3. Fonctions de Schur et isomorphisme de Frobenius-Schur.

rappels : - On a donné une formule issue de la théorie des représentations pour la loi marginale μ_n d'une marche aléatoire sur $\mathfrak{S}(N)$.

- On a introduit l'algèbre des fonctions symétriques Sym et quatre bases graduées $(p_\lambda)_\lambda$, $(e_\lambda)_\lambda$, (h_λ), (m_λ) avec λ parcourant l'ensemble $\mathbb{Y}$ de toutes les partitions.

On va voir que les caractères irréductibles des $\mathfrak{S}(N)$ sont les coefficients des p_μ dans une 5ème base graduée de Sym.

préliminaire : fonctions v.s. polynômes symétriques

On a défini $\mathrm{Sym} = \mathbb{R}[X]^{\mathfrak{S}(\infty)} = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \,\middle|\, \forall \sigma \in \mathfrak{S}(\infty), \sigma \cdot P = P \right\}$

Avec un nombre fini de variables, on peut aussi considérer

$$\mathrm{Sym}^{(n)} = \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}(n)}$$

$$= \{ P(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \forall \sigma \in \mathfrak{S}(n), P(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = P(x_1, \dots, x_n) \}$$

Si $f = f(X) \in \mathrm{Sym}$, on peut spécialiser f en un nombre fini de variables :

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} = 0, x_{n+2} = 0, \dots)$$

Par exemple, $p_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^k$

On a donc des morphismes d'algèbres $\pi_n : \mathrm{Sym}^{(n)} \to \mathrm{Sym}^{(n-1)}$

$$\mathrm{Sym} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{Sym}^{(n+1)} \xrightarrow[x_{n+1}=0]{} \mathrm{Sym}^{(n)} \xrightarrow[x_n = 0]{} \mathrm{Sym}^{(n-1)} \longrightarrow \cdots$$

Lemme : Si $P(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{Sym}^{(n)}$ et $\deg P \leq n$, il existe une unique fonction symétrique $f \mid P = \pi_n(f)$.

Donc, pour définir une fonction symétrique, il suffit de le faire avec un nombre suffisant de variables.

Preuve : On décompose une fonction candidate f sur la base $(m_\lambda)_\lambda$.

$$[m_\lambda](f) = [x_1^{\lambda_1} \dots x_\ell^{\lambda_\ell}](f) = [x_1^{\lambda_1} \dots x_\ell^{\lambda_\ell}](P),$$

nombre de variables :

$$\ell(\lambda) \leq |\lambda| \leq \deg(f) \leq n$$

Donc la solution est : $$f(X) = \sum_{|\lambda| \leq n} [x_1^{\lambda_1} \dots x_\ell^{\lambda_\ell}](P)\, m_\lambda(X) \qquad \square$$

1. Les fonctions de Schur

Autre façon de définir un polynôme symétrique : comme ratio de deux polynômes antisymétriques.

$$\mathrm{Antisym}^{(n)} = \{ P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \mid \forall \sigma \in \mathfrak{S}(n), \ \sigma . P = \varepsilon(\sigma) . P \}$$

Par exemple, $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) \in \mathrm{Antisym}^{(3)}$.

Si $P \in \mathrm{Antisym}^{(n)}$, alors $\forall i<j$, $x_i - x_j$ divise $P(x_1, \dots, x_n)$.

En effet, $(i,j) \bullet x_1^{m_1} \dots x_i^{m_i} \dots x_j^{m_j} \dots x_n^{m_n}$

$$= x_1^{m_1} \dots x_i^{m_j} \dots x_j^{m_i} \dots x_n^{m_n}$$

et $x_i^{m_i} x_j^{m_j} - x_i^{m_j} x_j^{m_i} = (x_i x_j)^{m_j} \left(x_i^{m_i - m_j} - x_j^{m_i - m_j} \right)$ si $m_i \geq m_j$

et bien sûr, $x_i^k - x_j^k = (x_i - x_j)(x_i^{k-1} + x_i^{k-2} x_j + \cdots + x_j^{k-1})$.

