

6. La correspondance de
Robinson - Schensted

Soit G un groupe fini. Comme $\mathbb{C}G = \bigoplus_{\lambda \in \hat{G}} (\dim \lambda) V_\lambda$, on a l'égalité de dimensions :

$$|G| = \sum_{\lambda \in \hat{G}} (\dim \lambda)^2.$$

Definition La mesure de Plancherel de G est la mesure de probabilité sur \hat{G}

$$\mathbb{P}[\lambda] = \frac{(\dim \lambda)^2}{|G|}.$$

Dans le cas du groupe symétrique :

$$\hat{G} = \mathcal{Y}(n); \quad \mathbb{P}[\lambda] = \frac{(\text{card } ST(\lambda))^2}{n!}$$

Questions: ① \bar{a} quoi ressemble une partition d'entiers typique sous cette loi?

② peut-on expliquer combinatoirement l'identité remarquable

$$n! = \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}(n)} |\text{ST}(\lambda)|^2 ?$$

1. L'algorithme RSK

On va associer \bar{a} un mot w de taille n avec des lettres dans

$[1, N]$ • une partition $\lambda \in \mathcal{Y}(n)$

• deux tableaux $P(w)$ et $Q(w)$ de forme λ .

Un tableau semi-standard avec entrées w_1, \dots, w_n et forme λ est un remplissage des cases du diagramme de Young de λ qui est

- croissant suivant les lignes
- strictement croissant suivant les colonnes

- avec numérotage des cases $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$.

ex :

3	6			
2	2	4	4	
1	1	2	3	5

cas particulier : si les entrées sont $\{1, 2, \dots, n\}$, on obtient un tableau standard.

$$\text{SST}(\lambda, N) = \left\{ \begin{array}{l} \text{tableaux semi standards de forme } \lambda, \\ \bar{\alpha} \text{ entrées dans } [1, N] \end{array} \right\}$$

$$\text{ST}(\lambda) = \left\{ \text{tableaux standards de forme } \lambda \right\}.$$

Théorème ① Il existe une bijection

RSK : $[1, N]^n \rightarrow \bigsqcup_{\lambda \in \mathcal{Y}(n)} \text{SST}(\lambda, N) \times \text{ST}(\lambda)$

↓

Robinson
Schensted
Knuth

$w = w_1 w_2 \dots w_n \mapsto (P(w), Q(w))$

② Si $N = n$, la restriction de RSK à $\mathcal{S}(n)$ induit une bijection entre $\mathcal{S}(n)$ et $\bigsqcup_{\lambda \in \mathcal{Y}(n)} (\text{ST}(\lambda))^2$.

Preuve Expliquons l'algorithme sur l'exemple

$w = 57132412$.

On lit le mot w de gauche à droite et on insère une à une les lettres dans $P(w)$.

$w_1 = 5$

P		Q
$\boxed{5}$		$\boxed{1}$

$w_2 = 7$

Comme $7 \geq 5$, on peut l'insérer au bout de la première ligne

$\boxed{5 7}$		$\boxed{1 2}$
---------------	--	---------------

$w_3 = 1$

Comme $1 < 5$, on doit l'insérer à la place de 5, qui est poussé sur la seconde ligne.

5	
1	7

3	
1	2

$$w_4 = 3$$

5	7
1	3

3	4
1	2

$w_5 = 2$: on doit successivement pousser 3 puis 5 :

5	
3	7
1	2

5	
3	4
1	2

$$w_6 = 4$$

5		
3	7	
1	2	4

5		
3	4	
1	2	6

$$w_7 = 1$$

5		
3		
2	7	
1	1	4

7		
5		
3	4	
1	2	6

$$w_8 = 2$$

5		
3	7	
2	4	
1	1	2

7		
5	8	
3	4	
1	2	6

$$w = 57132412$$

$P(w)$

$Q(w)$.

et on peut réextraire dans l'autre sens w_8, w_7, \dots

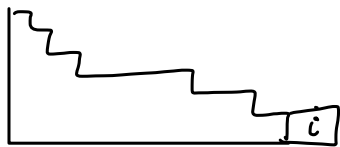
5		
3	7	
2	4	
1	1	<u>2</u>

	X	

Seul point délicat : montrer que $P(w)$ est toujours semi standard.

Il faut montrer que lorsqu'on insère une lettre i dans un tableau semi-standard P , on garde un tableau semi-standard.

