

**1. Matrices bistochastiques.**

- (a) Pour  $P$  matrice stochastique, on a les équivalences suivantes, en posant  $\pi(x) = \frac{1}{|\mathfrak{X}|}$  pour tout  $x \in \mathfrak{X}$  ( $|\mathfrak{X}|$  est le cardinal de l'ensemble fini  $\mathfrak{X}$ ) :

$$\begin{aligned} P \text{ bistochastique} &\Leftrightarrow \forall y \in \mathfrak{X}, \sum_{x \in \mathfrak{X}} P(x, y) = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall y \in \mathfrak{X}, \sum_{x \in \mathfrak{X}} \pi(x) P(x, y) = \pi(y) \\ &\Leftrightarrow \forall y \in \mathfrak{X}, (\pi P)(y) = \pi(y). \end{aligned}$$

Une matrice stochastique est donc bistochastique si et seulement si la mesure uniforme est invariante.

- (b) Si  $P$  est stochastique symétrique, alors elle est bistochastique :

$$\sum_{x \in \mathfrak{X}} P(x, y) = \sum_{x \in \mathfrak{X}} P(y, x) = 1.$$

Comme on suppose aussi l'irréductibilité, il y a une unique mesure invariante, qui est la mesure uniforme sur  $\mathfrak{X}$ . Par ailleurs, on suppose la diagonale de  $P$  non nulle, donc il existe  $x$  tel que  $P(x, x) > 0$  ; ceci implique l'apériodicité. Alors, on a convergence vers la loi stationnaire, car on a une marche irréductible récurrente positive apériodique (la récurrence positive est impliquée par la finitude de l'espace). Donc,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n(x) = \frac{1}{|\mathfrak{X}|}$$

pour tout  $x \in \mathfrak{X}$ .

- 2. Mesures réversibles, I.** Si  $\pi$  est réversible,  $\pi(x) P(x, y) = \pi(y) P(y, x)$ , et en faisant la somme de ces identités sur  $x \in \mathfrak{X}$ , on obtient :

$$(\pi P)(y) = \sum_{x \in \mathfrak{X}} \pi(x) P(x, y) = \sum_{x \in \mathfrak{X}} \pi(y) P(y, x) = \pi(y),$$

la dernière égalité venant du fait que  $P$  est stochastique. Donc,  $\pi$  est invariante pour  $P$ . La réciproque est fautive : si

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

alors la mesure uniforme  $\pi$  sur 3 états est invariante pour  $P$  (puisque l'on a une matrice bistochastique), mais  $\pi(1) P(1, 2) = \frac{1}{3} \neq 0 = \pi(2) P(2, 1)$ .

**3. Marche aléatoire sur un graphe fini.**

- (a) La chaîne est irréductible si et seulement si, pour tous sommets  $x, y$  dans le graphe  $\mathcal{G}$ , il existe un chemin d'arêtes reliant  $x$  à  $y$  ; donc, si et seulement si le graphe est connexe.

Regardons maintenant l'apériodicité. Si  $x$  est un sommet et  $y$  est l'un de ses voisins ( $\deg x \geq 1$  pour tout  $x \in \mathfrak{X}$ ), alors  $P^2(x, x) \geq P(x, y) P(y, x) > 0$ , donc 2 appartient à l'ensemble  $\mathcal{R}(x)$  des temps de retour possibles en  $x$ . S'il n'y a pas de nombre impair dans  $\mathcal{R}(x)$ , alors  $\text{pgcd}(\mathcal{R}(x)) = 2$ , donc la chaîne n'est pas apériodique. Inversement,

s'il y a un nombre impair  $2n + 1$  dans  $\mathcal{R}(x)$ , alors  $\text{pgcd}(\mathcal{R}(x)) = 1$ , donc la chaîne est apériodique. Ainsi, la chaîne est apériodique si et seulement si le graphe  $\mathcal{G}$  contient un cycle  $(x = x_0, x_1, \dots, x_{2n}, x_{2n+1} = x)$  de longueur impaire.

(b) Si  $\pi$  est une mesure réversible, alors pour tout  $x$  voisin de  $y$ ,

$$\frac{\pi(x)}{\deg x} = \frac{\pi(y)}{\deg y}.$$

Par connexité du graphe  $\mathcal{G}$ , il faut donc que la fonction  $f(x) = \frac{\pi(x)}{\deg x}$  soit constante sur tout le graphe. Donc,  $\pi(x) = \frac{1}{A} \deg x$  pour une certaine constante  $A$ . Cette constante est

$$A = \sum_{x \in \mathfrak{X}} \deg x = 2(\text{nombre d'arêtes}),$$

la dernière égalité étant le lemme des poignées de main, et étant valable si le graphe est sans boucle. Ainsi, si  $\mathcal{G} = (\mathfrak{X}, \mathfrak{E})$  est un graphe connexe, alors l'unique mesure de probabilité invariante est

$$\pi(x) = \frac{\deg x}{2|\mathfrak{E}|}.$$

(c) Le théorème ergodique garantit que, pour tout état  $x \in \mathfrak{X}$ ,

$$\frac{\text{card}(\{n \leq N \mid X_n = x\})}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{\deg x}{2|\mathfrak{E}|}.$$

