Objectifs : Calculer la loi invariante d'une chaîne de Markov, en particulier en utilisant la notion de réversibilité ; utiliser le théorème de convergence vers la loi stationnaire dans le cas récurrent positif ; utiliser le théorème ergodique sur les nombres de visites.

1. **Matrices bistochastiques.** On dit qu'une matrice $(P(x,y))_{x,y\in\mathfrak{X}}$ sur un espace d'états fini $\mathfrak{X}$ est bistochastique si ses coefficients sont tous dans $[0,1]$, et si la somme des coefficients sur une ligne ou sur une colonne est toujours égale à 1.

   (a) Montrer qu'une matrice de transition P est bistochastique si et seulement si la mesure uniforme $\pi(x) = \frac{1}{\mathrm{card}(\mathfrak{X})}$ est invariante par P.

   (b) Application. Soit P la matrice de transition d'une chaîne de Markov sur un espace d'états fini $\mathfrak{X}$. On suppose P irréductible et symétrique : $P(x,y) = P(y,x)$ pour tous états x, y. On suppose aussi que la diagonale de la matrice P n'est pas nulle. Montrer que, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition P, alors
   $$\pi_n(x) = \mathbb{P}_{\pi_0}[X_n = x] \to_{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{card}(\mathfrak{X})}$$
   pour n'importe quel choix de mesure initiale π_0, et pour tout état $x \in \mathfrak{X}$.

2. **Mesures réversibles, I.** Soit P la matrice de transition d'une chaîne de Markov sur un espace d'états fini ou dénombrable. Une mesure positive π est dite réversible pour P si, pour tout couple d'états $(x,y) \in \mathfrak{X}^2$,
   $$\pi(x)\,P(x,y) = \pi(y)\,P(y,x).$$
   Montrer qu'une mesure réversible est invariante pour P. La réciproque est-elle vraie ?

3. **Marche aléatoire sur un graphe fini.** Soit $\mathcal{G}$ un graphe (simple, sans boucle) fini, c'est-à-dire un ensemble fini $\mathfrak{X}$ de sommets et un ensemble $\mathfrak{E}$ de paires $\{x \neq y\}$ de sommets. Le degré d'un sommet du graphe est
   $$\deg x = \mathrm{card}\{y \in \mathfrak{X} \mid \{x,y\} \in \mathfrak{E}\}.$$
   On suppose que $\deg x \geq 1$ pour tout $x \in \mathfrak{X}$. On définit alors une matrice stochastique d'espace d'états $\mathfrak{X}$:
   $$P(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\deg x} & \text{si } \{x,y\} \in E, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (a) À quelles conditions sur le graphe $\mathcal{G}$ la matrice P est-elle associée à une chaîne irréductible ? Si ces conditions sont vérifiées, que faut-il supposer en plus pour avoir une chaîne apériodique ?

   (b) On suppose jusqu'à la fin de l'exercice que la chaîne irréductible. Trouver une mesure de probabilité réversible pour cette chaîne de Markov.

   (c) Étant donnée une trajectoire $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ observée sur un temps long $N \gg 1$, avec grande probabilité, quels sont les sommets du graphe qui sont le plus souvent visités par cette trajectoire ?

4. **Les urnes d'Ehrenfest.** On considère une urne avec N balles, qui sont réparties dans deux compartiments A et B. On note X_n le nombre de balles qui sont dans le compartiment A au

temps n ; $X_n \in [\![0, N]\!]$, et le compartiment B contient $N - X_n$ balles au temps n. L'évolution de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suivante. Pour passer de X_n à X_{n+1} :

- On tire au hasard l'une des N balles de l'urne, toutes les balles étant équiprobables, et ce tirage étant indépendant des autres étapes.
- Si la balle tirée au hasard appartient au compartiment A, on la déplace dans le compartiment B : alors, $X_{n+1} = X_n - 1$.
- Au contraire, si la balle tirée au hasard appartient au compartiment B, on la déplace dans le compartiment A : dans ce cas, $X_{n+1} = X_n + 1$.

(a) Donner la matrice de transition P de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer qu'elle est irréductible sur l'espace d'états $\mathfrak{X} = [\![0, N]\!]$.

(b) Calculer l'unique mesure de probabilité invariante π pour P. On pourra la chercher réversible. Quelle mesure de probabilité classique obtient-on ?

(c) On suppose par exemple que $X_0 = 0$. A-t-on $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_0[X_n = k] = \pi(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$?

(d) On modifie le modèle en supposant qu'à chaque étape, la balle tirée au hasard dans l'urne a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'être laissée dans son compartiment, et une probabilité $\frac{1}{2}$ d'être changée de compartiment. Reprendre les questions précédentes avec ce nouveau modèle. Quel est le lien entre les deux matrices de transition des deux modèles ?

