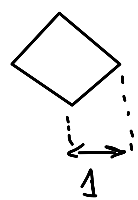
7. Le théorème central limite

de Kerou

On souhaite étudier $\lambda \in \mathbb{Y}(n)$ aléatoire choisie suivant la mesure de Plancherel $PL_n[\lambda] = \frac{(\dim \lambda)^2}{n!}$

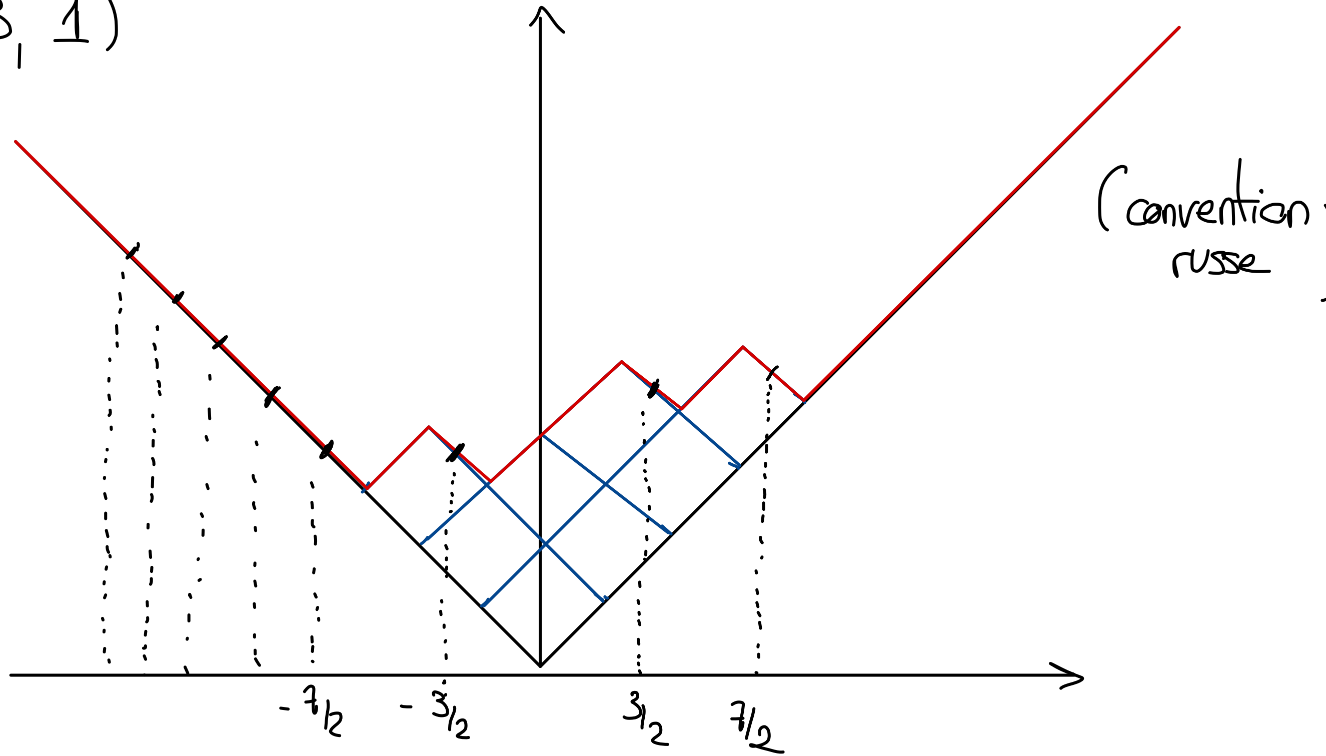
<u>préliminaires</u> : d'autres façon de représenter les partitions d'entiers

- $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell)$ avec $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i = |\lambda| = n$.
- $\lambda = 1^{m_1(\lambda)} \, 2^{m_2(\lambda)} \dots s^{m_s(\lambda)}$ avec $\sum_{i \geq 1} i \cdot m_i(\lambda) = |\lambda| = n$
- diagramme de Young.
- diagramme tourné à 45 degrés.

On dessine les cases du diagramme 

avec une aire 2.