Donc $(x_i - x_j)$ divise $P - (i,j).P = 2P$.

L'anneau $\mathbb{R}[x_1 \ldots x_n]$ est factoriel $\Longrightarrow \underbrace{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)}_{\Delta(x_1, \ldots, x_n)}$ divise P.

Alors, si $P \in Antisym^{(n)}$, $P = \Delta Q$

et $\sigma . P = \varepsilon(\sigma) P = (\sigma . \Delta)(\sigma . Q)$

$= \varepsilon(\sigma) \Delta (\sigma . Q)$.

$\Longrightarrow Q = \sigma . Q \Longrightarrow Q \in Sym^{(n)}$

<u>Conclusion</u> :

$Antisym^{(n)} = \Delta \times Sym^{(n)}$. et les deux espaces vectoriels sont isomorphes.

Il y a une autre façon de créer des polynômes antisymétriques :

$$P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \longmapsto \mathcal{A}(P) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} \varepsilon(\sigma) . (\sigma \circ P).$$

Voyons l'effet de $\mathcal{A}$ sur des monômes.

$$\mathcal{A}(x = x_1^{\mu_1} \cdots x_\ell^{\mu_\ell}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma(1)}^{\mu_1} \cdots x_{\sigma(\ell)}^{\mu_\ell}$$

$$= \det\left(x_i^{\mu_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

avec pour convention $\mu_j = 0$ si $j > \ell(\mu)$.

Si $\mu_j = \mu_{j+1}$ pour un certain j, deux colonnes identiques

$$\Longrightarrow \det = 0.$$

Sinon, μ_j est une suite strictement décroissante :

$\mu_j = \lambda_j + n - j$ avec λ partition telle que $\ell(\lambda) \leq n$.

La restriction de $\mathcal{A}$ à $\mathrm{Vect}\left(x^{\lambda+\rho},\ \lambda \text{ partition de longueur } \leq n\right.$

$\left.\rho = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)\right)$

est un isomorphisme linéaire, car :

- il est surjectif : $\mathcal{A} : \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \to \mathrm{Antisym}^{(n)}$ est surjectif, et on a enlevé les monômes qui annulent $\mathcal{A}$.
- si $P = \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}} c_\lambda \mathcal{A}\left(x_1^{\lambda_1+\rho_1} \dots x_n^{\lambda_n+\rho_n}\right)$, on récupère c_λ comme le coefficient de $\left(x_1^{\lambda_1+\rho_1} \dots x_n^{\lambda_n+\rho_n}\right)$ dans $P(x_1, \dots, x_n)$.

<u>Conclusion</u> : $\mathrm{Antisym}^{(n)} = \mathcal{A}\left(\mathrm{Vect}\left(x^{\lambda+\rho},\ \ell(\lambda) \leq n\right)\right)$

remarque : $A(x^{\lambda+e}) = \det\left(x_i^{\lambda_j+n-j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$.

En particulier, $A(x^e) = \det\left(x_i^{n-j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$

déterminant de Vandermonde

$= \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Définition : Si $\ell(\lambda) \leq n$, le polynôme de Schur $s_\lambda(x_1, \dots x_n)$ est
$$s_\lambda(x_1 \dots, x_n) = \frac{\det\left(x_i^{\lambda_j+n-j}\right)_{1\leq i,j\leq n}}{\det\left(x_i^{n-j}\right)_{1\leq i,j\leq n}}$$

Les polynômes de Schur forment une base de $Sym^{(n)}$.

On voit facilement que $s_\lambda(x_1, \dots, x_n, 0) = s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$

On peut donc remonter : $\exists!\ s_\lambda \in Sym \mid$

$s_\lambda(x_1, \dots, x_n) =$ définition précédente pour n assez grand.

Les fonctions de Schur $(s_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{Y}}$ forment une base linéaire de Sym.

