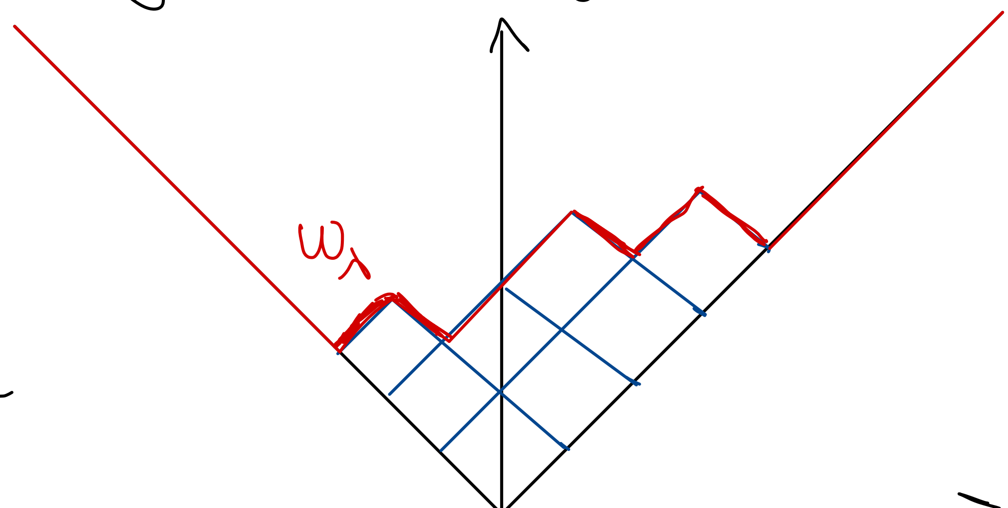
8. La loi des grands nombres de Logan–Shepp–Kerov–Vershik

1. Passage des observables algébriques aux observables géométriques

Étant donnée λ partition d'entiers de taille n, son diagramme de Young tourné à 45 degrés donne une fonction ω_λ qui est :

- 1 - Lipschitzienne
- avec $\omega_\lambda(s) = |s|$ pour s assez grand



On appelle diagramme continu une fonction ω avec ces 2 propriétés.

Ces fonctions :

- sont stables par renormalisation :

$$\omega_\varepsilon(s) = \sqrt{\varepsilon}\,\omega\left(\frac{s}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

(multiplier les dimensions $\updownarrow$ et $\longleftrightarrow$ par $\sqrt{\varepsilon}$).

- ont une propriété de compacité si on restreint le support :

$$\mathcal{Y}_{c,\Pi} = \left\{ \omega \text{ diagramme continu},\ \omega(s) = |s| \text{ si } |s| \geq \Pi \right\}$$

est compact pour la topologie de la convergence uniforme.

- peuvent être décrites à l'aide des observables géométriques

$$\boxed{\tilde{p}_k(\omega) = k(k-1)\int_{\mathbb{R}} \frac{\omega(s) - |s|}{2} \cdot s^{k-2}\, ds,} \quad k \geq 2.$$

Si $\omega = \omega_\lambda$, alors $\frac{1}{2}\tilde{p}_2(\omega_\lambda) = \int \frac{\omega_\lambda(s) - |s|}{2} \, ds = |\lambda|$.

<u>Proposition</u> : Soit $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et ω des diagrammes de Young continus qui sont tous dans un même $\mathcal{Y}_{c,\Pi}$.

On suppose que $\tilde{p}_k(\omega_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \tilde{p}_k(\omega) \quad \forall k \geq 2$.

Alors, $\omega_n \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{} \omega$.

En effet, $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans une partie compacte, et toute limite ω' d'une sous-suite convergente doit vérifier

$\tilde{p}_k(\omega') = \tilde{p}_k(\omega) \quad \forall k \geq 2$

$\Longleftrightarrow \quad \forall P(s)$ polynôme, $\displaystyle\int_{[-\Pi,\Pi]} \omega'(s)\, P(s)\, ds = \int_{[-\Pi,\Pi]} \omega(s)\, P(s)\, ds$

$\Longleftrightarrow$ $\forall f$ fonction continue, $\int \omega'(s) f(s)\, ds = \int \omega(s) f(s)\, ds$

d'où, en prenant $f = \omega' - \omega$, $\int |\omega'(s) - \omega(s)|^2 ds = 0$, et $\omega' = \omega$ $\square$.