$\lambda = (4, 3, 1)$



$\longrightarrow$ fonction $\omega_\lambda(s)$  1-lipschitzienne, $\omega_\lambda(s) = |s|$ pour $|s|$ assez grand.

ou :

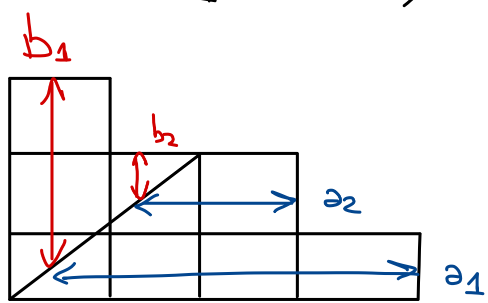
$\longrightarrow$ $D_\lambda = \left\{ \lambda_i - i + \frac{1}{2} \right\}_{i \geq 1}$ = coordonnées des descentes de w_λ.

$D_\lambda \subset \mathbb{Z}' = \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, avec :

$$|D_\lambda \cap \mathbb{Z}'_+| = |\mathbb{Z}'_- \setminus (D_\lambda \cap \mathbb{Z}'_-)|.$$

- coordonnées de Frobenius

$$F_\lambda = (a_1 \dots a_s \mid -b_1 \dots -b_s)$$



$\{a_1, \dots, a_s\} = D_\lambda \cap \mathbb{Z}'_+$

$\{-b_1, \dots, -b_s\} = \mathbb{Z}'_- \setminus (D_\lambda \cap \mathbb{Z}'_-)$

Les coordonnées géométriques de λ (F_λ, D_λ) sont reliées aux valeurs du caractère irréductible ch^λ.

$\longrightarrow$ pour étudier $\lambda = \lambda_n \sim PL_n$, on va s'intéresser aux caractères aléatoires $ch^{\lambda_n}(c_k)$, c_k k-cycle fixé.

1. Retour sur la formule de Frobenius-Schur

On va donner une troisième formule pour $\dim \lambda$:

$$p_\mu(x_1 \dots x_n) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}(n)} ch^\lambda(\sigma_\mu)\, s_\lambda(x_1 \dots x_n)$$

$\mu = 1^n \Longrightarrow$

$$(x_1 + \dots + x_n)^n = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}(n)} \dim \lambda \cdot s_\lambda(x_1, \dots, x_n).$$

En utilisant la formule $s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \dfrac{\det(x_i^{\mu_j})}{\det(x_i^{\rho_j})}$

avec $\mu = \lambda + \rho$, $\rho = (n-1, n-2, \dots 0)$:

$$\dim \lambda = [x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n}] \left((x_1 + \dots + x_n)^n \det(x_i^{\rho_j}) \right)$$

$$= [x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n}] \left((x_1 + \dots + x_n)^n \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} \varepsilon(\sigma) x_1^{n-\sigma(1)} \dots x_n^{n-\sigma(n)} \right)$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} \sum_{k_1 + \dots + k_n = n} \varepsilon(\sigma) \frac{n!}{k_1! \dots k_n!} \mathbb{1}_{\substack{\mu_1 = k_1 + n - \sigma(1) \\ \vdots \\ \mu_n = k_n + n - \sigma(n)}} .$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} \varepsilon(\sigma) \frac{n!}{(\mu_1 - n + \sigma(1))! \dots (\mu_n - n + \sigma(n))!} .$$

On reconnaît un déteminant :

$$\dim \lambda = n! \det\left(\frac{1}{(\mu_i - n + j)!}\right) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i!} \det\left(\mu_i^{\downarrow n-j}\right)$$

$$\underset{\text{opérations sur les lignes et les colonnes}}{=} \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i!} \underbrace{\det\left(\mu_i^{n-j}\right)}_{\text{Vandermonde}} = \boxed{\frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i!} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\mu_i - \mu_j)}$$

avec $\mu_i = \lambda_i + n - i$.

En adaptant la technique, on peut aussi calculer $ch^{\lambda}(\underbrace{k\,1^{n-k}}_{\text{type cyclique d'un } k\text{-cycle}})$.