Propriétés importantes (admises) :

→ Formule de Jacobi-Trudy

$$\boxed{s_\lambda = \det\left(h_{\lambda_i + j - i}\right)_{1 \leq i,j \leq \ell(\lambda)}}$$

avec par convention $h_0 = 1$
$h_{-n} = 0$.

→ Identité de Cauchy

Soit $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n \dots\}$ et $Y = \{y_1, y_2, \dots y_n \dots\}$ deux alphabets

$$\boxed{\sum_{\lambda \in \mathcal{Y}} s_\lambda(X)\, s_\lambda(Y) = \prod_{i,j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x_i y_j}}$$

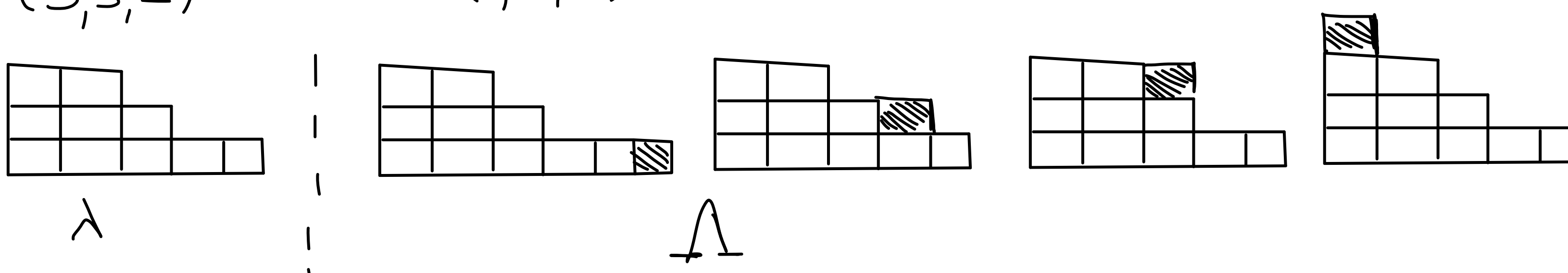
$\longrightarrow$ Règle de Pieri

remarquons que $s_{(1)}(X) = p_1(X) = e_1(X) = h_1(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$.

$$\boxed{\begin{array}{l} s_\lambda(X) \cdot s_1(X) = \displaystyle\sum_{\lambda \nearrow \Lambda \in \mathcal{Y}(n+1)} s_\Lambda(X) \\ \lambda \in \mathcal{Y}(n) \end{array}}$$

la somme portant sur les partitions dont le diagramme de Young s'obtient à partir de celui de λ en rajoutant une case au bord.

$$s_{(5,3,2)} \times s_1 = s_{(6,3,2)} + s_{(5,4,2)} + s_{(5,3,3)} + s_{(5,3,2,1)}$$



2. L'isomorphisme de Frobenius-Schur

On va comparer deux algèbres graduées normées.

1. L'algèbre Sym, avec sa base graduée $(s_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{Y}}$ des fonctions de Schur.

2. L'algèbre de Grothendieck des représentations des groupes symétriques.

Une représentation de $\mathfrak{S}(n)$ s'écrit de manière unique

$$V \underset{(iso)}{=} \bigoplus_{\lambda \in \widehat{\mathfrak{S}}(n)} m_\lambda V^\lambda, \quad m_\lambda \in \mathbb{N}.$$

Ceci invite à introduire le groupe de Grothendieck :

$R(\mathfrak{S}(n))$ = espace vectoriel (réel) de base les V^λ, $\lambda \in \widehat{\mathfrak{S}}(n)$)

Par exemple,

$$2 \cdot V_{\text{trivial}} - 3 V_{\text{signature}} \in R(\mathfrak{S}(n)).$$

<u>Lemme</u> : il y a un isomorphisme linéaire naturel entre $R(\mathfrak{S}(n))$ et $Z(\mathbb{R}\mathfrak{S}(n))$ = centre de l'algèbre réelle du groupe $\mathfrak{S}(n)$

