un état transient 2, et deux classes d'états récurrents : $\{1\}$ et $\{3, 4, 5\}$.

Sous la mesure $\mathbb{P}_3$, $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\} = \{3, 4, 5\}$ avec probabilité 1 : tous les états de la classe de récurrence sont visités infiniment souvent. Sous la mesure $\mathbb{P}_2$, X_n reste en l'état 2 un certain temps, jusqu'à une première transition vers 1 avec probabilité $\frac{2}{9}$, et vers 3 avec probabilité $\frac{7}{9}$. Dans le premier cas, $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\} = \{1, 2\}$, et dans le second cas, $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\} = \{2, 3, 4, 5\}$, puisqu'après avoir atteint l'état 3, la chaîne explore la classe de récurrence $\{3, 4, 5\}$, et visite ces états une infinité de fois.

2. Récurrence ou transience de la marche aléatoire sur la droite.

(a) La chaîne de Markov de matrice P est irréductible si et seulement si le graphe orienté associé $\mathcal{G}_P$ est connexe, et ici c'est clairement le cas. On peut aussi donner une preuve plus explicite de l'irréductibilité, en raisonnant comme suit. Soit $k \neq l$ deux états de $\mathbb{Z}$; on supposera $k < l$, l'autre cas étant tout à fait analogue. Alors, $P^{l-k}(k,l) > 0$, car :

$$P^{l-k}(k,l) \geq P(k,k+1)\, P(k+1,k+2) \cdots P(l-1,l) = p^{k-l} > 0.$$

Donc, pour toute paire d'états $(k \neq l)$, il existe $n \geq 1$ tel que $P^n(k,l) > 0$: la chaîne est donc irréductible.

(b) Une représentation de la chaîne de Markov est

$$X_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$$

avec les variables ξ_n i.i.d., et $\mathbb{P}[\xi_n = 1] = 1 - \mathbb{P}[\xi_n = -1] = p$. Par la loi des grands nombres, avec probabilité 1,

$$\frac{X_n}{n} \to \mathbb{E}[\xi_1] = 2p - 1.$$

Si $p \neq \frac{1}{2}$, alors $2p - 1 \neq 0$, et on a donc

$$X_n \to \begin{cases} +\infty & \text{si } p > \frac{1}{2}, \\ -\infty & \text{si } p < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Or, si $X_n \to +\infty$ par exemple, alors la chaîne ne peut visiter l'état 0 qu'un nombre fini de fois, donc 0 est transient. Comme la chaîne est irréductible, on en déduit que tous les états sont transients si $p \neq \frac{1}{2}$.

(c) Comme les variables ξ_n sont dans ± 1, $X_n \equiv n \bmod 2$ presque sûrement sous $\mathbb{P}_0$. Alors,

$$P^{2n+1}(0,0) = \mathbb{P}_0[X_{2n+1} = 0] \leq \mathbb{P}_0[X_{2n+1} \text{ est pair}] = 0.$$

Calculons maintenant $P^{2n}(0,0) = \mathbb{P}_0[X_{2n} = 0]$. Chaque chemin $0 \to x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_{2n} = 0$ avec $|x_i - x_{i-1}| = 1$ pour tout i a pour probabilité $(\frac{1}{2})^{2n} = \frac{1}{4^n}$. Pour construire un tel chemin, il suffit de choisir quels pas $x_i - x_{i-1}$ seront égaux à $+1$; les autres pas seront égaux à -1, et comme $x_{2n} = 0$, il y a autant de pas positifs $+1$ que de pas négatifs -1. On a donc :

$$(\text{nombre de chemins}) = (\text{nombre de façons de choisir } n \text{ pas positifs parmi } 2n) = \binom{2n}{n}.$$

On conclut que

$$P^{2n}(0,0) = (\text{nombre de chemins}) \times (\text{probabilité d'un chemin}) = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}.$$

(d) On remarque que :

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{2n(2n-1)}{n^2}\binom{2n-2}{n-1} = 4\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\binom{2n-2}{n-1}.$$