En effet :

$$\mathrm{ch}^\lambda(k\,1^{n-k}) = [s_\lambda(x_1 \dots x_n)]\Big(p_k(x_1 \dots x_n)\,(p_1(x_1 \dots x_n))^{n-k}\Big)$$

$$= [x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n}]\Big(\sum_{i=1}^n x_i^k \Big(\sum_{j=1}^n x_j\Big)^{n-k} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} \varepsilon(\sigma)\, x_1^{n-\sigma(1)} \dots x_n^{n-\sigma(n)}\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^n [x^{\mu - k e_i}]\Big(\Big(\sum_{j=1}^n x_j\Big)^{n-k} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} \varepsilon(\sigma)\, x_1^{n-\sigma(1)} \dots x_n^{n-\sigma(n)}\Big)$$

$$= \sum_i \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} \varepsilon(\sigma) \frac{(n-k)!}{(\mu_1 - n + \sigma(1))! \dots (\mu_i - n + \sigma(i) - k)! \dots (\mu_n - n + \sigma(n))!}$$

$$= \sum_i \frac{(n-k)!}{\mu_1! \dots (\mu_i - k)! \dots (\mu_n - k)!} \Delta(\mu_1, \dots, \mu_i - k, \dots \mu_n).$$

où la somme porte sur les indices i | $\mu_i \geq k$.

<u>Définition</u> Pour $|\lambda| = n$, on note

$$\Sigma_k(\lambda) = \begin{cases} n^{\downarrow k} \, \chi^\lambda(k\, 1^{n-k}) & \text{si } n \geq k, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $n^{\downarrow k} = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-k+1)$

(caractère renormalisé).

$$\Sigma_k(\lambda) = \sum_i \frac{n^{\downarrow k}\,(n-k)!}{\mu_1!\dots(\mu_i-k)!\dots(\mu_n-k)!} \; \frac{\Delta(\mu_1 \dots \mu_i - k \dots \mu_n)}{\dim \lambda}$$

$$\boxed{= \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{\downarrow k} \prod_{j \neq i} \frac{\mu_i - \mu_j - k}{\mu_i - \mu_j}.}$$

Introduisons $\phi_\lambda(z) = \prod_{i=1}^{n} z - \mu_i$. La fraction rationnelle

$$F_\lambda(z,k) = -\frac{z^{dk}}{k} \frac{\phi_\lambda(z-k)}{\phi_\lambda(z)}$$ a des pôles simples en les μ_i,

donc s'écrit $\text{polynôme}(z) + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{z-\mu_i}$.

On trouve : $c_i = \mu_i^{dk} \prod_{j \neq i} \frac{\mu_i - \mu_j - k}{\mu_i - \mu_j}$.

Autrement dit : si on développe en série de Laurent $F_\lambda(z,k)$, alors $$\boxed{\sum_k(\lambda) = [z^{-1}]\, F_\lambda(z,k).}$$

Ceci permet en particulier de retrouver :

$$n(n-1)\,\chi^\lambda((1,2)) = \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} \lambda_i(\lambda_i - 2i + 1).$$

<u>Fait général</u> : la géométrie de λ est capturée par les observables Σ_k.

<u>idée</u> : étudier $\Sigma_k(\lambda_n)$ avec $\lambda_n \sim$ Plancherel(n).

en déduire plus tard la géométrie typique de λ_n.

2. L'algèbre des observables de diagrammes de Young

Notons $\mathbb{Y} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Y}(n)$. Les fonctions Σ_k sont des fonctions $\mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$. On s'intéresse à $\mathcal{O} = \mathbb{C}[\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k, \dots]$.

Une description élégante de $\mathcal{O}$ est due à Ivanov et Kerov (1999).

<u>Définition</u> On appelle permutation partielle la donnée d'une partie $A \subset \mathbb{N}^*$ et d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(A)$.

Autrement dit : $\sigma \in \mathfrak{S}(\infty)$ et $\sigma(x) = x$ si $x \notin A$.

(on peut aussi avoir des points fixes dans A)

produit : $(\sigma, A) \times (\tau, B) = (\sigma \circ \tau, A \cup B)$.

degré : $\deg(\sigma, A) = \operatorname{card} A$.