<u>Preuve</u> : Il y a un isomorphisme linéaire complexe entre $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} R(\mathfrak{S}(n))$ = espace vectoriel complexe de base les V^λ, $\lambda \in \widehat{\mathfrak{S}}(n)$

et $Z(\mathbb{C}\mathfrak{S}(n)) = \operatorname{Vect}(ch^\lambda, \lambda \in \widehat{\mathfrak{S}}(n))$

$$\sum_{\lambda \in \widehat{\mathfrak{S}}(n)} m_\lambda V^\lambda \longmapsto \sum_{\lambda \in \widehat{\mathfrak{S}}(n)} m_\lambda ch^\lambda .$$

Pour que cela marche aussi avec les nombres réels, il faut montrer que les caractères $ch^\lambda \in \mathbb{R}\mathfrak{S}(n)$.

Faits admis (pas trop difficile avec un peu de théorie de Galois) :

→ pour $\left|\begin{array}{l}\text{tout groupe } G \text{ fini} \\ \text{toute représentation } (V, \rho)\end{array}\right.$, $ch^V(g) = \operatorname{tr} \rho(g)$ est un entier algébrique (racine d'un polynôme unitaire à coeff entiers)

→ lorsque $G = \mathfrak{S}(n)$, c'est même toujours un entier dans $\mathbb{Z}$.

Donc, une base orthonormée réelle de $\mathbb{R}\mathfrak{S}(n)$ est $(ch^\lambda)_{\lambda \in \widehat{\mathfrak{S}(n)}}$, et la preuve passe aux nombres réels. $\square$

On forme un espace vectoriel gradué

$$R(\mathfrak{S}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} R(\mathfrak{S}(n)).$$

$$\deg V^\lambda = |\lambda|.$$

produits scalaires ? Les espaces $\mathbb{Z}(\mathbb{R}\mathfrak{S}(n))$ ont pour bases orthonormées les ch^λ $\to$ les espaces $R(\mathfrak{S}(n))$ ont pour bases orthonormées les V^λ, $\lambda \in \widehat{\mathfrak{S}}(n)$, et on décrète qu'ils sont orthogonaux dans $R(\mathfrak{S})$.

Dans Sym, on décrète que les $(s_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{Y}}$ forment une base orthonormée. Le produit scalaire correspondant est le **produit scalaire de Hall**.

Lemme : Une famille graduée $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{Y}}$ avec $\deg f_\lambda = |\lambda|$ est une base orthonormée graduée de Sym si et seulement si

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{Y}} f_\lambda(X) f_\lambda(Y) = \prod_{i,j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x_i y_j}.$$

En effet, décomposons chaque f_λ dans la base des fonctions de Schur :

$$f_\lambda = \sum_{\mu \in \mathbb{Y}(n)} \Pi^n_{\lambda\mu} \, s_\mu \qquad \text{si } |\lambda| = n.$$

Alors, $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathbb{Y}} f_\lambda(X)\, f_\lambda(Y) = \sum_{n, \lambda, \mu, \nu} \Pi^n_{\lambda\mu} \Pi^n_{\lambda\nu} \, s_\mu(X) s_\nu(Y)$

(f_λ) bon $\iff$ les matrices $\Pi^n_{\lambda\nu}$ sont dans $O(|\mathbb{Y}(n)|)$
groupe orthogonal

$$\iff \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}(n)} \Pi^n_{\lambda\mu} \Pi^n_{\lambda\nu} = \mathbb{1}(\mu = \nu)$$

$$\iff \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}} f_\lambda(X) f_\lambda(Y) = \sum_{\mu \in \mathbb{Y}} s_\mu(X) s_\mu(Y)$$

et on conclut avec la formule de Cauchy $\square$

Si μ est une partition d'entiers de taille n, on peut la noter multiplicativement $\mu = 1^{m_1(\mu)} 2^{m_2(\mu)} \dots s^{m_s(\mu)}$

Par exemple :

$(6, 3, 3, 1, 1, 1) = 1^3 3^2 6$.