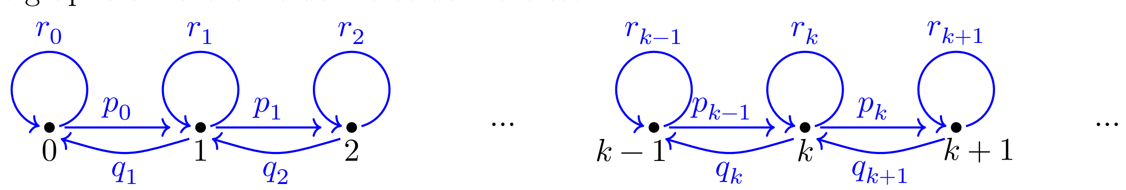
Ceci implique par récurrence sur n que $P^{2n}(0,0) \geq \frac{1}{2n}$ pour tout $n \geq 1$. Si $n = 1$, on a en effet $P^2(0,0) = \frac{1}{2}$. Supposons le résultat établi jusqu'au rang $n - 1 \geq 1$. Alors,

$$\begin{aligned} P^{2n}(0,0) &= \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\frac{1}{4^{n-1}}\binom{2n-2}{n-1} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)P^{2n-2}(0,0) \\ &\geq \frac{2n-1}{2n}\,\frac{1}{2n-2} \geq \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Donc, avec $p = \frac{1}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} P^n(0,0) \geq \sum_{n=1}^{\infty} P^{2n}(0,0) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = +\infty$. Ceci implique la récurrence de la chaîne (irréductible) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'espace d'états $\mathbb{Z}$.

3. Chaîne de vie et de mort, I.

(a) Le graphe de la chaîne de vie et de mort est :



On retrouve le modèle de file d'attente en posant $r_k = 0$ pour tout k, $p_0 = 1$, $p_{k\geq 1} = p$ et $q_{k\geq 1} = 1 - p$.

(b) Pour avoir l'irréductibilité, il faut et il suffit que le graphe orienté dessiné précédemment soit connexe. Ceci est le cas si :

$$p_k > 0 \quad \forall k \geq 0 \quad ; \quad q_k > 1 \quad \forall k \geq 1.$$

(c) On introduit comme dans le modèle de file d'attente la fonction

$$f(x) = \mathbb{P}_x[\tau_k < \tau_l \text{ et } \tau_k < +\infty].$$

Cette fonction vérifie $f(k) = 1$, $f(l) = 0$ et pour $k < x < l$,

$$f(x) = r_x\, f(x) + q_x\, f(x-1) + p_x\, f(x+1).$$

C'est une conséquence immédiate de la méthode d'un pas en avant (voir le corrigé de l'exercice 2 de la feuille 1). Comme $r_x = 1 - p_x - q_x$, on peut réécrire l'équation ci-dessus comme suit :

$$f(x+1) - f(x) = \frac{q_x}{p_x}\,(f(x) - f(x-1)).$$

On a donc $\delta_f(x) = A \prod_{j=1}^{x} \frac{q_j}{p_j}$ pour une certaine constante A, et pour tout x dans l'intervalle $[\![k, l]\!]$. Avec la définition de ϕ donnée dans l'énoncé, on peut donc écrire :

$$\delta_f(x) = A\,(\phi(x+1) - \phi(x)).$$

Puis, $f(x) = f(k) + \sum_{y=k}^{x-1} \delta_f(y) = 1 + A\,(\phi(x) - \phi(k))$, et la constante A est obtenue en évaluant cette identité en $x = l$:

$$0 = f(l) = 1 + A\,(\phi(l) - \phi(k)) \qquad ; \qquad A = -\frac{1}{\phi(l) - \phi(k)}.$$

Ainsi,

$$f(x) = 1 - \frac{\phi(x) - \phi(k)}{\phi(l) - \phi(k)} = \frac{\phi(l) - \phi(x)}{\phi(l) - \phi(k)}.$$