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des combinaisons linéaires formelles

$x = \sum x_{(\sigma, A)} (\sigma, A)$ qui restent bornées en degré :

$$\deg x = \sup\{\operatorname{card} A \mid x(\sigma, A) \neq 0\} < +\infty.$$

Le groupe $\mathfrak{S}(\infty) = \bigcup_{n\geq 1}^{\uparrow} \mathfrak{S}(n)$ agit par conjugaison sur les permutations partielles

$$\tau \bullet (\sigma, A) = (\tau\sigma\tau^{-1}, \tau(A))$$

et donc sur l'algèbre graduée $\mathcal{P}$.

Définition L'algèbre d'Ivanov-Kerov est :

$$\mathcal{B} = \{x \in \mathcal{P} \mid \forall \tau \in \mathfrak{S}(\infty), \tau \bullet x = x\}$$
$$= \{x \in \mathcal{P} \mid \forall \tau, \sigma, A, \; x(\sigma, A) = x(\tau\sigma\tau^{-1}, \tau(A))\}.$$

C'est une sous-algèbre graduée de $\mathcal{P}$. Cherchons en une base.

Si $\mu \in \mathcal{Y}(k)$ et $a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq \dots a_k$, notons

$$\sigma_\mu(a_1, a_2, \dots a_k) = \left((a_1, \dots, a_{\mu_1}) \circ (a_{\mu_1+1}, \dots, a_{\mu_1+\mu_2}) \circ \dots, \{a_1, a_2, \dots a_k\} \right)$$

Le coefficient de $\sigma_\mu(a_1, a_2, \dots, a_k)$ dans un élément de $\mathcal{Q}$ ne dépend pas de l'arrangement $(a_1, a_2, \dots a_k) \in \mathrm{Arr}(\mathbb{N}^*, k)$.

Une base de $\mathcal{Q}$ est donc formée des symboles Σ_μ, $\mu \in \mathcal{Y}$

avec $$\Sigma_\mu = \sum_{(a_1, \dots, a_k) \in \mathrm{Arr}(\mathbb{N}^*, k)} \sigma_\mu(a_1, a_2, \dots, a_k). \qquad \text{si } |\mu| = k.$$

exemples : $\Sigma_2 = \sum_{a \neq b} \left((a,b), \{a,b\} \right)$.

$$\Sigma_{(2,1)} = \sum_{a \neq b \neq c} \left((a,b), \{a,b,c\} \right).$$

$$\Sigma_{(2,2)} = \sum_{a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_4} \left((a_1,a_2)(a_3,a_4), \{a_1,a_2,a_3,a_4\} \right).$$

Comment calculer un produit $\Sigma_\mu \times \Sigma_\nu$?

Considérons deux arrangements

$$a_1 \neq a_2 \neq \dots \neq a_k \quad \text{avec } k = |\mu|$$

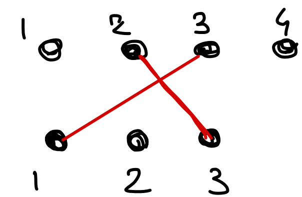
$$b_1 \neq b_2 \neq \dots \neq b_l \quad \text{avec } l = |\nu|.$$

Si l'on connait toutes les identités $a_i = b_j$, alors on peut déterminer le type cyclique de $\sigma_\mu(a) \cdot \sigma_\nu(b)$, qui est une permutation partielle de l'ensemble $\{a_1 \dots a_k, b_1, \dots b_\ell\}$.

Appelons appariement partiel de $[\![1,k]\!]$ avec $[\![1,\ell]\!]$ un ensemble P de paires (i_s, j_s) avec $i_s \in [\![1,k]\!]$
$j_s \in [\![1,\ell]\!]$

et aucune répétition d'indices i_s ou j_s.

<u>exemple</u> : $k = 4$, $\ell = 3$



$P = \{(2,3), (3,1)\}$

Si P encode les identités $a_i = b_j$, alors le type cyclique $t(P, \mu, \nu)$ de $\sigma_\mu(a)\,\sigma_\nu(b)$ ne dépend que de P, μ et ν.