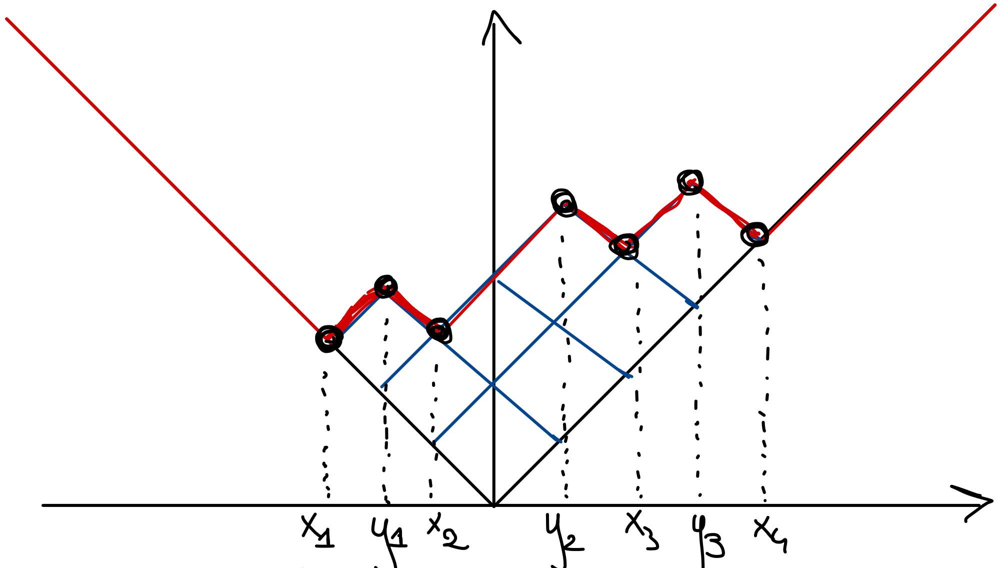
Lien avec les observables algébriques Σ_μ des diagrammes de Young ?

$$\mathcal{O} = \mathrm{Vect}(\Sigma_\mu,\ \mu \in \mathcal{Y}) \text{ avec } \Sigma_\mu(\lambda) = n^{\downarrow k} \chi^\lambda(\sigma_\mu)$$

si $n = |\lambda| \geq |\mu| = k$.

On introduit les coordonnées entrelacées :

$x_1 < y_1 < x_2 < \dots < x_{s-1} < y_{s-1} < x_s$ d'un diagramme de Young :



$$\tilde{p}_k(\omega_\lambda) = k(k-1)\int s^{k-2}\, \frac{\omega_\lambda(s) - |s|}{2}\, ds$$

$$\underset{(IPP)}{=} \int s^k \, \sigma_\lambda''(s)\, ds \quad \text{avec } \sigma_\lambda(s) = \frac{\omega_\lambda(s) - |s|}{2}$$

$$= \sum_{i=1}^{s} x_i^k - \sum_{i=1}^{s-1} y_i^k .$$

On peut encoder ces relations par :

$$\frac{\prod_{i=1}^{s-1} z-y_i}{\prod_{i=1}^{s} z-x_i} = \frac{1}{z} \exp\left(\sum_{i=1}^{s-1} \log\left(1-\frac{y_i}{z}\right) - \sum_{i=1}^{s} \log\left(1-\frac{x_i}{z}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{z} \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{p}_k(\omega_\lambda)}{k} z^{-k}\right).$$

On avait par ailleurs vu (à peu près) :

$$\Sigma_k(\lambda) = [z^{-1}]\left(-\frac{1}{k}\left(z-\frac{1}{2}\right)^{\downarrow k} \frac{H_\lambda(z)}{H_\lambda(z-k)}\right)$$

avec $H_\lambda(z) = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{z+i-1/2}{z-\lambda_i+i-1/2} = \prod_{i=1}^{d} \frac{z+b_i}{z-a_i}$

coordonnées de Frobenius.

Fait combinatoire pas vraiment surprenant :
on peut exprimer les coordonnées entrelacées à partir des coordonnées de Frobenius et réciproquement.

$$\boxed{\frac{\prod_{i=1}^{s-1} z-y_i}{\prod_{i=1}^{s} z-x_i} = \frac{1}{z}\,\frac{H_\lambda(z-1/2)}{H_\lambda(z+1/2)}}$$

(vrai si $\lambda=\phi$, il suffit de voir que cela reste vrai en rajoutant une case à un diagramme).

Conséquence :

$$\mathcal{O} = \mathbb{C}[\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3 \dots]$$
$$= \mathbb{C}[\tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \dots] \text{ avec } \tilde{p}_k(\lambda) = \tilde{p}_k(\omega_\lambda).$$

En travaillant un peu, on peut exprimer $\tilde{p}_k$ explicitement en fonction des $\Sigma_{\ell \leq k+1}$. Il est utile d'introduire une troisième graduation sur $\mathcal{O}$ et $\mathcal{P}$:

$$\text{poids}(\sigma, A) = |A| + \text{nbre de cycles de } \sigma \text{ sur } A.$$

<u>Lemme</u> : On a $\text{poids}(\sigma\tau, A \cup B) \leq \text{poids}(\sigma, A) + \text{poids}(\tau, B)$

avec égalité ssi $A \cap B = \emptyset$.