(d) Par la propriété de Markov,

$$\mathbb{P}_0[\tau_0^+ < +\infty] = r_0 + p_0\,\mathbb{P}_1[\tau_0 < +\infty] \geq (r_0 + p_0)\,\mathbb{P}_1[\tau_0 < +\infty] = \mathbb{P}_1[\tau_0 < +\infty].$$

Par ailleurs, sous $\mathbb{P}_1$, la suite des temps d'atteinte $(\tau_l)_{l\geq 1}$ est strictement croissante, donc la suite $(\mathbb{P}_1[\tau_0 < \tau_l \text{ et } \tau_0 < +\infty])_{l\geq 1}$ est croissante et

$$\mathbb{P}_1[\tau_0 < +\infty] = \lim_{l\to\infty} \mathbb{P}_1[\tau_0 < \tau_l \text{ et } \tau_0 < +\infty] = \lim_{l\to\infty} 1 - \frac{1}{\phi(l)} = 1 - \frac{1}{\phi(+\infty)}.$$

Si $\phi(+\infty) = +\infty$, alors $\mathbb{P}_1[\tau_0 < +\infty] = 1$, donc $\mathbb{P}_0[\tau_0^+ < +\infty] = 1$ et la chaîne est récurrente irréductible.

Pour la réciproque, notons qu'on a de nouveau par la propriété de Markov :

$$\mathbb{P}_0[\tau_0^+ = +\infty] = p_0\,\mathbb{P}_1[\tau_0 = +\infty] = p_0\,(1 - \mathbb{P}_1[\tau_0 < +\infty]) = \frac{p_0}{\phi(+\infty)}.$$

Si la chaîne est récurrente irréductible, alors $\mathbb{P}_0[\tau_0^+ = +\infty] = 0$, donc $\phi(+\infty) = +\infty$.

(e) Par transience de la chaîne, pour tout intervalle fini $[\![0, M]\!]$, la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne visite qu'un nombre fini de fois les états de cet intervalle, donc il existe N (aléatoire) tel que $X_n > M$ pour tout $n \geq N$. Ceci veut dire que $\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty$ avec probabilité 1.

(f) Le rapport $\frac{q_j}{p_j}$ est équivalent à $\frac{1-2Cj^{-\alpha}}{1+2Cj^{-\alpha}} \simeq 1 - 4Cj^{-\alpha} \simeq \exp(-4Cj^{-\alpha})$. Le produit $\prod_{j=1}^{l} \frac{q_j}{p_j}$ a donc le même comportement asymptotique que

$$\exp\left(-4C\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{j^\alpha}\right).$$

Si $\alpha > 1$, la série $\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{j^\alpha}$ est convergente, donc le produit est borné inférieurement par une constante strictement positive. Alors, $\phi(l) \geq Kl$ pour une certaine constante $K > 0$, et $\phi(+\infty) = +\infty$. Ceci implique que la chaîne est récurrente.

Si $\alpha < 1$, alors la série $\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{j^\alpha}$ est divergente, et de comportement asymptotique équivalent à

$$\int^{l}\frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\,l^{1-\alpha}.$$

Les termes de la série $\phi(+\infty) = \sum_{l=0}^{\infty}\prod_{j=0}^{l-1}\frac{q_j}{p_j}$ décroissent donc comme $\exp(-K\,l^{1-\alpha})$, et $\phi(+\infty) < +\infty$: la chaîne est donc transiente.