1. Si $P \leftarrow i$ avec i inséré en bout de la première ligne de P , c'est évident.

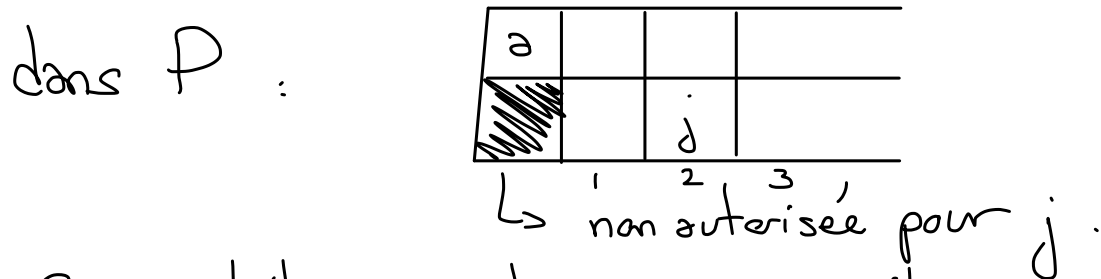
$P \leftarrow i =$  avec $i \geq$ toutes les entrées de la première ligne.

2. Si l'on doit pousser une lettre j vers une ligne supérieure : il faut montrer qu'on n'obtient pas de configuration

$$\boxed{a} \leq \boxed{j} < \boxed{c}$$
$$\boxed{b}$$

avec $j \leq b$.

Comme j a été poussée, elle se trouvait sur une case de la ligne de P en dessous de celle contenant a . Mais $j \geq a$, donc j était au sud-est strictement de a :



Si j était en position 1 : j a été poussée par $b < j$.

Si _____ ≥ 2 : c'est encore pire.

Donc $P \leftarrow i$ reste semistandard.

Corollaire de l'existence de l'algorithme RSK :

$$N^n = \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}(n)} \text{card SST}(\lambda, N) \times \text{card ST}(\lambda)$$

$$n! = \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}(n)} (\text{card ST}(\lambda))^2.$$

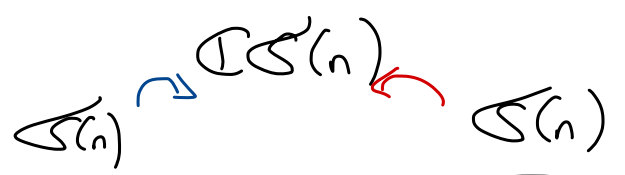
Dans le second cas, on a une explication issue de la théorie des représentations de $\mathfrak{S}(n)$:

$$\mathbb{C}\mathfrak{S}(n) = \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}(n)} (\dim \lambda) V^\lambda.$$

On peut réécrire cela en termes de représentations de $\mathfrak{S}(n) \times \mathfrak{S}(n)$.

On a une structure de **bimodule** :

actions commutantes

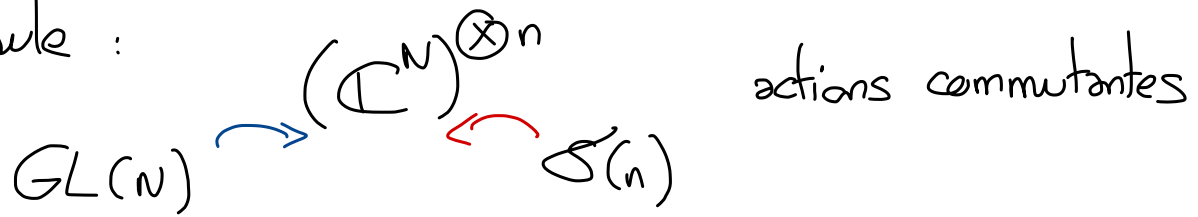


$$\sigma_1 \bullet \sum_{\sigma \in S(n)} c_\sigma \sigma \bullet \sigma_2 = \sum_{\sigma \in S(n)} c_\sigma (\sigma_1 \sigma \sigma_2)$$

La décomposition de $C(S(n))$ en bimodules irréductibles est :

$$C(S(n)) = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{Y}(n)} \overset{V^\lambda}{\underbrace{S(n)}_{\text{dimension}}} \otimes_{\mathbb{C}} \overset{V^\lambda}{\underbrace{S(n)}_{\text{identité donnée par RSK sur } S(n)}}$$

Autre bimodule :



$$g \bullet v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \bullet \sigma = g(v_{\sigma(1)}) \otimes g(v_{\sigma(2)}) \otimes \dots \otimes g(v_{\sigma(n)})$$

dualité de Schur-Weyl :

$$(\mathbb{C}^N)^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}(n)} \mathbb{C}^{\lambda} \otimes \mathbb{C}^{\lambda}$$

$\ell(\lambda) \leq n$

$GL(N) \xrightarrow{U^\lambda} \mathbb{C}^{\lambda} \xrightarrow{V^\lambda} \mathbb{C}^{\lambda}$
 \downarrow
 une représentation irréductible de $GL(N, \mathbb{C})$
 de dimension $|SST(\lambda; N)|$

la représentation de $S(n)$ de dimension
 $|ST(\lambda)|$

\longrightarrow
 dimension identité donnée par RSK sur $[\mathbb{1}, N]^n$.