<u>Preuve</u> : On sépare les cycles de $\sigma\tau$ sur $A \cup B$ en trois :

- les cycles de σ qui sont contenus dans $A \setminus B$
- les cycles de τ ——— dans $B \setminus A$
- les autres cycles, qui ne sont contenus ni dans $A \setminus B$, ni dans $B \setminus A$.

Si c cycle de $\sigma\tau$ a son support non contenu dans $A \setminus B$ ou dans $B \setminus A$,
$c = (c_1, c_2, \dots, c_\ell)$ et certains c_i sont dans A.
——— c_j ——— B

À réécriture du cycle près, on peut supposer $c_1 \in A$ et $c_2 \in B$.

Si $c_1 \notin A \cap B$, alors $\tau(c_1) = c_1$, donc $\sigma\tau(c_1) = c_2 = \sigma(c_1)$
$\in A \cap B$.

$\implies$ les cycles du troisième type ont une intersection non vide avec $A \cap B$.

Alors, $\text{poids}(\sigma\tau, A \cup B) = C_1 + C_2 + C_3 + |A \cup B|$

$$\leq \text{Cyc}(\sigma) + \text{Cyc}(\tau) + |A \cap B| + |A \cup B|$$

$$= \text{Cyc}(\sigma) + |A| + \text{Cyc}(\tau) + |B| = \text{poids}(\sigma, A) + \text{poids}(\tau, B)$$

On a égalité ssi $C_1 = \text{Cyc}(\sigma)$, $C_2 = \text{Cyc}(\tau) \implies A \cap B = \emptyset$. $\square$.

$\text{poids}(\Sigma_\mu) = |\mu| + \ell(\mu)$.

$$\Sigma_\mu \times \Sigma_\nu = \Sigma_{\mu \sqcup \nu} + \text{termes de poids inférieur}.$$

<u>Théorème</u> (admis)

$$\tilde{p}_k = \sum_{|\mu|+\ell(\mu)=k} \frac{k^{\downarrow \ell(\mu)}}{\prod_{i\geq 1} m_i(\mu)!} \cdot \Sigma_\mu + \text{termes de poids} < k.$$

Ainsi, $\tilde{p}_2 = 2\Sigma_1$, $\tilde{p}_3 = 3\Sigma_2$, $\tilde{p}_4 = 4\Sigma_3 + 6\Sigma_{1,1}$ etc.

Ceci va nous permettre de calculer $\mathbb{E}$ et var $(\tilde{p}_k(\omega_{\lambda_n}))$, $\lambda_n \sim PL(n)$.

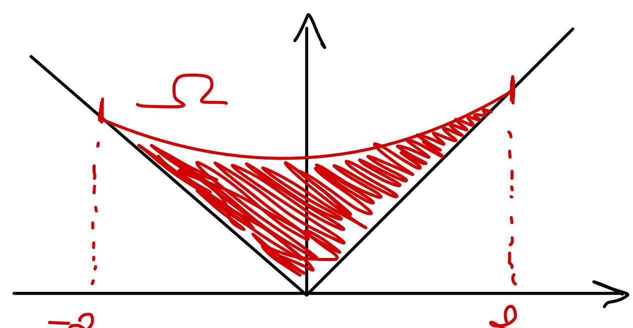
2. Loi des grands nombres et solution du problème d'Ulam.

Théorème Posons $\omega_n = (\omega_{\lambda_n})_{\frac{1}{n}}$ → on renormalise pour avoir un diagramme continu d'aire 2.

$\lambda_n \sim$ Plancherel(n)

et $$\Omega(s) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left(s \arcsin \frac{s}{2} + \sqrt{4-s^2}\right) & \text{si } |s| \leq 2 \\ |s| & \text{si } |s| \geq 2. \end{cases}$$

On a $\omega_n \xrightarrow[\mathbb{P},\ \|\cdot\|_\infty]{} \Omega$.



Préliminaire 1)

On a vu que $\mathbb{P}[\lambda_{n,1} \geq 2e\sqrt{n}] \longrightarrow 0$

par symétrie, $\mathbb{P}[\ell(\lambda_{n,1}) \geq 2e\sqrt{n}] \longrightarrow 0$

donc avec probabilité tendant vers 1, $\omega_{\lambda_n} \in \mathcal{Y}_{c,2e\sqrt{n}}$

$$\omega_n \in \mathcal{Y}_{c,2e}.$$

Il suffit donc de montrer que

$$\tilde{p}_k(\omega_n) \xrightarrow[\mathbb{P}]{} \tilde{p}_k(\Omega) \quad \forall k \geq 2.$$

On va montrer la convergence en espérance et l'annulation asymptotique de la variance. (puis, utiliser Bienaymé-Chebyshev).