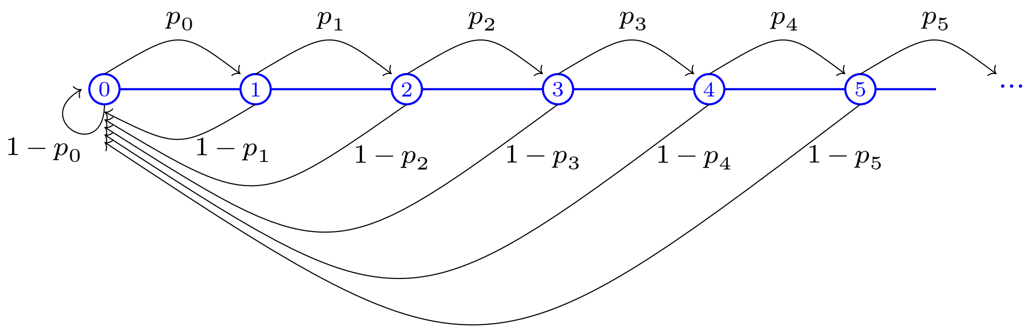
Finalement, si $\alpha = 1$, en supposant que $\frac{q_j}{p_j} \simeq \exp(-4Cj^{-1} + O(j^{-\beta}))$ avec $\beta > 1$, on voit que $\prod_{j=0}^{l-1}\frac{q_j}{p_j}$ a le même comportement asymptotique que

$$\exp(-4C\,\log l) = l^{-4C}.$$

La série $\phi(+\infty)$ est donc convergente si et seulement si $C > \frac{1}{4}$; dans ce cas, on a une chaîne transiente. Si $C \leq \frac{1}{4}$, alors la chaîne est récurrente.

4. Croissance ou retour en 0.

(a) Le graphe de la matrice de transition est :



La matrice est irréductible si on peut aller de tout état à tout autre état. Pour pouvoir monter jusqu'à un niveau arbitrairement élevé, on ne peut le faire que par des sauts de taille $+1$, donc il faut que tous les coefficients p_k soient strictement positifs. Cette condition étant satisfaite, pour pouvoir descendre jusqu'à un niveau arbitrairement bas, il faut et il suffit de pouvoir redescendre jusqu'à 0, partant de n'importe quel état k (c'est clairement nécessaire, et comme on peut ensuite remonter jusqu'à tout autre niveau, c'est suffisant). Notons qu'il n'est pas nécessaire de le faire en un seul coup : partant de k, on peut d'abord monter quelques étages $k+1, k+2, \dots, k+l$, puis descendre à cette étape à 0. Il faut et il suffit donc que $1 - p_m$ soit non nul pour des m arbitrairement grands ; autrement dit, $(p_k)_{k\geq 0}$ ne peut pas être stationnaire à 1 (c'est-à-dire égale à 1 pour k suffisamment grand). Ainsi :

(la chaîne est irréductible) $\Leftrightarrow$ (la suite $(p_k)_{k\geq 0}$ est strictement positive et non stationnaire à 1).

(b) Comme les paramètres p_k sont tous non nuls et plus petits que 1, la suite $(q_k)_{k\geq 0}$ est à valeurs dans $(0,1]$ et décroissante. Comme $p_k \neq 1$ pour une infinité de termes, $q_{k+1} < q_k$ pour une infinité de termes, de sorte que $(q_k)_{k\geq 0}$ n'est pas stationnaire. En tant que suite décroissante minorée, $(q_k)_{k\geq 0}$ admet une limite $q \in [0,1)$. Alors,

$$\sum_{k=0}^{l} r_k = q_0 - q_{l+1} = 1 - q_{l+1},$$

donc $q = 0$ si et seulement si la série $\sum_{k=0}^{\infty} r_k$ vaut 1.

(c) Explicitons le coefficient $P^n(0,0)$. Pour revenir en 0 en n étapes, il faut avoir fait m boucles $0 \to 1 \to 2 \to \cdots \to n_i \to 0$, avec $n_1, n_2, \ldots, n_m$ entiers positifs et

$$\sum_{i=1}^{m}(n_i + 1) = n_1 + n_2 + \cdots + n_m + m = n;$$

en effet, la somme des longueurs des boucles est le nombre total d'étapes. La probabilité pour faire ceci avec des entiers n_i fixés est le produit des probabilités de transition :

$$\underbrace{(P(0,1)P(1,2)\cdots P(n_1-1,n_1)P(n_1,0))}_{\text{première boucle}}\ \underbrace{(P(0,1)P(1,2)\cdots P(n_2-1,n_2)P(n_2,0))}_{\text{seconde boucle}}\cdots$$
$$= (p_0p_1\cdots p_{n_1-1}(1-p_{n_1}))(p_0p_1\cdots p_{n_2-1}(1-p_{n_2}))\cdots$$
$$= (q_{n_1} - q_{n_1+1})(q_{n_2} - q_{n_2+1})\cdots$$
$$= r_{n_1}r_{n_2}\cdots r_{n_m}.$$