2. Plus longs sous-mots croissants

Soit $w = w_1 w_2 \dots w_n$ un mot de longueur n . Un sous-mot croissant dans w est un sous-mot

$$w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_\ell} \quad \text{avec } i_1 < i_2 < \dots < i_\ell$$
$$w_{i_1} \leq w_{i_2} \leq \dots \leq w_{i_\ell}.$$

exemple : $w = 57\underline{1}3\underline{2}4\underline{1}2$
 $124.$

Théorème (Greene, 1974).

Soit λ la forme des tableaux $P(w)$ et $Q(w)$.

$$\forall r \geq 1, \lambda_1 + \dots + \lambda_r = \max \{ \ell(w_1) + \ell(w_2) + \dots + \ell(w_r) \}$$

où le maximum est pris sur les r -uplets de sous-mots croissants disjoints de w .

En particulier, $\lambda_1 =$ longueur du plus long sous-mot croissant de w .

Preuve pour $r=1$ et w sans répétition ; $w \in \mathcal{S}(n)$.

Les lettres w_1, w_2, \dots, w_n sont placées au moment de leur insertion sur la première ligne en position $i \in \llbracket 1, \lambda_1 \rrbracket$.

On appelle **sous-mot basique** $B_i(w)$ le sous-mot de w formé des lettres insérées initialement en position i .

Dans $B_i(w)$, les lettres se sont poussées les unes les autres, donc chaque $B_i(w)$ est un sous-mot strictement décroissant.

exemple : $w = 57132412$

$$B_1(w) = 51, \quad B_2(w) = 7321, \quad B_3(w) = 42.$$

Lemme : Si une lettre w_l apparaît dans $B_{j \geq 2}(w)$, alors il y a une lettre w_k dans $B_{j-1}(w)$ avec $k < l$ et $w_k < w_l$.

En effet, au moment de son insertion, w_l est placée à droite d'une case contenant une lettre w_k .

Ceci implique l'existence d'un sous-mot croissant de w de longueur λ_1 (prendre $j = \lambda_1$ et construire le mot récursivement).

Réciproquement, tout sous-mot croissant de w a ses lettres dans des sous-mots basiques disjoints, car ceux-ci sont \downarrow .
 $\Rightarrow l(w) \leq \lambda_1$.

On conclut que $l(w) = \lambda_1$ \square .

aparté : autres propriétés merveilleuses de RSK.

① On a une involution naturelle sur les paires de tableaux standards :

$$(P, Q) \mapsto (Q, P)$$

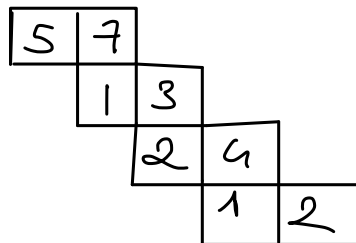
A quoi correspond-elle sur les permutations ?

Théorème : via RSK, cette involution correspond à $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$

$$\forall \sigma \in S(n), P(\sigma^{-1}) = Q(\sigma).$$

② Autre façon de calculer $P(w)$

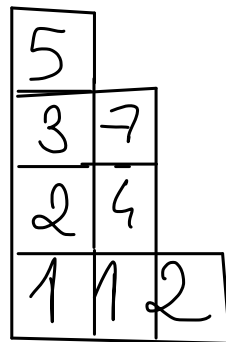
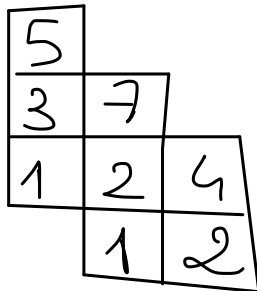
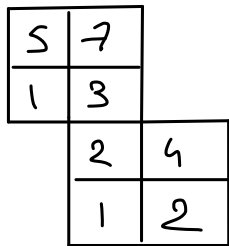
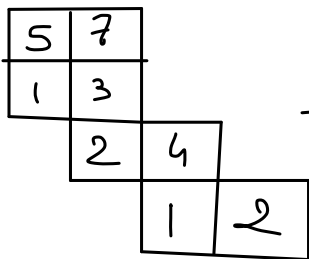
$w = 57132412 =$



(tableau ruban)

jeu de taquin : on pousse les cases vers le sud-ouest en conservant un tableau semi-standard.