On pose $z_\mu = \prod_{i \geq 1} i^{m_i(\mu)} m_i(\mu)!$

Proposition Le nombre de permutations de type cyclique μ dans $\mathfrak{S}(n)$ est $\frac{n!}{z_\mu}$. Par ailleurs, $(p_\mu)_{\mu \in \mathcal{Y}}$ est une base orthogonale de Sym, avec $\langle p_\mu | p_\mu \rangle = z_\mu$.

Preuve : ① Notons C_μ l'ensemble des permutations de type cyclique μ.

On a une surjection :

$$\mathfrak{S}(n) \longrightarrow C_\mu$$

$$\sigma = a_1 a_2 \dots a_n \longmapsto (a_1, \dots, a_{\mu_1})(a_{\mu_1+1}, \dots, a_{\mu_1+\mu_2}) \dots$$

Chaque élément de C_μ est atteint z_μ fois, car :

- on peut permuter cycliquement l'écriture de chaque cycle sans changer la permutation

$$\longrightarrow \prod_{i \geq 1} i^{m_i(\mu)} \text{ possibilités}$$

- on peut aussi permuter l'ordre des cycles de même longueur

$$\longrightarrow \prod_{i \geq 1} m_i(\mu)! \text{ possibilités}$$

② On a vu que :

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x_i z} = H(X, z) = \exp(P(X, z)) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k(X) z^k}{k} \right)$$

Lorsqu'on développe l'exponentielle, on réunit tous les termes $p_\lambda(X)$ ensemble, et on voit facilement qu'on obtient

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{Y}} \frac{p_\lambda(X)}{z_\lambda} z^{|\lambda|}.$$

$$\underset{(z=1)}{\Longrightarrow} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x_i} = \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}} \frac{p_\lambda(X)}{z_\lambda}.$$

Appliquons cette identité à l'alphabet dénombrable $XY = \{x_i y_j,\ i,j \geq 1\}$

$$\prod_{i,j \geq 1} \frac{1}{1-x_i y_j} = \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}} \frac{p_\lambda(XY)}{z_\lambda} = \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}} \frac{p_\lambda(X)\, p_\lambda(Y)}{z_\lambda}$$

$$\boxed{\begin{aligned} p_k(XY) &= \sum_{i,j} (x_i y_j)^k \\ &= \sum_i x_i^k \cdot \sum_j y_j^k = p_k(X)\, p_k(Y) \end{aligned}}$$

$\Longrightarrow \dfrac{p_\lambda}{\sqrt{z_\lambda}}$ bon de Sym. $\square$.

résumé : Sym = algèbre graduée normée, bon = $(s_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{Y}}$
$R(\mathfrak{S})$ = espace vectoriel gradué normé, bon = les représentations irréductibles des $\mathfrak{S}(n)$

Théorème (Frobenius, Schur)

Il existe une structure d'algèbre graduée sur $R(\mathfrak{S})$, et une application $\Psi : R(\mathfrak{S}) \to \mathrm{Sym}$, telles que :

1. Ψ est une isométrie et un isomorphisme d'algèbres.
2. $(\Psi^{-1}(s_\lambda))_{\lambda\in\mathcal{Y}}$ est l'ensemble des représentations irréductibles des groupes symétriques.
   $\Psi^{-1}(s_\lambda) = V^\lambda$ module de Specht
3. $\forall \lambda, \mu \in \mathcal{Y}(n)$, si σ_μ a pour type cyclique μ, alors
$$\mathrm{ch}^\lambda(\sigma_\mu) = \langle s_\lambda \mid p_\mu \rangle .$$

3. Preuve de l'isomorphisme et applications

<u>aparté</u> : si $H \subset G$, quels liens y-a-t'il entre les représentations de H et celles de G ?

Étant donnée une représentation (V, ρ) de G, on peut restreindre le morphisme $\rho : H \to GL(V)$

$\longrightarrow$ représentation restreinte $\mathrm{Res}_H^G(V)$, avec le même espace vectoriel sous-jacent.