On conclut que :

$$P^n(0,0) = \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_m \geq 0 \\ n_1+n_2+\cdots+n_m+m=n}} r_{n_1}r_{n_2}\cdots r_{n_m}.$$

(d) On sait que la chaîne de Markov est récurrente si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} P^n(0,0) = +\infty$. Sommer sur tous les entiers n revient à retirer la condition $n_1+n_2+\cdots+n_m+m = n$, donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^n(0,0) = \sum_{m\geq 0}\sum_{n_1,\ldots,n_m\geq 0} r_{n_1}r_{n_2}\cdots r_{n_m} = \sum_{m\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k\right)^m.$$

Or, $\sum_{k=0}^{\infty} r_k = 1-q$, donc le terme de droite est une série géométrique qui est convergente si et seulement si $1-q<1$, donc si et seulement si $q>0$. Ainsi, la chaîne est récurrente si et seulement si $q = 0$.

5. La chaîne de Markov des arbres de Galton–Watson.

(a) Notons $\xi_n = (\xi_{n,m})_{m\geq 1}$, qui est un élément aléatoire de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. On peut écrire $X_{n+1} = f(X_n, \xi_n)$ pour une certaine fonction $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$:

$$f(k,(x_m)_{m\geq 1}) = \sum_{m=1}^{k} x_m.$$

Comme les suites aléatoires ξ_n sont des variables i.i.d. dans $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et indépendantes de X_0, par le théorème de représentation des chaînes de Markov, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov. Sa matrice de transition est :

$$P(k,l) = \mathbb{P}[f(k,\xi_0) = l] = \mathbb{P}[\xi_{0,1}+\xi_{0,2}+\cdots+\xi_{0,k} = l] = \sum_{l=l_1+\cdots+l_k} \mu(l_1)\cdots\mu(l_k) = \mu^{*k}(l).$$

(b) Par définition, si $X_n = 0$, alors $X_{n+1} = 0$, donc $P(0,0) = 1$ et 0 est un état absorbant, donc récurrent. La chaîne n'est donc pas irréductible, puisque 0 ne communique qu'avec lui-même.

(c) Si $\mu(0) > 0$, alors $P(k,0) = (\mu(0))^k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc tout état communique avec 0. Tout état $k \geq 1$ est donc transient. En effet, supposons par l'absurde $k \geq 1$ récurrent. La relation de communication est une relation d'équivalence sur les états récurrents, donc comme k communique avec 0, 0 communique avec k. C'est une contradiction, car 0 ne communique qu'avec lui-même.

Une trajection de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a donc deux possibilités sous $\mathbb{P}_1$:

- soit elle visite 0 à un certain temps t, et elle reste alors stationnaire à 0 : $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$ (extinction de l'espèce).
- soit elle ne visite pas 0. Alors, toute partie finie $A = [\![1, M]\!]$ n'est visitée qu'un nombre fini de fois par transience des éléments de cette partie, donc :

$$\forall M \geq 1,\ \exists N \geq 0,\ (n \geq N) \Rightarrow (X_n > M).$$

avec probabilité 1. On a donc dans ce cas $\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty$.

On conclut que $\mathbb{P}_1[\lim_{n\to\infty} X_n = 0] + \mathbb{P}_1[\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty] = 1$.