5. Les urnes de Bernoulli–Laplace. On considère une urne avec N_1 balles blanches et N_2 balles noires, et avec deux compartiments A et B contenant respectivement $a \geq 1$ balles et $b \geq 1$ balles ; $N_1 + N_2 = a + b$, et chaque compartiment peut contenir des balles blanches et des balles noires. On note X_n le nombre de balles blanches dans le compartiment A au temps n ; c'est une quantité entière entre $\max(0, a - N_2)$ et $\min(N_1, a)$.

(a) Exprimer en fonction des paramètres du modèle N_1, N_2, a, b et de X_n le nombre de balles blanches ou de balles noires dans chaque compartiment au temps n.

L'évolution de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suivante. Pour passer de X_n à X_{n+1} :

- On tire au hasard dans chaque compartiment une balle ; toutes les balles du compartiment A sont équiprobables, et de même pour toutes les balles du compartiment B.
- On échange la position des deux balles tirées au hasard : celle du compartiment A va vers le compartiment B, et *vice versa.*

(b) Donner la matrice de transition P de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer qu'elle est irréductible sur l'espace d'états $\mathfrak{X} = [\![\max(0, a - N_2), \min(a, N_1)]\!]$.

(c) On suppose dans la suite $N_1 \leq a \leq N_2$: ainsi, le nombre de boules blanches dans le compartiment A peut varier entre 0 et N_1. Trouver l'unique mesure de probabilité invariante π pour P. Quelle mesure de probabilité classique obtient-on ?

(d) Pour $k \in \mathfrak{X}$, montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\pi_0}[X_n = k] = \pi(k)$.

6. Permutations aléatoires. Pour $N \geq 1$, on note $\mathfrak{S}(N)$ l'ensemble des bijections $\sigma : [\![1, N]\!] \to [\![1, N]\!]$ (aussi appelées permutations). On rappelle que $\mathfrak{S}(N)$ est de cardinal $N! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times N$. L'ensemble $\mathfrak{S}(N)$ est un groupe pour la composition $\circ$ des bijections.

(a) Pour $1 \leq i \neq j \leq N$, on note (i,j) la transposition qui échange i et j : $(i,j)(i) = j$, $(i,j)(j) = i$ et $(i,j)(k) = k$ pour $k \notin \{i,j\}$. Montrer que toute bijection $\sigma \in \mathfrak{S}(N)$ s'écrit comme un produit $\sigma = (i_1,j_1) \circ (i_2,j_2) \circ \cdots \circ (i_l,j_l)$ de transpositions.

(b) On définit une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(N)$ en listant ses valeurs : $\sigma = [\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(N)]$. Par exemple, $[5,2,1,7,3,4,6]$ est un élément de $\mathfrak{S}(7)$. Si $\sigma \in \mathfrak{S}(N)$ et $i \neq j$, notons σ' la permutation où l'on échange dans la liste des valeurs de σ la i-ième valeur et la j-ième valeur. Montrer que $\sigma' = \sigma \circ (i,j)$.

(c) Soit $(i_n)_{n\geq 1}$ et $(j_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables indépendantes distribuées uniformément sur $[\![1,N]\!]$. On définit une suite de variables $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathfrak{S}(N)$ comme suit : $\sigma_0 = \mathrm{id}_{[\![1,N]\!]} = [1,2,\ldots,N]$, et

$$\sigma_n = \begin{cases} \sigma_{n-1} \circ (i_n, j_n) & \text{si } i_n \neq j_n, \\ \sigma_{n-1} & \text{si } i_n = j_n. \end{cases}$$

Montrer que $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $\mathfrak{S}(N)$, et donner la valeur de sa matrice de transition $(P(\sigma,\tau))_{\sigma,\tau\in\mathfrak{S}(N)}$.

(d) Montrer que la matrice de transition P est : bistochastique, irréductible, apériodique.

(e) Quelle est la limite en loi de σ_n lorsque n tend vers l'infini ?

7. Découpage de polygones. Soit $\mathcal{P}$ un polygone convexe avec au moins 3 côtés, auquel on applique l'opération suivante : on choisit au hasard deux côtés de $\mathcal{P}$, on joint les milieux de ces côtés et on garde l'un des deux nouveaux polygones convexes plus petits ainsi obtenus. On réitère cette opération infiniment, et on note $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres de côtés des polygones ainsi obtenus. On supposera que $C_0 = 3$, et que les choix de découpage sont indépendants et donnent une chaîne de Markov.