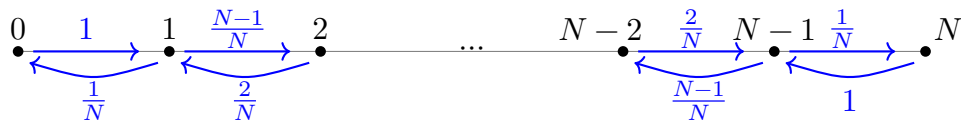
Le sommets du graphe qui sont visités le plus souvent par la marche aléatoire sont donc ceux de plus haut degré.

#### 4. Les urnes d'Ehrenfest.

(a) On a :

$$P(k, k+1) = \frac{N-k}{N} \quad ; \quad P(k, k-1) = \frac{k}{N}.$$

En effet, dans le premier cas par exemple, il y a  $N - k$  balles dans le compartiment  $B$  si  $X_0 = k$ , donc une probabilité  $\frac{N-k}{N}$  que  $X_1 = k + 1$  sachant  $X_0 = k$ . Le graphe de la chaîne de Markov est donc :



On peut bien passer de tout état  $k$  à tout autre état  $k'$  de l'espace  $\llbracket 0, N \rrbracket$  en un nombre fini d'étapes, donc la chaîne est irréductible.

(b) Cherchons une mesure réversible. Elle doit vérifier :

$$\begin{aligned} \pi(k) P(k, k+1) &= \pi(k+1) P(k+1, k); \\ \pi(k) \frac{N-k}{N} &= \pi(k+1) \frac{k+1}{N}; \\ \pi(k+1) &= \frac{N-k}{k+1} \pi(k). \end{aligned}$$

La relation de récurrence montre que, si  $\pi(0) = \alpha$ , alors :

$$\begin{aligned}\pi(1) &= N \alpha; \\ \pi(2) &= \frac{N(N-1)}{2} \alpha; \\ \pi(3) &= \frac{N(N-1)(N-2)}{6} \alpha,\end{aligned}$$

d'où par récurrence,  $\pi(k) = \binom{N}{k} \alpha$ . La constante  $\alpha$  est donnée par l'équation

$$1 = \alpha \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} = \alpha 2^N.$$

Ainsi,  $\pi(k) = \frac{1}{2^N} \binom{N}{k}$  pour tout  $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$ , donc  $\pi$  est la loi binomiale  $\mathcal{B}(N, \frac{1}{2})$ .

- (c) Attention, la chaîne n'est pas apériodique : si l'on suppose par exemple  $X_0$  pair, alors  $X_n \equiv n \pmod{2}$  pour tout  $n$ . On ne peut donc pas avoir dans ce cas  $\pi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi$ , car  $\pi_{2n}$  est supportée par les nombres pairs, tandis que  $\pi$  est supportée par  $\llbracket 0, N \rrbracket$ .
- (d) Notons  $P$  la matrice de transition de la chaîne initiale, et  $Q$  la matrice de transition de la chaîne modifiée. Les deux matrices sont reliées par la relation :

$$Q = \frac{I + P}{2},$$

où  $I$  est la matrice identité. Il est clair que la mesure invariante  $\pi$  calculée précédemment l'est aussi pour  $Q$  :

$$\pi Q = \pi \left( \frac{I + P}{2} \right) = \frac{\pi + \pi P}{2} = \frac{\pi + \pi}{2} = \pi.$$

Notons qu'on pourrait facilement montrer que  $\pi$  est même réversible pour  $Q$ . La matrice  $Q$  est maintenant irréductible, apériodique et de mesure stationnaire  $\pi$ , donc on a convergence vers la loi stationnaire : si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim \mathbb{P}_{(\pi_0, Q)}$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\pi_0}[X_n = k] = \frac{1}{2^N} \binom{N}{k}$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}$  (quelque soit la mesure initiale  $\pi_0$ ).