(d) Comme 0 est un état absorbant,

$$\left\{\lim_{n\to\infty} X_n = 0\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\!\uparrow \{X_n = 0\}.$$

Par conséquent, $p_e = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_1[X_n = 0]$. Sous la mesure $\mathbb{P}_1$, X_1 a pour loi μ, donc

$$G_1(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1[X_1 = k]\, s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(k)\, s^k.$$

Supposons établie jusqu'au rang n la formule $G_n(s) = (G_1)^{\circ n}(s)$. Alors,

$$\begin{aligned} G_{n+1}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1[X_{n+1} = k]\, s^k \\ &= \sum_{j,k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1[X_n = j,\ X_{n+1} = k]\, s^k \\ &= \sum_{j,k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1[X_n = j]\, P(j,k)\, s^k. \end{aligned}$$

Or, si j est fixé, alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} P(j,k)\, s^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1+\cdots+k_j=k} \mu(k_1)\cdots\mu(k_j)\, s^k \\ &= \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \mu(k_1)\, s^{k_1}\right) \cdots \left(\sum_{k_j=0}^{\infty} \mu(k_j)\, s^{k_j}\right) \\ &= (G_1(s))^j. \end{aligned}$$

Donc, $G_{n+1}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}_1[X_n = j]\,(G_1(s))^j = G_n(G_1(s)) = (G_1)^{\circ(n+1)}(s)$. La formule $G_n = (G_1)^{\circ n}$ est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

Si l'on pose $s = 0$, on obtient

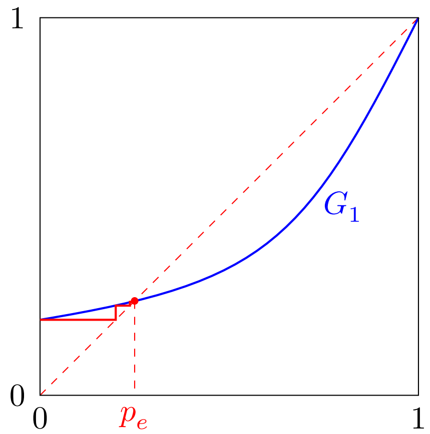
$$G_n(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1[X_n = k]\, 0^k = \mathbb{P}_1[X_n = 0].$$

Donc, $p_e = \lim_{n\to\infty} G_n(0) = \lim_{n\to\infty} (G_1)^{\circ n}(0)$.

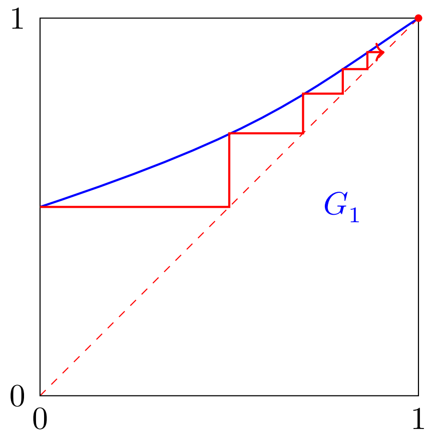
(e) La fonction $G_1(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(k)\, s^k$ est croissante, convexe, bien définie au moins pour $s \in [0,1]$. Sa dérivée sur cet intervalle est

$$G_1'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, \mu(k)\, s^{k-1}.$$

En particulier, $G_1'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, \mu(k) = m$. Si $m > 1$, G_1 et la suite $(G_1)^{\circ n}(0)$ ont l'aspect suivant (considérer les abscisses successives des points sur l'"escalier" et sur la diagonale) :



On a donc dans ce cas $p_e < 1$. Inversement, si $m \leq 1$, alors G_1 et la suite $(G_1)^{\circ n}(0)$ ont l'aspect suivant :



On a donc dans ce cas $p_e = 1$.