(a) Si $C_n = k$, montrer que $C_{n+1} \in [\![3, k+1]\!]$. Montrer ensuite que $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est irréductible sur l'espace des états $\mathbb{N}_{\geq 3} = \{3,4,5,\ldots\}$.

(b) On pose $X_n = C_n - 3$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible sur $\mathfrak{X} = \mathbb{N}$, et préciser sa matrice de transition P.

(c) Notons que $X_0 = 0$, puisque $C_0 = 3$. Calculer $\mathbb{E}_0[X_n]$ pour tout $n \geq 0$. En déduire que la chaîne est récurrente irréductible.

(d) On cherche une mesure de probabilité stationnaire π pour P (à ce stade, il n'est pas clair qu'il en existe une, car la chaîne pourrait être récurrente nulle). On pose $G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi(k)\, s^k$. Montrer que, si $\pi P = \pi$, alors

$$(s-1)\, G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi(k)}{k+2}\,(s^{k+2} - 1).$$

Dériver cette équation pour trouver une équation différentielle satisfaite par $G(s)$, et en déduire la valeur de cette fonction.

(e) Montrer que la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente positive et converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre 1.

8. Modèle de file d'attente, II. On considère la matrice de transition sur l'espace $\mathfrak{X} = \mathbb{N}$ donnée par

$$P(0,1) = 1 \quad ; \quad \forall k \geq 1,\ P(k,k+1) = p \quad ; \quad \forall k \geq 1,\ P(k,k-1) = 1-p,$$

p étant un paramètre réel dans $(0,1)$.

(a) On suppose $p < \frac{1}{2}$. Montrer que la chaîne de Markov de matrice P est récurrente positive, et calculer sa loi stationnaire. La chaîne est-elle apériodique ? Quels résultats limites sont valables pour cette chaîne de Markov ?

(b) Toujours dans l'hypothèse $p < \frac{1}{2}$, on suppose que l'on part d'une file vide ($X_0 = 0$). Comme $P(0,1) = 1$, $X_1 = 1$ et la file est non vide pendant un certain intervalle de temps $[\![1, \tau_0^+]\!]$. Déterminer l'espérance du temps τ_0^+ nécessaire pour que la file d'attente soit de nouveau vide.

(c) On suppose $p = \frac{1}{2}$. Trouver une mesure invariante de masse infinie pour la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrice P. Trouver un lien entre $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une marche aléatoire simple symétrique $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{Z}$. En déduire que la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans ce cas récurrente nulle.

9. Chaîne de vie et de mort, II. On reprend le modèle de la chaîne de vie et de mort, qui a pour espace d'états $\mathfrak{X} = \mathbb{N}$ et pour matrice de transition

$$P(k, k+1) = p_k \qquad ; \qquad P(k, k-1) = q_k \qquad ; \qquad P(k,k) = r_k,$$

avec $(p_k, q_k, r_k)_{k\geq 0}$ famille de réels positifs avec $p_k + q_k + r_k = 1$ pour tout k, et $q_0 = 0$. On a montré dans un exercice du précédent chapitre que la chaîne de Markov avec cette matrice de transition était récurrente irréductible si et seulement si $p_k > 0$, $q_k > 0$ pour tout $k \geq 1$ et $\sum_{l=0}^{\infty}(\prod_{j=1}^{l} \frac{q_j}{p_j}) = +\infty$. Montrer que la chaîne est récurrente positive si et seulement si

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{l} \frac{p_{j-1}}{q_j} \right) < +\infty.$$

Dans ce cas, donner la mesure de probabilité stationnaire. Donner aussi une condition nécessaire et suffisante simple pour l'apériodicité de la chaîne de Markov.

10. Croissance ou retour en 0, II. On reprend le modèle de la chaîne avec croissance ou retour en 0, qui a pour espace d'états $\mathfrak{X} = \mathbb{N}$ et pour matrice de transition

$$P(k, k+1) = p_k \qquad ; \qquad P(k, 0) = 1 - p_k$$

avec $(p_k)_{k\geq 0}$ famille de réels positifs. On a montré dans un exercice du précédent chapitre que la chaîne de Markov avec cette matrice de transition était récurrente irréductible si et seulement si $p_k > 0$ pour tout $k \geq 0$ et $\lim_{k\to 0} q_k = 0$, où $q_k = \prod_{j=0}^{k-1} p_j$. Montrer que la chaîne est récurrence positive si et seulement si

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_k < +\infty,$$

et donner dans ce cas la mesure de probabilité stationnaire.