Théorème

$$\Sigma_\mu \times \Sigma_\nu = \sum_{P \text{ appariement partiel}} \Sigma_{t(P,\mu,\nu)} .$$

exemple :

$$\boxed{\begin{aligned} \Sigma_3 \cdot \Sigma_2 = {} & \Sigma_{(3,2)} \\ & + 6\,\Sigma_{(4)} \\ & + 6\,\Sigma_{(2,1)} \end{aligned}}$$

$P = \emptyset$

$P = \{(i,j)\}$ $\quad i \leq 3$, $j \leq 2$

$P = \{(i,j), (i',j')\}$

$$((a,b,c),\{a,b,c\}) \times ((b,c),\{b,c\}) = ((a,b),\{a,b,c\}).$$

Notons que $\deg \Sigma_\mu = |\mu|$

$$\deg \Sigma_{t(\rho,\mu,\nu)} = |\mu| + |\nu| - |\rho|.$$

La formule précédente implique que :

$$\boxed{\Sigma_\mu \times \Sigma_\nu = \Sigma_{\mu \sqcup \nu} + \text{termes de degré inférieur}}$$

Intérêt des algèbres $\mathcal{P}$ et $\mathcal{O}$? elles permettent de faire des calculs génériques (indépendant de n) dans les algèbres $\mathbb{C}\mathfrak{S}(n)$.

1) $\forall n$, on a un morphisme d'algèbres

$$\begin{aligned} \overline{\Pi_n} : \mathcal{P} &\longrightarrow \mathbb{C}\mathfrak{S}(n) \\ (\sigma, A) &\longmapsto \begin{cases} \sigma & \text{si } A \subset [\![1,n]\!] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

On a alors $\pi_n(\mathcal{B}) \subset Z(\mathbb{C}\mathfrak{S}(n))$, car

$$\pi_n(\Sigma_\mu) = \begin{cases} n^{\downarrow k}\, \tilde{C}_{\mu \cup 1^{n-k}} & \text{si } |\mu| = k \leq n, \\ 0 & \text{si } |\mu| = k > n. \end{cases}$$

où $\tilde{C}_\nu = \dfrac{C_\nu}{|C_\nu|} = \dfrac{C_\nu z_\nu}{n!}$ si $\nu \in \mathfrak{Y}(n)$.

2) $\forall n$, on a aussi des morphismes d'algèbres

$$\chi^\lambda : Z(\mathbb{C}\mathfrak{S}(n)) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} c_\sigma \sigma \longmapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} c_\sigma \chi^\lambda(\sigma).$$

(c'est la composée de la transformée de Fourier NC et de l'application $t\, I_d \mapsto t$).

Notons $\Sigma_\mu(\lambda) = \chi^\lambda \circ \Pi_n(\Sigma_\mu)$.

On a : $\Sigma_\mu(\lambda) = n^{\downarrow k} \chi^\lambda(\sigma_\mu)$ si $|\lambda| = n$
$|\mu| = k$
$\sigma_\mu = \sigma_\mu(1, 2, \dots k)$

donc on récupère les observables de diagramme !

Théorème L'algèbre $\mathcal{O}$ peut être considérée comme une algèbre de fonctions sur $\mathcal{Y}$. L'évolution des symboles Σ_μ est donnée par :

$$\Sigma_\mu(\lambda) = \begin{cases} n^{\downarrow k} \chi^\lambda(\sigma_\mu) & \text{si } n = |\lambda| \geq |\mu| = k. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\mathcal{O} = \mathrm{Vect}(\Sigma_\mu, \mu \in \mathbb{Y}) = \mathbb{C}[\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k, \dots].$$

Supposons maintenant $\lambda = \lambda_n \sim PL(n)$.

On a, pour $n \geq k = |\mu|$:

$$\mathbb{E}[\Sigma_\mu(\lambda_n)] = n^{\downarrow k} \, \mathbb{E}[\chi^\lambda(\sigma_\mu)]$$

$$= \frac{n^{\downarrow k}}{n!} \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}(n)} (\dim \lambda)^2 \, \chi^\lambda(\sigma_\mu) = \frac{1}{(n-k)!} \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}(n)} (\dim \lambda) \, ch^\lambda(\sigma_\mu)$$

$$= \frac{1}{(n-k)!} \, ch^{\mathbb{C}\mathfrak{S}(n)}(\sigma_\mu).$$

Mais $ch^{\mathbb{C}\mathfrak{S}(n)}(\sigma) = n! \, \mathbb{1}_{(\sigma = id)}$.