## 5. Les urnes de Bernoulli–Laplace.

- (a) Au temps  $n$ , il y a  $X_n$  balles blanches dans le compartiment  $A$  ; comme  $A$  contient toujours  $a$  balles,  $a - X_n$  est le nombre de balles noires dans le compartiment  $A$ . Puis, comme il y a en tout  $N_1$  balles blanches,  $N_1 - X_n$  est le nombre de balles blanches dans le compartiment  $B$ , et  $b - (N_1 - X_n)$  balles noires dans ce compartiment  $B$ .
- (b) On a :

$$\begin{aligned}P(k, k+1) &= \text{probabilité d'échanger une boule noire de } A \text{ avec une boule blanche de } B \\ &= \frac{a-k}{a} \frac{N_1-k}{b};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(k, k-1) &= \text{probabilité d'échanger une boule blanche de } A \text{ avec une boule noire de } B \\ &= \frac{k}{a} \frac{b - N_1 + k}{b}.\end{aligned}$$

Finalement,  $P(k, k)$  est le reste, et compte la probabilité d'échanger deux boules de même couleur (noire ou blanche). Ainsi,

$$P(k, k) = 1 - \frac{(a - k)(N_1 - k) + k(b - N_1 + k)}{ab}.$$

Tant que  $k < \min(a, N_1)$ , on a une probabilité positive d'augmenter le nombre de balles blanches dans  $A$ , et tant que  $k > \max(0, N_1 - b = a - N_2)$ , on a une probabilité positive de diminuer ce nombre de balles blanches dans  $A$ . Ceci prouve l'irréductibilité sur  $[\max(0, a - N_2), \min(a, N_1)]$ .

(c) Cherchons une mesure réversible. On pose  $\pi(0) = c$ .

$$\pi(1) = \frac{P(0, 1)}{P(1, 0)} \pi(0) = \frac{N_1}{b} \frac{1}{\frac{b - N_1 + 1}{ab}} \alpha = \frac{aN_1}{b - N_1 + 1} \alpha;$$

$$\pi(2) = \frac{P(1, 2)}{P(2, 1)} \pi(1) = \frac{a - 1}{2} \frac{N_1 - 1}{b - N_1 + 2} \pi(1) = \frac{a(a - 1)}{2} \frac{N_1(N_1 - 1)}{(b - N_1 + 1)(b - N_1 + 2)} \alpha.$$

Par récurrence, on montre que :

$$\begin{aligned} \pi(k) &= \frac{a(a - 1) \cdots (a - k + 1)}{k!} \frac{N_1(N_1 - 1) \cdots (N_1 - k + 1)}{(b - N_1 + 1) \cdots (b - N_1 + k)} \alpha \\ &= \binom{a}{k} \frac{(N_1)! (b - N_1)!}{(N_1 - k)! (b - N_1 + k)!} = \binom{a}{k} \binom{b}{N_1 - k} \alpha' \end{aligned}$$

pour une autre constante  $\alpha'$ . Cette constante  $\alpha'$  est obtenue comme suit :

$$1 = \alpha' \sum_{k=0}^{N_1} \binom{a}{k} \binom{b}{N_1 - k} = \alpha' \binom{a + b}{N_1},$$

l'égalité étant la célèbre formule de Vandermonde (compter les parties de taille  $N_1$  dans un ensemble  $E$  de taille  $a + b$ , en séparant  $E$  en deux parties de tailles respectives  $a$  et  $b$ ). Ainsi,

$$\pi(k) = \frac{\binom{a}{k} \binom{b}{N_1 - k}}{\binom{a + b}{N_1}} \quad (\text{loi hypergéométrique}).$$

(d) Comme  $P(k, k) > 0$  pour tout  $k$ , on a apériodicité, et ainsi,  $\pi_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \pi$  (convergence vers la loi stationnaire).

## 6. Permutations aléatoires.

(a) On peut procéder par récurrence sur  $N \geq 1$ ; le cas  $N = 1$  est trivial, puisque l'unique bijection  $\sigma \in \mathfrak{S}(1)$  est l'identité, qui est le produit vide. Supposons le résultat établi au rang  $N - 1 \geq 1$ , et considérons  $\sigma \in \mathfrak{S}(N)$ . Si  $\sigma(N) = N$ , alors

$$\sigma_{[1, N-1]} = (i_1, j_1) \circ (i_2, j_2) \circ \cdots \circ (i_l, j_l)$$

pour certaines transpositions  $(i_k, j_k)$  avec  $1 \leq i_k \neq j_k \leq N - 1$ , et cette décomposition vaut aussi pour  $\sigma$ , puisque tous les termes de la formule laisse  $N$  invariant. Si  $\sigma(N) \neq N$ , alors  $N$  est atteint par un autre entier  $k < N$  :  $N = \sigma(k)$ . Considérons alors  $\tau = \sigma \circ (k, N)$ . On a  $\tau(N) = \sigma(k) = N$ , donc par le cas précédent,  $\tau = (i_1, j_1) \circ (i_2, j_2) \circ \cdots \circ (i_l, j_l)$ . En recomposant avec  $(k, N)$ , on obtient

$$\sigma = (i_1, j_1) \circ (i_2, j_2) \circ \cdots \circ (i_l, j_l) \circ (k, N)$$

et de nouveau  $\sigma$  est un produit de transpositions. La preuve par récurrence implique qu'on a besoin d'au plus  $N - 1$  transpositions pour une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}(N)$ .