6. Chaînes de Markov et fonctions harmoniques, II.

(a) Soit f harmonique sur $\mathfrak{X} \setminus A$, égale à 0 sur A. On considère un point $x_0 \notin A$ tel que $f(x_0)$ soit maximum, égal à M. Supposons $M > 0$. Alors,

$$M = f(x_0) = (Pf)(x_0) = \sum_{y \in \mathfrak{X}} P(x_0, y)\, f(y)$$

est la moyenne d'éléments plus petits que M, donc tous les voisins y de x_0 dans le graphe $\mathcal{G}_P$ de la chaîne de Markov doivent aussi vérifier $f(y) = M$. Alors, de proche en proche, comme la chaîne est irréductible, on atteint un point $y \in A$ tel que $f(y) = M$, ce qui contredit l'hypothèse $f(y) = 0$ pour $y \in A$. Ainsi, $M \leq 0$, et symétriquement, on montre que $m = \min\{f(y),\, y \notin A\} \geq 0$, donc f est constante égale à 0.

(b) Dans le cas général, si f_1 et f_2 sont deux solutions du problème de Dirichlet pour la paire (A, g), alors la différence $f_1 - f_2$ est solution pour la paire $(A, 0)$, donc par la question précédente, $f_1 - f_2 = 0$ et $f_1 = f_2$. On a donc établi en toute généralité l'unicité de la solution à un problème de Dirichlet.

(c) La chaîne finie irréductible est automatiquement récurrente irréductible, donc tous les états $x \in \mathfrak{X}$ sont visités (et même infiniment souvent). Ceci implique, quelque soit π_0, $\tau_A < +\infty$ presque sûrement.

(d) Comme $\tau_A < +\infty$, on peut bien définir la variable X_{τ_A}, puis $f(x) = \mathbb{E}_x[g(X_{\tau_A})]$. Si $x \in A$, alors $\tau_A = 0$, donc $X_{\tau_A} = x$ presque sûrement sous $\mathbb{P}_x$, et $f(x) = g(x)$. Supposons maintenant $x \notin A$. Alors, par la propriété de Markov,

$$f(x) = \sum_{y \in \mathfrak{X}} P(x, y)\, f(y) = (Pf)(x).$$

Donc, la fonction f est l'unique solution du problème de Dirichlet.

7. Matrices sous-stochastiques et critère de transience.

(a) Comparons $\sigma_{Q^n}(x)$ et $\sigma_{Q^{n+1}}(x)$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{Q^{n+1}}(x) &= \sum_{y \in \mathfrak{X}} Q^{n+1}(x, y) = \sum_{y,z \in \mathfrak{X}} Q^n(x, z)\, Q(z, y) \\
&\leq \sum_{z \in \mathfrak{X}} Q^n(x, z) \quad \text{car } Q \text{ est sous-stochastique,} \\
&\leq \sigma_{Q^n}(x).
\end{aligned}$$

En particulier, $\sigma_{Q^n}(x) \leq \sigma_Q(x) \leq 1$, et la matrice Q^n est sous-stochastique pour tout $n \geq 1$.

(b) Par définition, $h(x)$ est la limite décroissante de la suite $(\sigma_{Q^n}(x))_{n \geq 1}$. On calcule alors :

$$(Qh)(x) = \sum_{y \in \mathfrak{X}} Q(x, y)\, h(y) = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{y \in \mathfrak{X}} Q(x, y)\, \sigma_{Q^n}(y) \right) = \lim_{n \to \infty} \sigma_{Q^{n+1}}(x) = h(x).$$

Justifions l'interversion de somme et de limite : les éléments $\sigma_{Q^n}(y)$ sont dans $[0, 1]$, et la série $\sum_{y \in \mathfrak{X}} Q(x, y)$ est convergente, donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée.

Soit k une solution positive de l'équation $k = Qk$ avec $0 \leq k(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathfrak{X}$. On a :

$$k(x) = (Qk)(x) = \sum_{y \in \mathfrak{X}} Q(x, y)\, k(y) \leq \sum_{y \in \mathfrak{X}} Q(x, y) = \sigma_Q(x).$$

Comme on a aussi $k = Q^n k$ pour tout $n \geq 1$, la même preuve donne $k(x) \leq \sigma_{Q^n}(x)$. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient $k(x) \leq h(x)$.