$P(w) !!$



Problème d'Ulam (1961)

Soit $\sigma = \sigma_n$ choisie uniformément dans $S(n)$.

$l_n = l(\sigma_n)$ = longueur d'un plus long sous-mot croissant.

Quelle est la distribution de l_n ?

Spoiler :

$$l_n = 2\sqrt{n} + X n^{1/6} + o(n^{1/6})$$

Proposition Soit $\lambda \sim \text{Plancherel}(n)$. Alors, λ_1 suit la loi de l_n .

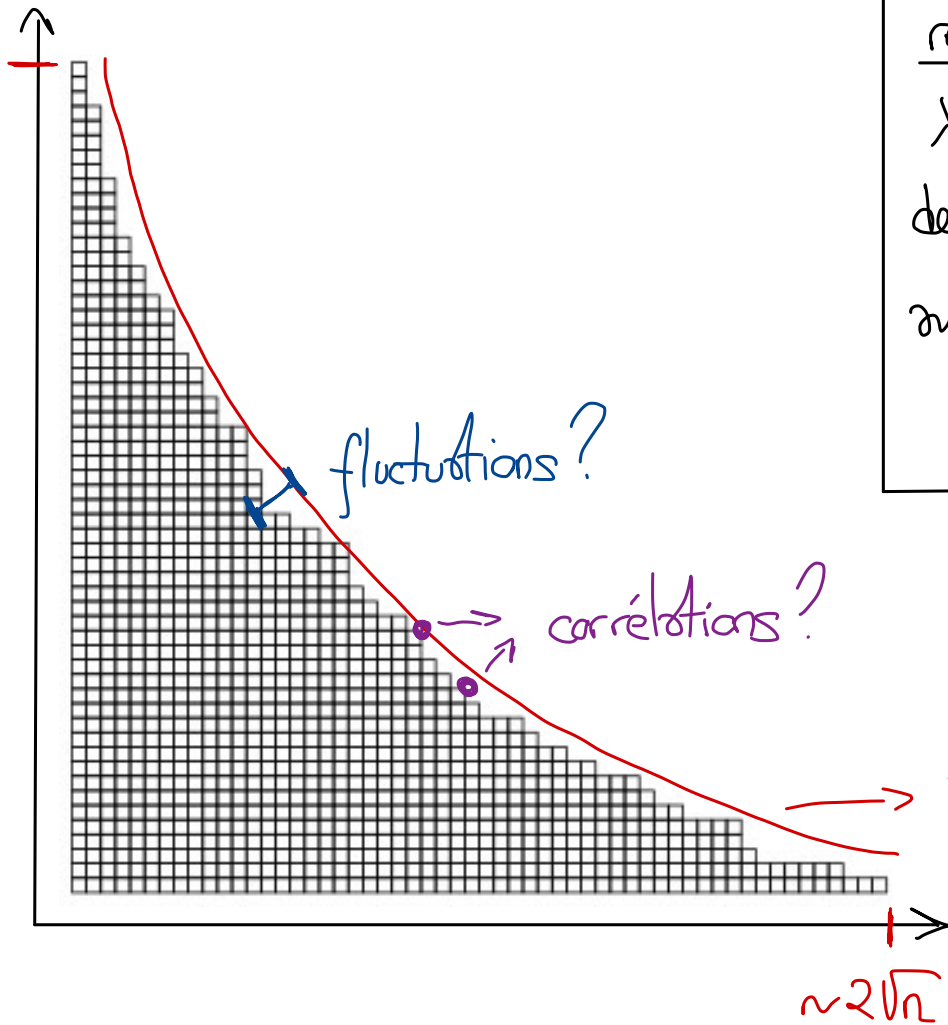
En effet :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\lambda_1 = k] &= \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}(n)} \mathbb{1}_{(\lambda_1 = k)} \frac{|\text{ST}(\lambda)|^2}{n!} \\
&= \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}(n)} \mathbb{1}_{\ell(\sigma) = k} \frac{\text{card} \{ \sigma : \text{forme}(\text{P}(\sigma)) = \lambda \}}{n!} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(n)} \mathbb{1}_{\ell(\sigma) = k} = \mathbb{P}[\ell_n = k].
\end{aligned}$$

Question plus générale : si $\lambda \sim \text{Plancherel}(n)$, quelle est la forme typique de son diagramme de Young ?

Voici un diagramme de Young de taille $n = 1000$:

$\sim 2\sqrt{n}$



remarque : pour construire $\lambda \sim PL(n)$, il suffit de prendre $\lambda = \lambda_{RSK}(\sigma)$ avec $\sigma \sim \text{Unif}(\mathcal{S}(n))$.