(b) On a

$$\begin{aligned}\sigma \circ (i, j) &= [(\sigma \circ (i, j))(1), \dots, (\sigma \circ (i, j))(i), \dots, (\sigma \circ (i, j))(j), \dots, (\sigma \circ (i, j))(N)] \\ &= [\sigma(1), \dots, \sigma(j), \dots, \sigma(i), \sigma(N)] = \sigma' .\end{aligned}$$

(c) La suite  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est défini par une relation de récurrence  $\sigma_n = F(\sigma_{n-1}, (i_n, j_n))$ , où  $(i_n, j_n)_{n \geq 1}$  est une suite de variables i.i.d. uniformément réparties sur  $\llbracket 1, N \rrbracket$ , et  $F$  est la fonction

$$\begin{aligned}F : \mathfrak{S}(N) \times \llbracket 1, N \rrbracket^2 &\rightarrow \mathfrak{S}(N) \\ \sigma, (i, j) &\mapsto \begin{cases} \sigma \circ (i, j) & \text{si } i \neq j, \\ \sigma & \text{si } i = j. \end{cases}\end{aligned}$$

Par le théorème de représentation des chaînes de Markov,  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc une chaîne de Markov sur  $\mathfrak{S}(N)$ . Déterminons sa matrice de transition. On a

$$P(\sigma, \sigma) = \mathbb{P}[i_1 = j_1] = \frac{1}{N}.$$

Par ailleurs, il y a  $\binom{N}{2}$  transpositions distinctes, et

$$P(\sigma, \sigma \circ (i, j)) = \mathbb{P}[i_1 = i, j_1 = j] + \mathbb{P}[i_1 = j, j_1 = i] = \frac{2}{N^2}$$

pour chaque transposition  $(i, j) = (j, i)$ . Les autres valeurs de la matrice de transition sont nulles.

(d) Pour le caractère bistochastique, notons que la matrice de transition est symétrique :

$$P(\sigma, \tau) = \frac{1}{N} 1_{(\sigma=\tau)} + \frac{2}{N^2} \sum_{i < j} 1_{(\sigma \circ (i, j) = \tau)} = \frac{1}{N} 1_{(\sigma=\tau)} + \frac{2}{N^2} \sum_{i < j} 1_{(\sigma = \tau \circ (i, j))} = P(\tau, \sigma).$$

en utilisant le fait que  $(i, j) \circ (i, j) = \text{id}$ . Cette symétrie implique immédiatement la bistochasticité. Pour l'irréductibilité, si  $\sigma$  et  $\tau$  sont deux bijections arbitraires, alors d'après la première question, il existe des transpositions  $(i_1, j_1), \dots, (i_l, j_l)$  telles que

$$\sigma^{-1} \circ \tau = (i_1, j_1) \circ \dots \circ (i_l, j_l).$$

Alors,  $\tau = \sigma \circ (i_1, j_1) \circ \dots \circ (i_l, j_l)$ , ce qui implique que  $P^l(\sigma, \tau) \neq 0$ . Finalement,  $P(\sigma, \sigma) = \frac{1}{N} \neq 0$  pour toute permutation  $\sigma$ , donc  $P$  est apériodique.

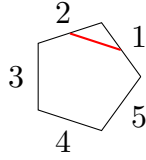
(e) L'unique loi invariante de  $P$  est la loi uniforme  $\pi(\sigma) = \frac{1}{N!}$ , car  $P$  est bistochastique. Par le théorème de convergence vers la loi stationnaire, comme la chaîne est irréductible récurrente positive (car finie) et apériodique, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\sigma_n = \sigma] = \pi(\sigma) = \frac{1}{N!}$$

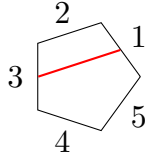
pour toute permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}(N)$ .

## 7. Découpage de polygones.

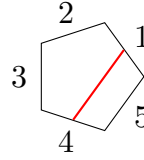
(a) Supposons  $C_n = k$ . On numérote  $1, 2, \dots, k$  les côtés du polygone. À rotation près, on peut supposer que le premier milieu de côté choisi est le numéro 1. Alors, chaque choix  $j \in \llbracket 2, k \rrbracket$  d'un autre milieu donne par découpage deux polygones avec pour nombre de côtés  $j + 1$  et  $k + 3 - j$ . Par exemple, avec  $k = 5$  :