Donc :

$$\mathbb{E}[\Sigma_\mu(\lambda_n)] = \begin{cases} n^{\downarrow m} & \text{si } \mu = (\underbrace{1, 1, \dots 1}_{m \text{ fois}}) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec les formules pour le produit $\Sigma_\mu \times \Sigma_\nu$, on va pouvoir calculer les moments d'ordre supérieur à 2...

3. Polynômes de Hermite et changement de graduation.

On va montrer :

Théorème (Kerov, 1993 ; Ivanov Olshanski, 2002)

$$\left(\frac{n^{k/2} \chi^\lambda(c_k)}{\sqrt{k}} \right)_{k \geq 2} \xrightarrow[\text{lois jointes}]{} \left(\mathcal{N}(0,1) \right)_{k \geq 2}$$

gaussiennes indépendantes.

$\lambda \sim$ Plancherel(n)

préliminaire : changer de graduation dans $\mathcal{P}$ / Q

On définit $\text{rang}(\sigma, A) = |A| + \#$ points fixes de σ sur A.

C'est une graduation sur $\mathcal{P}$.

<u>Lemme</u> : rang est une graduation d'algèbres sur $\mathcal{P}$:

$$\text{rang}(\sigma\tau, A \cup B) \leq \text{rang}(\sigma, A) + \text{rang}(\tau, B)$$

<u>Preuve</u> : On sépare les points fixes de $\sigma\tau$ sur $A \cup B$ en trois.

- les éléments de $B \setminus A$ laissés fixes par τ
- " $A \setminus B$ " σ
- ——— $A \cap B$ " $\sigma\tau$.

Alors,

$$|A\cup B| + |\mathrm{Fix}(\sigma\tau, A\cup B)| = |A\cup B| + |\mathrm{Fix}(\tau, B\setminus A)| + |\mathrm{Fix}(\sigma, A\setminus B)| + |\mathrm{Fix}(\sigma\tau, A\cap B)|$$

$$\leq |A\cup B| + |\mathrm{Fix}(\tau, B)| + |\mathrm{Fix}(\sigma, A)| + |A\cap B|$$

$$= |A| + |\mathrm{Fix}(\sigma, A)| + |B| + |\mathrm{Fix}(\tau, B)|.$$

On a égalité ssi :

- τ et σ n'ont pas de points fixes sur $A\cap B$.
- τ et σ laissent stables $A\cap B$, $\tau_{|A\cap B} = \sigma^{-1}_{|A\cap B}$. $\square$

1) $\mathrm{rang}(\Sigma_\mu) = |\mu| + m_1(\mu)$.

$$\forall \mu, \ \forall n, \quad \mathbb{E}\left[\Sigma_\mu(\lambda_n)\right] = O\left(n^{\frac{\mathrm{rang}(f)}{2}}\right).$$

2) calculs dans $\mathcal{O}$:

Si μ et ν n'ont pas de part en commun, alors

$$\boxed{\Sigma_\mu \times \Sigma_\nu = \Sigma_{\mu \sqcup \nu} + \text{termes de rang inférieur}}.$$

Par ailleurs :

$$\Sigma_k \times \Sigma_{(k^m)} = \Sigma_{(k^{m+1})} \quad \leftarrow \quad A \cap B = \emptyset, \quad P = \emptyset$$

$$+ mk\, \Sigma_{(k^{m-1}, 1^k)} \quad \leftarrow \quad A \cap B = \text{le } k \text{ cycle de } \Sigma_k, \ |P| = k.$$

$$+ \text{termes de rang inférieur}.$$

La loi gaussienne est caractérisée par ses moments, donc il suffit de montrer que