(c) La matrice Q est obtenue à partir de P en changeant la colonne x_0 et en mettant des 0 à la place : elle est donc évidemment sous-stochastique. Posons $k(x) = \mathbb{P}_x[\forall n \geq$

$1,\ X_n \neq x_0]$. Par la propriété de Markov,

$$\begin{aligned} k(x) &= \sum_{y\in\mathfrak{X}} P(x,y)\,\mathbb{P}_y[\forall n\geq 0,\ X_n\neq x_0] \\ &= \sum_{y\neq x_0} P(x,y)\,\mathbb{P}_y[\forall n\geq 1,\ X_n\neq x_0] \\ &= \sum_{y\in\mathfrak{X}} Q(x,y)\,k(y) = (Qk)(x). \end{aligned}$$

Ainsi, k est solution dans $[0,1]$ de l'équation $k = Qk$.

(d) Si la chaîne de Markov est transiente, alors

$$k(x_0) = \mathbb{P}_{x_0}[\forall n\geq 1,\ X_n\neq x_0] = \mathbb{P}_{x_0}[\tau_{x_0}^+ = +\infty] > 0,$$

donc il existe une solution non nulle au système. Pour la réciproque, on va montrer que la fonction k de la question précédente est en fait la solution *maximale* de l'équation $k = Qk$. Remarquons que

$$\begin{aligned} \sigma_{Q^n}(x) &= \sum_{y_1,\ldots,y_n\in\mathfrak{X}} Q(x,y_1)\,Q(y_1,y_2)\cdots Q(y_{n-1},y_n) \\ &= \sum_{y_1,\ldots,y_n\in\mathfrak{X}\setminus\{x_0\}} \mathbb{P}_x[X_1=y_1,\ X_2=y_2,\ldots,X_n=y_n] \\ &= \mathbb{P}_x[\forall k\in [\![1,n]\!]\,,\ X_k\neq x_0]. \end{aligned}$$

Donc, $h(x)\leq \mathbb{P}_x[\forall k\in [\![1,n]\!]\,,\ X_k\neq x_0]$ pour tout $n\geq 1$, et en passant à la limite, on obtient $h(x)\leq k(x)$. Donc, k est la solution maximale, et s'il existe une solution non nulle, alors $k\neq 0$, ce qui implique que la chaîne est transiente. En effet, fixons x tel que $k(x)>0$. Si $x=x_0$, c'est fini, car $k(x_0)=\mathbb{P}_{x_0}[\tau_{x_0}^+=+\infty]$. Sinon, comme la chaîne est irréductible, il existe un entier $n\geq 1$ tel que $Q^n(x_0,x)>0$, et alors,

$$k(x_0) = \sum_{y\in\mathfrak{X}} Q^n(x_0,y)\,k(y) \geq Q^n(x_0,x)\,k(x) > 0.$$

(e) Pour le modèle de file d'attente, l'équation $k=Qk$ avec $x_0=0$ s'écrit :

$$k(0)=k(1)=A \text{ constante} \qquad ; \qquad k(2)=\frac{k(1)}{p}=\frac{A}{p}$$

et

$$k(x) = p\,k(x+1) + (1-p)\,k(x-1)$$

pour tout $x\geq 2$. Ainsi,

$$k(x+1)-k(x) = \frac{1-p}{p}\,(k(x)-k(x-1)) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{x-1}(k(2)-k(1)) = A\left(\frac{1-p}{p}\right)^{x}.$$

Avec $r=\frac{1-p}{p}$, on a donc

$$k(x) = k(2) + \sum_{y=2}^{x-1} k(y+1)-k(y) = \begin{cases} A\,\frac{1-r^x}{1-r} & \text{si } r\neq 1, \\ A\,x & \text{si } r=1, \end{cases}$$

pour tout $x\geq 2$. Pour avoir une solution bornée dans $[0,1]$ et non triviale, il faut donc $r<1$, c'est-à-dire que $p>\frac{1}{2}$. La chaîne est donc transiente pour $p>\frac{1}{2}$ et récurrente pour $p\leq\frac{1}{2}$.