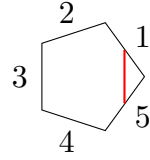
3 et 6 côtés



4 et 5 côtés



5 et 4 côtés



6 et 3 côtés

En conservant l'un de ces deux polygones, on obtient  $C_{n+1} \in \llbracket 3, k+1 \rrbracket$ . De plus, la loi de  $C_{n+1}$  sachant  $C_n = k$  est la loi uniforme sur  $\llbracket 3, k+1 \rrbracket$ . On en déduit l'irréductibilité de la chaîne  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $\mathbb{N}_{\geq 3}$  : on peut augmenter à chaque pas augmenter le nombre de côtés d'une unité, et le diminuer autant que l'on souhaite. La matrice de transition de la chaîne  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est :

$$Q(k, l) = \frac{1_{(3 \leq l \leq k+1)}}{k-1}.$$

- (b) Comme  $f : x \in \mathbb{N}_{\geq 3} \mapsto x-3 \in \mathbb{N}$  est une bijection, il est clair que  $(f(C_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est aussi une chaîne de Markov irréductible. Sa matrice de transition est :

$$P(k, l) = Q(f^{-1}(k), f^{-1}(l)) = Q(k+3, l+3) = \frac{1_{(3 \leq l+3 \leq k+4)}}{k+2} = \frac{1_{(l \in \llbracket 0, k+1 \rrbracket)}}{k+2}.$$

- (c) Notons  $m_n = \mathbb{E}_0[X_n]$ . On a  $m_0 = 0$ , et

$$\begin{aligned} m_{n+1} &= \mathbb{E}_0[X_{n+1}] = \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}[X_{n+1} = k] = \sum_{j,k=0}^{\infty} k \mathbb{P}[X_n = j, X_{n+1} = k] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}[X_n = j] \left( \sum_{k=0}^{j+1} \frac{k}{j+2} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}[X_n = j] \frac{j+1}{2} \\ &= \frac{\mathbb{E}_0[X_n] + 1}{2} = \frac{m_n + 1}{2}. \end{aligned}$$

Par récurrence sur  $n$ , il est facile de voir que la solution de l'équation de récurrence ci-dessus est  $m_n = 1 - 2^{-n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . En particulier,  $m_n \leq 1$  pour tout  $n \geq 1$ , donc par l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}[X_n \geq 2] \leq \frac{m_n}{2} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que  $\mathbb{P}[X_n \leq 1] \geq \frac{1}{2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (inégalité de Markov). Si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  était transiente, alors on aurait  $X_n \rightarrow +\infty$  presque sûrement, et donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_n \leq 1] = 0$ ; c'est impossible. Donc, la chaîne  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est récurrente.

- (d) L'équation  $\pi P = \pi$  se réécrit :  $\pi(k) = \sum_{j \geq k-1} \frac{\pi(j)}{j+2}$  pour tout  $k \geq 0$ . Alors,

$$\begin{aligned} G(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \pi(k) s^k = \sum_{j,k=0}^{\infty} 1_{j \geq k-1} \frac{\pi(j)}{j+2} s^k \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\pi(j)}{j+2} \left( \sum_{k=0}^{j+1} s^k \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\pi(j)}{j+2} \frac{s^{j+2} - 1}{s - 1}. \end{aligned}$$

Donc,  $(s-1)G(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\pi(j)}{j+2} (s^{j+2} - 1)$ , et en dérivant, on obtient :

$$(s-1)G'(s) + G(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi(j) s^{j+1} = sG(s).$$

Ainsi,  $G'(s) = G(s)$ , d'où  $G(s) = A e^s$ . La constante  $A$  s'obtient en utilisant le fait que  $G(1) = 1$  :  $A = e^{-1}$ . On en déduit que  $G(s) = e^{s-1}$ .

- (e) La fonction  $e^{s-1}$  se redéveloppe en série entière :  $G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-1} \frac{s^k}{k!}$ . Ainsi,  $\pi(k) = \frac{e^{-1}}{k!}$ , et  $\pi$  est la loi de Poisson de paramètre 1. Vérifions que cette mesure est invariante. On a bien

$$\sum_{j \geq k-1} \frac{\pi(j)}{j+2} = \sum_{j \geq k-1} \frac{e^{-1}}{j!(j+2)} = \sum_{j \geq k-1} e^{-1} \left( \frac{1}{(j+1)!} - \frac{1}{(j+2)!} \right) = \frac{e^{-1}}{k!} = \pi(k).$$

Comme on a une mesure de probabilité invariante, la chaîne est récurrente positive. Comme  $P(k, k) = \frac{1}{k+2} > 0$  pour tout  $k \geq 0$ , la chaîne est apériodique, donc on a convergence vers la loi stationnaire :

$$\mathbb{P}[X_n = k] \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-1}}{k!}$$

pour tout  $k \geq 0$ .