$\forall r \geq 2$, $\forall m_2, m_3, \dots m_r \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{n^{2/2}\,\chi^\lambda(c_2)}{\sqrt{2}}\right)^{m_2}\left(\frac{n^{3/2}\,\chi^\lambda(c_3)}{\sqrt{3}}\right)^{m_3}\cdots\left(\frac{n^{r/2}\,\chi^\lambda(c_r)}{\sqrt{r}}\right)^{m_r}\right]$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \prod_{k=2}^{r}\left(\int \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, x^{m_r}\, dx\right)$$

On va plutôt montrer :

$$\mathbb{E}\left[H_{m_2}\left(\frac{n^{2/2}\,\chi^\lambda(c_2)}{\sqrt{2}}\right) H_{m_3}\left(\frac{n^{3/2}\,\chi^\lambda(c_3)}{\sqrt{3}}\right)\cdots H_{m_r}\left(\frac{n^{r/2}\,\chi^\lambda(c_r)}{\sqrt{r}}\right)\right] \quad (*)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{1}(m_2 = m_3 = \dots = m_r = 0)$$

où les H_n sont les polynômes orthogonaux de Hermite :

- $H_n(x) = x^n +$ polynôme de degré $< n$
- $\langle H_n \mid H_\ell \rangle_{L^2\left(\mathbb{R}, \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx\right)} = \mathbb{1}_{(n=\ell)}\, n!$
- formule explicite : $H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$
- fonction génératrice : $\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{xt - \frac{t^2}{2}}$.
- récurrence :

$$H_{n+1}(x) = x H_n(x) - n H_{n-1}(x).$$

Pour $\mu = 2^{m_2} 3^{m_3} \dots r^{m_r}$, considérons :

$$X_\mu(\lambda) = \frac{\Sigma_\mu(\lambda)}{\sqrt{\prod_{k=2}^{r} k^{m_k} \; \Sigma_1(\lambda)^{k m_k}}} \qquad (\Sigma_1(\lambda) = n \text{ si } |\lambda| = n).$$

$$\Sigma_\mu(\lambda) = \prod_{k=2}^{r} \Sigma_{(k^{m_k})}(\lambda) + \text{observable de rang} < |\mu| = \sum_{k=2}^{r} k m_k .$$

$$X_\mu(\lambda) = \prod_{k=2}^{r} X_{(k^{m_k})}(\lambda) + \text{observable généralisée de rang} < 0$$

↳ dans $\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{C}[\Sigma_1]} \mathbb{C}[\Sigma_1^{1/2}, \Sigma_1^{-1/2}]$

Or, $$X_{(k^{m+1})} = \frac{\Sigma_{(k^{m+1})}}{k^{\frac{m+1}{2}} \Sigma_1^{\frac{k(m+1)}{2}}}$$

$$= \frac{\Sigma_k}{k^{1/2} \Sigma_1^{k/2}} \times \frac{\Sigma_{(k^m)}}{k^{m/2} \Sigma_1^{\frac{km}{2}}} - \frac{km \, \Sigma_{(1^k)} \Sigma_{(k^{m-1})}}{k (\Sigma_1)^k \; k^{\frac{m-1}{2}} \Sigma_1^{\frac{k(m-1)}{2}}} + \cdots$$

$$= X_k \cdot X_{(k^m)} - m\, X_{(k^{m-1})} + \text{observable de rang} < \mathcal{O}$$

$$\Longrightarrow X_{(k^m)} = H_m(X_k) + \text{observable de rang} < \mathcal{O}.$$

Alors, (*)

$$\simeq \mathbb{E}\left[\prod_{k=2}^{r} H_m(X_k(\lambda_n))\right] + O(n^{-1/2})$$

$$\simeq \mathbb{E}\left[X_\mu(\lambda_n)\right] + O(n^{-1/2})$$

$$\simeq \frac{\mathbb{E}\left[\Sigma_\mu(\lambda_n)\right]}{\sqrt{\left(\prod_{k=2}^{r} k^{m_k}\right) n^{|\mu|}}} + O(n^{-1/2})$$

Mais $\mathbb{E}\left[\sum_{\mu} (\lambda_n) \right] = 0$ si $\mu \neq 1^m$.

Donc le TCL est démontré !