11. Mesures réversibles, II. Soit P une matrice stochastique irréductible sur un espace d'états $\mathfrak{X}$. On suppose que la chaîne de Markov associée est récurrente positive, ce qui est automatiquement le cas si l'espace d'états est fini ; on note π la mesure de probabilité stationnaire. L'objectif de l'exercice est de montrer l'équivalence entre les deux conditions suivantes :

- La mesure π est réversible : $\pi(x)\, P(x,y) = \pi(y)\, P(y,x)$ pour tous états $x, y \in \mathfrak{X}$.
- Pour tout $n \geq 2$ et tout n-uplet d'états $(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

  $$P(x_1, x_2) \cdots P(x_{n-1}, x_n)\, P(x_n, x_1) = P(x_1, x_n)\, P(x_n, x_{n-1}) \cdots P(x_2, x_1).$$

  Autrement dit, le produit des probabilités de transition $x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_n \to x_1$ est le même si l'on prend le « cycle » dans l'autre sens : $x_1 \to x_n \to \cdots \to x_2 \to x_1$. C'est le *critère de Kolmogorov*.

(a) Montrer que si π est réversible, alors le critère de Kolmogorov est vérifié.

(b) On suppose dans les questions suivantes que le critère de Kolmogorov est vérifié. Montrer que pour tous états x, y, et tout $n \geq 1$, on a

$$P^n(x,y)\,P(y,x) = P(x,y)\,P^n(y,x).$$

(c) On suppose la chaîne apériodique. Déduire de la question précédente que π est réversible pour P.

(d) On ne suppose plus la chaîne apériodique. Montrer qu'on a, pour tous états x et y,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P^n(x,y) \to_{N\to\infty} \pi(y).$$

En déduire de nouveau que la mesure π est réversible si le critère de Komogorov est vérifié.

(e) Application. Soit P une matrice stochastique irréductible d'espace des états $\mathfrak{X}$ fini, et dont le graphe dirigé $\mathcal{G}_P$ ne contient pas de cycle : il n'existe pas de suite de sommets tous distincts $x_1 \neq x_2 \neq \cdots \neq x_n$ avec $n \geq 3$ et $P(x_1,x_2)\cdots P(x_{n-1},x_n)\,P(x_n,x_1) > 0$. C'est par exemple le cas du modèle de la ruine du joueur. Montrer que la mesure stationnaire pour P est forcément réversible.

12. Unicité de la loi stationnaire. Soit P une matrice stochastique irréductible sur un espace d'états $\mathfrak{X}$ fini ou dénombrable. L'objectif de l'exercice est de donner une preuve élémentaire du fait suivant : si P admet une mesure de probabilité invariante, alors celle-ci est unique. Dans ce qui suit, on ne suppose pas *a priori* que la chaîne associée à P est récurrente (s'il existe une mesure de probabilité invariante, on sait *a posteriori* que ceci implique la récurrence positive).

(a) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $\phi(x) = \frac{x}{x+1}$. Montrer que pour tous réels positifs $x_1, \ldots, x_n$ et tous poids positifs $p_1, \ldots, p_n$ tels que $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$, on a

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i\,\phi(x_i).$$

Étendre cette inégalité au cas d'une suite $(x_i)_{i\geq 1}$ et d'une distribution discrète $(p_i)_{i\geq 1}$ avec $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Quand a-t-on égalité dans cette inégalité ?

(b) On suppose donnée une mesure de probabilité π sur $\mathfrak{X}$ invariante par P, et on définit l'*entropie* d'une autre mesure de probabilité μ sur $\mathfrak{X}$ par la formule suivante :

$$\mathcal{E}(\mu) = \sum_{x\in\mathfrak{X}} \pi(x)\,\phi\left(\frac{\mu(x)}{\pi(x)}\right).$$

Justifier du fait que cette quantité est bien définie. Montrer que pour toute mesure de probabilité μ sur $\mathfrak{X}$, on a $\mathcal{E}(\mu P) \geq \mathcal{E}(\mu)$.

(c) On suppose pour cette question que $P(x,y) > 0$ pour tout couple $(x,y) \in \mathfrak{X}^2$. Montrer qu'on a égalité dans la question précédente si et seulement si $\mu = \pi$. En déduire dans ce cas l'unicité de la mesure de probabilité stationnaire.

(d) Dans le cas général, on pose $\widetilde{P}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\,P^n(x,y)$. Montrer que $\mathcal{E}(\mu\widetilde{P}) \geq \mathcal{E}(\mu)$ pour toute mesure de probabilité μ, avec égalité si et seulement si $\mu = \pi$. En déduire que si P est une matrice irréductible, alors il existe au plus une mesure de probabilité invariante par P.