## 8. Modèle de file d'attente, II.

- (a) Cherchons une mesure de probabilité invariante, et même réversible. Les équations de réversibilité sont :

$$\pi(0) = (1-p)\pi(1) \quad ; \quad \pi(k+1) = \frac{p}{1-p}\pi(k) \quad \forall k \geq 1.$$

Ainsi, si  $\pi(0) = \alpha p$ , alors  $\pi(1) = \alpha \frac{p}{1-p}$ , et  $\pi(k \geq 1) = \alpha \left(\frac{p}{1-p}\right)^k$ . Si  $p < \frac{1}{2}$ , la série  $\sum_{k=0}^{\infty} \pi(k)$  est sommable, et si l'on veut une somme égale à 1, alors ceci impose la valeur de  $\alpha$  :

$$1 = \alpha p + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k = \alpha \left(p + \frac{p}{1-2p}\right) = \alpha \frac{2p(1-p)}{1-2p}.$$

On conclut qu'il y a bien une mesure de probabilité invariante si  $p < \frac{1}{2}$  donnée par :

$$\pi(0) = \frac{1-2p}{2(1-p)} \quad ; \quad \pi(k \geq 1) = \frac{1-2p}{2p(1-p)} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k.$$

Ceci implique la récurrence positive ; notons qu'en revanche on n'a pas l'apériodicité. Par le théorème ergodique, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n 1_{(X_m=k)} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \pi(k)$$

avec probabilité 1.

- (b) On a  $\mathbb{E}_0[\tau_0^+] = \frac{1}{\pi(0)} = \frac{2(1-p)}{1-2p}$ .

- (c) Le calcul de mesure réversible montre que si  $p = \frac{1}{2}$ , alors la mesure

$$\pi(0) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \pi(k \geq 1) = 1$$

est invariante ; elle est de masse infinie. Ceci exclut la récurrence positive. Remarquons maintenant que la chaîne  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $\mathbb{N}$  a les probabilités de transition de  $|Y_n|$ , où  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la marche aléatoire symétrique sur  $\mathbb{Z}$ . Celle-ci est récurrente sur  $\mathbb{Z}$  (voir l'exercice 2 de la feuille 2), donc  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est récurrente (et même récurrente nulle).

**9. Chaîne de vie et de mort, II.** On sait que la chaîne est récurrente positive si et seulement s'il existe une mesure de probabilité invariante. Cherchons donc une telle mesure. L'équation d'invariance est :

$$\pi(k) = p_{k-1} \pi(k-1) + r_k \pi(k) + q_{k+1} \pi(k+1)$$

pour tout  $k \geq 1$ . Comme  $r_k = 1 - p_k - q_k$ , on peut réécrire ceci comme suit :

$$q_k \pi(k) - p_{k-1} \pi(k-1) = q_{k+1} \pi(k+1) - p_k \pi(k).$$

Ainsi, la fonction  $f(k) = q_{k+1} \pi(k+1) - p_k \pi(k)$  est constante sur  $\mathbb{N}$ . Notons  $\alpha = f(0) = q_1 \pi(1) - p_0 \pi(0)$ . On a aussi par invariance en 0 :

$$\pi(0) = r_0 \pi(0) + q_1 \pi(1) \quad ; \quad \alpha = q_1 \pi(1) - p_0 \pi(0) = 0.$$

Donc, pour tout  $k \geq 0$ ,  $\pi(k+1) = \frac{p_k}{q_{k+1}} \pi(k)$ , et

$$\pi(k) = \prod_{j=1}^k \frac{p_{j-1}}{q_j} \pi(0).$$

Les mesures invariantes sont donc proportionnelles à  $\prod_{j=1}^k \frac{p_{j-1}}{q_j}$ , et il existe une probabilité invariante si et seulement si

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \prod_{j=1}^k \frac{p_{j-1}}{q_j} \right) < +\infty.$$

Alors, la probabilité invariante est  $\pi(k) = \frac{1}{S} \prod_{j=1}^k \frac{p_{j-1}}{q_j}$ . Par ailleurs, une condition nécessaire et suffisante simple pour l'apériodicité est :

$$\exists k \in \mathbb{N}, r_k > 0.$$

En effet, si cette condition est vérifiée, alors  $P(k, k) > 0$ , donc  $\text{pgcd}(\mathcal{R}(k)) = 1$ . Réciproquement, si la condition n'est pas vérifiée, alors il n'est pas difficile de voir que tous les temps de retour sont pairs, et donc que  $\text{pgcd}(\mathcal{R}(k)) = 2$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ; la chaîne n'est alors pas apériodique.

**10. Croissance ou retour en 0, II.** Comme dans l'exercice précédent, déterminons les mesures invariantes de la chaîne. L'équation d'invariance donne :

$$\pi(k) = \pi(k-1) p_{k-1}$$

pour tout  $k \geq 1$ , donc si  $\pi(0) = a$ , alors  $\pi(k) = a q_k$  pour tout  $k$ . Par ailleurs, il faut que

$$\pi(0) = \pi(0) (1 - p_0) + \sum_{k \geq 1} \pi(k) (1 - p_k),$$

ce qui donne :

$$a p_0 = a \sum_{k \geq 1} q_k - q_k p_k = a \sum_{k \geq 1} q_k - q_{k+1} = a (p_0 - q),$$

avec  $q = \lim_{k \rightarrow \infty} q_k$ . Par hypothèse,  $q = 0$  dans le cas récurrent, donc l'invariance en 0 ne donne rien de plus dans ce cas. Notons au passage que si  $q \neq 0$  (chaîne transiente d'après la partie I de l'exercice), alors il n'y a pas de mesure invariante. Si  $q = 0$ , l'unique mesure invariante à un coefficient près est donc :

$$\pi(k) = q_k.$$

Elle est de masse finie (réurrence positive) si et seulement si  $\sum_{k=0}^{\infty} q_k = Q < +\infty$ . Dans ce cas, la probabilité stationnaire est  $\pi(k) = \frac{q_k}{Q}$ .