Préliminaire 2)

$$\tilde{p}_k(\Omega) = k(k-1)\int_{-2}^{2} s^{k-2}\,\frac{\Omega(s)-|s|}{2}\,ds$$

$$\underset{IPP}{=} -\frac{k}{2}\int_{-2}^{2} s^{k-1}\left(\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{s}{2} - \operatorname{sgn}(s)\right)ds$$

Par parité, $\tilde{p}_k(\Omega) = 0$ si k est impair. Sinon, c'est

$$\tilde{p}_{2k}(\Omega) = 2k\int_{0}^{2} s^{2k-1}\left(1-\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{s}{2}\right)ds$$

$$\underset{s=2\sin\theta}{=} 2^{2k+1}k\int_0^{\pi/2}\left(1-\frac{2\theta}{\pi}\right)(\sin\theta)^{2k-1}\cos\theta\,d\theta$$

$$\underset{IPP}{=} \frac{2^{2k+1}}{\pi}\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2k}\,d\theta \underset{\text{(formules de Wallis)}}{=} \binom{2k}{k}.$$

Notons que pour toute observable $f \in \mathcal{O}$,

$$\mathbb{E}[f(\lambda_n)] = O\left(n^{\frac{\text{poids}(f)}{2}}\right).$$

Alors :

$$\mathbb{E}[\tilde{p}_k(\lambda_n)] = \sum_{|\mu|+\ell(\mu)=k} \frac{k^{\downarrow \ell(\mu)}}{\prod_{i\geq 1} m_i(\mu)!} \mathbb{E}[\Sigma_\mu(\lambda_n)] + O\left(n^{\frac{k-1}{2}}\right)$$

$$= \begin{cases} \binom{k}{k/2} n^{\frac{k}{2}} + O\left(n^{\frac{k-1}{2}}\right) & \text{si } k \text{ pair,} \\ & (\mu = 1^{k/2}) \\ O\left(n^{\frac{k-1}{2}}\right) & \text{si } k \text{ impair.} \end{cases}$$

Les observables géométriques se comportent bien vis-à-vis de la renormalisation :

$$\tilde{p}_k(\omega_n) = k(k-1)\int \frac{\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\omega_{\lambda_n}(\sqrt{n}\,s) - |s|\right]}{2} s^{k-2}\, ds$$

$$= \frac{k(k-1)}{n^{k/2}} \int \frac{\omega_{\lambda_n}(\sqrt{n}\,s) - |\sqrt{n}\,s|}{2} (\sqrt{n}\,s)^{k-2} \sqrt{n}\, ds$$

$$= \frac{1}{n^{k/2}} \tilde{p}_k(\lambda_n).$$

Donc $\mathbb{E}[\tilde{p}_k(\omega_n)] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{p}_k(\Omega) \quad \forall k \geq 2.$

Pour la variance, la propriété de factorisation en plus haut poids

$\sum_\mu \sum_\nu = \sum_{\mu \sqcup \nu} +$ termes de poids inférieur implique :

$\mathrm{var}(\tilde{p}_k(\lambda_n)) = O(n^{\frac{2k-1}{2}})$

$\mathrm{var}(\tilde{p}_k(\omega_n)) = O(n^{-1/2}) \longrightarrow$ Le théorème est démontré !.

<u>remarque</u> On peut se demander s'il y a une limite à

$\sqrt{n}(\omega_n(s) - \Omega(s))$ (processus des fluctuations par rapport à la forme limite).

On peut montrer que :

$$\sqrt{n}(\omega_n(s) - \Omega(s)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\xi_k}{\sqrt{k}} \sin\left(k \arccos \frac{s}{2}\right).$$

loi

distributions sur $[-2,2]$

(TCL de Kerov, version géométrique).

Les ξ_k gaussiennes indépendantes.

Corollaire Soit $\sigma_n \sim \mathrm{Unif}(\mathfrak{S}(n))$

$\ell_n = \ell(\sigma_n)$ longueur d'un plus long sous-mot croissant.

$$\frac{\ell_n}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[\mathbb{P}]{} 1.$$

Preuve : Comme $\Omega(s) > |s|$ si $s = 2-\varepsilon$, avec grande probabilité, $\omega_{\lambda_n}(\sqrt{n}\,2-\varepsilon) > \sqrt{n}(2-\varepsilon)$

$$\ell_n = \lambda_{n,1} > \sqrt{n}\,(2-\varepsilon).$$

Mais on aussi $\mathbb{E}[\ell_n] \leq 2\sqrt{n}$, donc on est coincé :

$$\frac{\ell_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[\mathbb{P}]{} 2. \qquad \square$$