C'est plus délicat dans l'autre sens...

Une représentation V de H est un $\mathbb{C}H$-module pour

$$\mathbb{C}H \times V \longrightarrow V$$

$$\sum_{h \in H} c_h h \, , \, v \longmapsto \sum_{h \in H} c_h (h \cdot v)$$

On peut créer un $\mathbb{C}G$-module en formant $\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} V$.

C'est l'ensemble des combinaisons linéaires de produits $g \otimes v$, avec la règle de simplification :

$$gh \otimes v = g \otimes (h \cdot v) \quad \forall g \in G \text{ et } \forall v \in V \quad \forall h \in H$$

$$\dim_{\mathbb{C}} (\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} V) = \frac{\text{card } G}{\text{card } H} \times \dim_{\mathbb{C}}(V).$$

$\mathrm{Ind}_H^G(V) = \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} V$ est une représentation de G pour l'action naturelle $g \cdot (g' \otimes v) = gg' \otimes v$.

C'est la représentation induite. Un petit calcul donne son caractère en fonction de celui de V :

$$ch^{\mathrm{Ind}_H^G(V)}(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{k \in G} \mathbb{1}_{(k^{-1}gk \in H)} \, ch^V(k^{-1}gk).$$

Application : considérons deux représentations V de $\mathfrak{S}(n)$ et W de $\mathfrak{S}(m)$. Le groupe $H = \mathfrak{S}(n) \times \mathfrak{S}(m)$ peut être vu comme un sous-groupe de $G = \mathfrak{S}(n+m)$: $\mathfrak{S}(n)$ agit sur $[\![1, n]\!]$ et $\mathfrak{S}(m)$ agit sur $[\![n+1, n+m]\!]$.

On a une représentation $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ de $\mathfrak{S}(n) \times \mathfrak{S}(m)$:

$$(\sigma_1, \sigma_2) \cdot v \otimes w = (\sigma_1 \cdot v) \otimes (\sigma_2 \cdot w)$$

On peut donc former :

$$V \times W = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}(n) \times \mathfrak{S}(m)}^{\mathfrak{S}(n+m)} (V \otimes_{\mathbb{C}} W)$$

Cette opération est compatible avec les sommes directes de représentations

$\longrightarrow$ structure d'algèbre graduée sur $R(\mathfrak{S})$.

On peut maintenant définir

$$\Psi : R(\mathfrak{S}) \longrightarrow Sym$$

$$R(\mathfrak{S}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R(\mathfrak{S}(n)) \overset{\text{iso}}{\simeq} \bigoplus_{n=0}^{\infty} Z(\mathbb{R}\mathfrak{S}(n))$$

base : les classes de conjugaison

$$C_\mu = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n),\, t(\sigma) = \mu} \sigma .$$

$$\Psi(C_\mu) = \frac{p_\mu(X)}{z_\mu} .$$

① On a une isométrie d'espace vectoriel gradué.

En effet, les C_μ et les $\frac{p_\mu}{z_\mu}$ sont des bases orthogonales de leurs espaces respectifs !

$$\text{et } \langle C_\mu | C_\mu \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}(n) \\ t(\sigma) = \mu}} 1 = \frac{1}{n!} \frac{n!}{z_\mu} = \frac{1}{z_\mu}$$

$$\left\langle \frac{p_\mu}{z_\mu} \,\middle|\, \frac{p_\mu}{z_\mu} \right\rangle = \frac{\cancel{z_\mu}}{z_\mu^{\cancel{2}}} = \frac{1}{z_\mu}.$$

② On a un isomorphisme d'algèbres.

Voyons comment exprimer Ψ sur une représentation $V \in R(\mathfrak{S}(n))$:

$$\Psi(V) = \Psi(\mathrm{ch}^V) = \Psi\Big(\sum_{\mu \in \mathbb{Y}(n)} \mathrm{ch}^V(\sigma_\mu)\, C_\mu \Big)$$

permutation de type cyclique μ (n'importe laquelle)

$$= \sum_{\mu \in \mathbb{Y}(n)} \frac{\mathrm{ch}^V(\sigma_\mu)}{z_\mu}\, p_\mu(X) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} \mathrm{ch}^V(\sigma)\, p_{t(\sigma)}(X)$$

on remplace une permutation σ_μ par la moyenne sur toutes les permutations σ de type μ.