3. Bornes supérieures pour l_n

Théorème (Kerov, Vershik, ~ 80)

$$\forall n \geq 1, \mathbb{E}[l_n] \leq 2\sqrt{n}.$$

Preuve: On va montrer que $\forall n, \mathbb{E}[l_n] - \mathbb{E}[l_{n-1}] \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Ceci impliquera le résultat, car

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_0^n \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{n}.$$

Notons $\sigma_n \sim \text{Uniforme}(\mathcal{S}(n))$

$\sigma_{n,n-1} = n-1$ premières lettres de σ_n .

Il est clair que conditionnellement à $\sigma_n(n) = k$, le mot $\sigma_{n, n-1}$ est de loi uniforme dans l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{k\}$.

Donc : $P(\sigma_n) \stackrel{\text{loi}}{=} P_n$.

$P(\sigma_{n, n-1}) \stackrel{\text{loi}}{=} P_{n-1}$ (c'est vrai conditionnellement à tous les événements $\sigma_n(n) = k$).

Ainsi, $\mathbb{E}[P_n - P_{n-1}]$

= \mathbb{P} [on insère $\sigma_n(n)$ en fin de première ligne]

= \mathbb{P} [n est sur la première ligne de $\mathcal{P}(\sigma_n)$].

Regardons plutôt la probabilité pour que n soit sur la première ligne de $P(\sigma_n)$ et de $\Phi(\sigma_n)$.

C'est $\frac{1}{n} = P[\sigma_n(n) = n]$.

Alors : $\frac{1}{n} = \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}(n)} P[\lambda(\sigma_n) = \lambda \text{ et } n \text{ sur la première ligne de } P(\sigma_n) \text{ et } \Phi(\sigma_n)]$

$= \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}(n)} P[\lambda(\sigma_n) = \lambda] P[n \in \text{première ligne de } P(\sigma_n) \text{ et } \Phi(\sigma_n) \mid \lambda(\sigma_n) = \lambda]$

\downarrow

$$PL(\lambda) = \frac{(\dim \lambda)^2}{n!}$$

\downarrow

P et Φ sont uniformes dans $ST(\lambda)$ sachant $\lambda(\sigma_n) = \lambda$.

$$= \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}(n)} \mathbb{P}[\lambda(\sigma_n) = \lambda] \mathbb{P}[n \in \text{première ligne de } \mathcal{Q}(\sigma_n) \mid \lambda(\sigma_n) = \lambda]^2$$

$$\stackrel{\text{(Cauchy-Schwarz)}}{\geq} \left(\sum_{\lambda \in \mathcal{Y}(n)} \mathbb{P}[\lambda(\sigma_n) = \lambda] \mathbb{P}[n \in \dots \mathcal{Q}(\sigma_n) \mid \lambda(\sigma_n) = \lambda] \right)^2$$

$$\geq \left(\mathbb{P}[n \in \text{première ligne de } \mathcal{Q}(\sigma_n)] \right)^2$$

$$\left(\mathbb{E}[l_n - l_{n-1}] \right)^2.$$

□.

anecdote historique : en 1977, Logan et Shepp USA

Kerov et Vershik USSR

ont trouvé la forme limite de $\lambda \sim PL(n)$ et écrit le même article à un détail près.

Dans Kerou-Vershik, il est écrit en supplément qu'on voit facilement (!) que $\mathbb{E}[l_n] \leq 2\sqrt{n}$, ce qui implique:
(voir plus tard).

$$\frac{l_n}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{probab}} 1.$$

La preuve est publiée dix ans plus tard dans un autre article.

Proposition

$$\mathbb{P}[l_n \geq 2e\sqrt{n}] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

En effet, $\forall l \geq 1$,

$\mathbb{P}[l_n \geq l] = \mathbb{P}[\text{on peut trouver un sous-mot croissant de longueur } l]$

$$\leq \frac{1}{n!} \binom{n}{l} \binom{n}{l} (n-l)! \quad \begin{array}{l} \text{répartir les autres lettres} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{choisir les lettres du sous mot croissant} \end{array}$$

choisir les positions de ces lettres

$$\leq \frac{n!}{l!^2 (n-l)!} \leq \frac{n^l}{l!^2}$$

Avec Stirling pour $\ln n \sim 2e\sqrt{n}$:

$$\frac{n^{2e\sqrt{n}}}{(2\sqrt{n})^{4e\sqrt{n}} 4e\pi\sqrt{n}} = \frac{cte}{\sqrt{n} \cdot 2^{4e\sqrt{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

□