**11. Mesures réversibles, II.**

- (a) Si  $\pi$  est réversible, notons que  $\pi(x) > 0$  pour tout  $x \in \mathfrak{X}$  par irréductibilité de la chaîne. Pour montrer le critère de Kolmogorov, on peut donc multiplier par  $\pi(x_1)$  sans perdre d'information. Alors,

$$\begin{aligned} \pi(x_1) P(x_1, x_2) P(x_2, x_3) \cdots P(x_n, x_1) &= P(x_2, x_1) \pi(x_2) P(x_2, x_3) \cdots P(x_n, x_1) \\ &= P(x_3, x_2) P(x_2, x_1) \pi(x_3) P(x_3, x_4) \cdots P(x_n, x_1) \\ &\quad \vdots \\ &= P(x_n, x_{n-1}) \cdots P(x_3, x_2) P(x_2, x_1) \pi(x_n) P(x_n, x_1) \\ &= P(x_1, x_n) P(x_n, x_{n-1}) \cdots P(x_2, x_1) \pi(x_1) \end{aligned}$$

en utilisant à chaque ligne la réversibilité de la mesure  $\pi$  par rapport à  $P$ .

- (b) Sous l'hypothèse de Kolmogorov, on développe :

$$\begin{aligned} P^n(x, y) P(y, x) &= \sum_{x_1, \dots, x_{n-1}} P(x, x_1) P(x_1, x_2) \cdots P(x_{n-1}, y) P(y, x) \\ &= \sum_{x_1, \dots, x_{n-1}} P(x, y) P(y, x_{n-1}) \cdots P(x_2, x_1) P(x_1, x) \\ &= P(x, y) P^n(y, x). \end{aligned}$$

- (c) Si la chaîne est apériodique, alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x, y) = \pi(y)$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(y, x) = \pi(x)$ , donc en passant à la limite la formule de la question précédente, on obtient  $\pi(y) P(y, x) = \pi(x) P(x, y)$ , c'est-à-dire que la mesure  $\pi$  est réversible.

- (d) Par le théorème ergodique,  $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N 1_{(X_n=y)}$  tend presque sûrement sous  $\mathbb{P}_x$  vers  $\pi(y)$ , et cette convergence presque sûre concerne des variables aléatoires à valeurs dans  $[0, 1]$ , donc on peut utiliser le théorème de convergence dominée pour obtenir la convergence des espérances. Or,

$$\mathbb{E}_x \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N 1_{(X_n=y)} \right] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbb{P}_x[X_n = y] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P^n(x, y).$$

Donc,  $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P^n(x, y) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \pi(y)$ . Alors, par la question (b),

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P^n(x, y) P(y, x) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P^n(y, x) P(x, y),$$

donc par passage à la limite,  $\pi(y) P(y, x) = \pi(x) P(x, y)$ .

- (e) Comme l'espace d'états est supposé fini et  $P$  est irréductible, il existe une unique mesure de probabilité invariante  $\pi$ . Remarquons par ailleurs que pour vérifier le critère de Kolmogorov, il suffit de le faire pour des suites d'éléments  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  tous *distincts*. En effet, le critère de Kolmogorov dit que pour tout cycle dans le graphe  $\mathcal{G}_P$ , le produit des probabilités de transition le long du cycle est invariant par retournement du cycle. Maintenant, si le cycle repasse plusieurs fois par un même point, alors on peut le décomposer en union disjointe de cycles avec des éléments tous distincts; donc, si le critère de Kolmogorov est vrai pour les cycles de sommets distincts, alors il est vrai en général.

Par hypothèse,  $\mathcal{G}_P$  n'a pas de cycle avec des sommets tous distincts de longueur plus grande que 3, donc il faut juste vérifier le critère de Kolmogorov pour les cycles de longueur 2. Mais ce critère est toujours vérifié :  $P(x, y) P(y, x) = P(x, y) P(y, x)$ . Donc, la mesure invariante d'une telle matrice de transition  $P$  est toujours une mesure réversible.