Calculons alors $\Psi(V \times W)$, $V \in R(\mathfrak{S}(n))$, $W \in R(\mathfrak{S}(m))$.

$$= \frac{1}{(n+m)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n+m)} ch^{\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}(n)\times\mathfrak{S}(m)}^{\mathfrak{S}(n+m)}(V \otimes W)}(\sigma)\ p_{t(\sigma)}(X)$$

$$= \frac{1}{(n+m)!} \frac{1}{n!\,m!} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}(n+m) \\ \rho \in \mathfrak{S}(n+m)}} \mathbb{1}(\rho^{-1}\sigma\rho \in \mathfrak{S}(n)\times\mathfrak{S}(m))\ ch^{V\otimes W}(\rho^{-1}\sigma\rho)\ p_{t(\rho^{-1}\sigma\rho)}(X)$$

$$\underset{\tau = \rho^{-1}\sigma\rho}{=} \frac{1}{(n+m)!} \frac{1}{n!\,m!} \sum_{\substack{\rho \in \mathfrak{S}(n+m) \\ \tau \in \mathfrak{S}(n)\times\mathfrak{S}(m)}} ch^{V\otimes W}(\tau)\ p_{t(\tau)}(X)$$

$$= \frac{1}{n!\,m!} \sum_{\substack{\tau_1 \in \mathfrak{S}(n) \\ \tau_2 \in \mathfrak{S}(m)}} ch^{V\otimes W}(\tau_1, \tau_2)\ p_{t(\tau_1)}(X)\ p_{t(\tau_2)}(X)$$

C'est bien $\Psi(V) \times \Psi(W)$, car on montre facilement que

$$\mathrm{ch}^{V\otimes W}(\tau_1, \tau_2) = \mathrm{ch}^V(\tau_1)\, \mathrm{ch}^W(\tau_2).$$

(3) Il reste à montrer que les $\Psi^{-1}(s_\lambda)$ sont les représentations irréductibles.

D'abord, par Jacobi-Trudy dans le cas d'une partition à une part,

$s_{(n)} = h_n$. $\forall n \geq 1$

Or, $h_n(X) = [z^n]\, H(X, z) = [z^n]\left(\exp P(X, z)\right)$

$$= \sum_{\mu \in \mathcal{Y}(n)} \frac{p_\mu(X)}{z_\mu}$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} 1 \cdot p_{t(\sigma)}(X)$$

$$= \Psi(\text{représentation triviale } \mathbb{C} \text{ de } \mathfrak{S}(n))$$

Ensuite, pour une partition λ arbitraire,

$$s_\lambda = \det\left(h_{\lambda_i+j-i}\right)_{1\leq i,j\leq \ell(\lambda)} = \text{combinaison linéaire } \underline{\text{entière}} \text{ de fonctions } h_\upsilon.$$

Or, $h_\upsilon = \prod_{i=1}^{\ell(\upsilon)} h_{\upsilon_i} = \prod_{i=1}^{\ell(\upsilon)} \Psi(\text{représentation triviale de } \mathfrak{S}(\upsilon_i))$

Ψ compatible avec le produit $\longrightarrow$ $= \Psi(\text{une certaine représentation de } \mathfrak{S}(|\upsilon|))$

Donc, il existe des entiers $m_\upsilon^\lambda \in \mathbb{Z}$, $\upsilon \in \widehat{\mathfrak{S}(n)}$ tels que

$$s_\lambda = \Psi\Big(\sum_{\upsilon\in\widehat{\mathfrak{S}(n)}} m_\upsilon^\lambda V^\upsilon\Big).$$

Mais Ψ est une isométrie : le terme de gauche a pour norme au carré 1

le terme de droite a pour —— $\sum_\upsilon (m_\upsilon^\lambda)^2$.