## 12. Unicité de la loi stationnaire.

- (a) La fonction  $\phi$  est strictement concave, donc elle vérifie pour tout barycentre  $\sum_{i=1}^n p_i x_i$  de réels :

$$\phi \left( \sum_{i=1}^n p_i x_i \right) \geq \sum_{i=1}^n p_i \phi(x_i).$$

On a égalité dans cette inégalité si et seulement si tous les  $x_i$  pour lesquels  $p_i > 0$  sont égaux ; autrement dit, il faut que la distribution  $\sum_{i=1}^n p_i \delta_{x_i}$  soit un Dirac  $\delta_x$ . Supposons maintenant donnés une distribution discrète  $(p_i)_{i \geq 1}$  et des réels positifs  $(x_i)_{i \geq 1}$ , avec  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$  ; le cas précédent correspond au cas où tous les  $p_i$  à partir d'un certain rang sont nuls. Si  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i = +\infty$ , alors en posant  $\phi(+\infty) = 1$ , l'inégalité est bien vraie, car  $1 \geq \phi(x_i)$  pour tout  $i$ , donc  $1 = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \geq \sum_{i=1}^{\infty} p_i \phi(x_i)$ . Supposons maintenant  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i < +\infty$ . Alors, la distribution discrète  $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta_{x_i}$  est la limite des lois

$$\mu_n = \sum_{i=1}^{n-1} p_i \delta_{x_i} + \left( \sum_{i \geq n} p_i \right) \delta_{x_n}.$$

D'après ce qui précède,

$$\phi \left( \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i + \left( \sum_{i \geq n} p_i \right) x_n \right) \geq \mu_n(\phi).$$

La limite du terme de droite est  $\mu(\phi) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \phi(x_i)$ , puisque  $\phi$  est une fonction continue bornée et puisqu'on a la convergence en loi  $\mu_n \rightarrow \mu$ . Comme  $\phi$  est continue, il suffit maintenant de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i + \left( \sum_{i \geq n} p_i \right) x_n \right) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i.$$

Or, la valeur absolue de la différence entre le terme de gauche et sa limite prévue est

$$\left| \sum_{i \geq n} p_i (x_n - x_i) \right| \leq \left( \sum_{i \geq n} p_i \right) x_n + \sum_{i \geq n} p_i x_i \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

puisque les deux séries  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$  et  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$  sont convergentes. De nouveau, par stricte concavité de  $\phi$ , on a égalité dans l'inégalité ainsi démontrée si et seulement si l'on a  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta_{x_i} = \delta_x$  pour un certain réel positif  $x$ .

- (b) L'entropie est bien définie, car  $0 \leq \phi \leq 1$ , donc on intègre une fonction positive bornée contre la mesure de probabilité  $\pi$  sur  $\mathfrak{X}$ . On a ensuite, pour  $\mu$  mesure de probabilité sur  $\mathfrak{X}$ ,

$$\mathcal{E}(\mu P) = \sum_{x \in \mathfrak{X}} \pi(x) \phi \left( \frac{(\mu P)(x)}{\pi(x)} \right) = \sum_{x \in \mathfrak{X}} \pi(x) \phi \left( \sum_{y \in \mathfrak{X}} \frac{\pi(y) P(y, x)}{\pi(x)} \frac{\mu(y)}{\pi(y)} \right).$$

Pour tout  $x$ , comme  $\pi$  est invariante par  $P$ ,  $\sum_{y \in \mathfrak{X}} \frac{\pi(y) P(y, x)}{\pi(x)} = 1$ . Donc, par la question précédente,

$$\mathcal{E}(\mu P) \geq \sum_{x, y \in \mathfrak{X}} \pi(y) P(y, x) \phi \left( \frac{\mu(y)}{\pi(y)} \right) = \sum_{y \in \mathfrak{X}} \pi(y) \phi \left( \frac{\mu(y)}{\pi(y)} \right) = \mathcal{E}(\mu).$$

- (c) On a égalité dans la question précédente si et seulement si  $\frac{\mu(y)}{\pi(y)}$  ne dépend pas de  $y$  ; comme  $\mu$  et  $\pi$  sont deux mesures de probabilité, ceci implique  $\mu = \pi$ . Supposons alors

que  $\mu$  est une mesure de probabilité stationnaire. Alors,  $\mu P = \mu$ , donc  $\mathcal{E}(\mu P) = \mathcal{E}(\mu)$  et  $\mu = \pi$  : ceci implique l'unicité de la mesure de probabilité stationnaire.

- (d) Supposons donnée  $\pi$  invariante pour  $P$  ; alors, elle l'est aussi invariante pour  $\tilde{P}$ . Comme  $P$  est irréductible,  $\tilde{P}(x, y) > 0$  pour tout couple  $(x, y)$ . Alors, par la question précédente, si  $\mu$  est invariante pour  $P$ , elle l'est aussi pour  $\tilde{P}$ , et  $\mathcal{E}(\mu \tilde{P}) = \mathcal{E}(\mu)$ , donc  $\mu = \pi$ .