Donc : $\forall \lambda \in \mathcal{Y}(n), \exists! \, \upsilon \in \hat{\mathfrak{S}}(n) \mid s_\lambda = \Psi(\pm V^\upsilon)$.

Comme les s_λ sont $\perp$ et Ψ est une isométrie, cette correspondance
les V^υ ——

$\lambda \in \mathcal{Y}(n) \longmapsto \upsilon \in \hat{\mathfrak{S}}(n)$ est une bijection (celle qu'on cherchait depuis le début).

<u>quasi-Conclusion</u> : on peut indexer les repr. irréductibles de $\mathfrak{S}(n)$ par les partitions dans $\mathcal{Y}(n)$, de sorte que $\forall \lambda \in \mathcal{Y}(n)$,
$\Psi(V^\lambda) = \pm s_\lambda$.

Pourquoi est-ce toujours un signe $+$?

Considérons la représentation triviale de $\mathfrak{S}(1)$: $V^{(1)} = \Psi^{-1}(s_1)$.

Notons que

$$\underbrace{V^{(1)} \times V^{(1)} \times \cdots \times V^{(1)}}_{n \text{ termes}} = \mathrm{Ind}_{1}^{\mathfrak{S}(n)}(\mathbb{C}_{\text{triviale}}) = \mathbb{C}\mathfrak{S}(n).$$

= représentation régulière de $\mathfrak{S}(n)$.

Donc, $\Psi(\mathbb{C}\mathfrak{S}(n)) = (s_1)^n$

$$\Psi(\mathbb{C}\mathfrak{S}(n)) = \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}(n)} (\dim \lambda)\, \Psi(V^\lambda).$$

Mais, par application récursive de la règle de Pieri :

$$(s_1)^n = \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}(n)} |ST(\lambda)|\, s_\lambda$$

où $ST(\lambda)$ est l'ensemble des façons de construire λ par addition successive de cases.

On conclut : $\Psi(V^\lambda) = +s_\lambda$

et : $\dim \lambda = |ST(\lambda)|$

$\downarrow$

ensemble des tableaux standards de forme λ

= numérotations des cases de λ croissantes suivant les lignes et les colonnes. $\square$

<u>Ex</u> : $\dim(3,2) = 5$

$$\begin{array}{|c|c|c}\hline 4 & 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 1 & 2 & \multicolumn{1}{c|}{3} \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c}\hline 3 & 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 1 & 2 & \multicolumn{1}{c|}{4} \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c}\hline 3 & 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 1 & 2 & \multicolumn{1}{c|}{5} \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c}\hline 2 & 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 1 & 3 & \multicolumn{1}{c|}{5} \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c}\hline 2 & 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 1 & 3 & \multicolumn{1}{c|}{4} \\ \hline\end{array}$$

Voyons finalement les formules pour les caractères de $\mathfrak{S}(n)$:

$$< s_\lambda | p_\mu > = < \Psi(V^\lambda) | \Psi(z_\mu C_\mu) >$$
$$= < ch^\lambda | z_\mu C_\mu > = \frac{z_\mu}{n!} \sum_{\sigma \in C_\mu} ch^\lambda(\sigma)$$
$$= ch^\lambda(\sigma_\mu) \quad \forall \sigma_\mu \in C_\mu .$$

On a donc :

$$\boxed{\begin{aligned} p_\mu(X) &= \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}(n)} < s_\lambda | p_\mu > s_\lambda(X) = \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}(n)} ch^\lambda(\mu)\, s_\lambda(X) . \\ s_\lambda(X) &= \sum_{\mu \in \mathcal{Y}(n)} < s_\lambda | p_\mu > \frac{p_\mu(X)}{z_\mu} = \sum_{\mu \in \mathcal{Y}(n)} ch^\lambda(\mu) \frac{p_\mu(X)}{z_\mu} . \end{aligned}}$$