Durée : 3 heures. Tous les documents sont autorisés. Sont interdits : calculatrice, téléphone, ordinateur ou objet apparenté. Toutes les réponses doivent être justifiées, et la rédaction sera prise en compte.

Règles du jeu. Toutes les questions doivent être traitées en utilisant seulement :

— les résultats du cours (il faut donc démontrer tout ce qui n'y serait pas) ;

— ou les résultats de questions *précédentes*, même si ces questions n'ont pas été traitées.

Les questions marquées d'une ($\star$) sont plus longues à traiter que les autres, mais pas forcément plus difficiles (elles valent plus de points).

Exercice 1. Distance de Fortet–Mourier. Soit $(\mathfrak{X}, d)$ un espace métrique complet séparable. On note $\mathrm{BL}(\mathfrak{X})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ qui sont bornées et lipschitziennes :

$$\sup_{x \neq y \in \mathfrak{X}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} = \|f\|_L < +\infty.$$

1. Montrer que $\mathrm{BL}(\mathfrak{X})$ est un espace de Banach (espace vectoriel normé complet) pour la norme

$$\|f\|_{\mathrm{BL}} = \|f\|_\infty + \|f\|_L, \quad \text{avec } \|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathfrak{X}} |f(x)|.$$

2. Montrer que pour tout compact $K \subset \mathfrak{X}$, la boule unité de $\mathrm{BL}(\mathfrak{X})$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme sur le compact K.

On rappelle que l'ensemble $\mathscr{M}^1(\mathfrak{X})$ des mesures de probabilité boréliennes sur $\mathfrak{X}$ est un espace métrique complet séparable pour la distance de Lévy–Prohorov

$$d_{\mathrm{LP}}(\mu, \nu) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid \forall A \text{ partie borélienne, } \mu(A) \leq \nu(A^\varepsilon) + \varepsilon\},$$

où $A^\varepsilon = \{x \in \mathfrak{X} \mid \exists y \in A,\ d(x,y) < \varepsilon\}$. On introduit une autre métrique sur $\mathscr{M}^1(\mathfrak{X})$: la distance de Fortet–Mourier

$$d_{\mathrm{FM}}(\mu, \nu) = \sup_{f \in \mathrm{BL}(\mathfrak{X}),\ \|f\|_{\mathrm{BL}} \leq 1} |\mu(f) - \nu(f)|, \quad \text{avec } \mu(f) = \int_{\mathfrak{X}} f(x)\,\mu(dx).$$

3. ($\star$) Montrer que d_{FM} est une distance sur $\mathscr{M}^1(\mathfrak{X})$, et qu'une suite de mesures de probabilité $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $\mathfrak{X}$ converge pour la topologie faible de $\mathscr{M}^1(\mathfrak{X})$ vers une mesure μ si et seulement si $d_{\mathrm{FM}}(\mu_n, \mu) \to_{n \to \infty} 0$. Pour l'implication $\Rightarrow$, on pourra faire un raisonnement par l'absurde.
4. Soient μ et ν deux mesures dans $\mathscr{M}^1(\mathfrak{X})$, et F une partie fermée de $\mathfrak{X}$. On se donne un paramètre $\varepsilon > 0$ tel que $\mu(F) > \nu(F^\varepsilon) + \varepsilon$. Montrer qu'il existe $f \in \mathrm{BL}(\mathfrak{X})$ telle que $\|f\|_{\mathrm{BL}} \leq 1 + \frac{2}{\varepsilon}$, avec $f_{|F} = 1$ et $f_{\mathfrak{X} \setminus F^\varepsilon} = -1$. En déduire que

$$\left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right) d_{\mathrm{FM}}(\mu, \nu) \geq 2\varepsilon.$$

5. Montrer que $d_{\mathrm{FM}}(\mu, \nu) \geq \frac{2}{3}\,(d_{\mathrm{LP}}(\mu, \nu))^2$.
6. Soit (X, Y) un couplage de μ et ν, c'est-à-dire un couple de variables aléatoires avec X de loi μ et Y de loi ν. Montrer que si $\mathbb{P}[d(X,Y) \geq \varepsilon] \leq \varepsilon$, alors $\varepsilon \geq d_{\mathrm{LP}}(\mu, \nu)$.

7. On admet la propriété suivante de $d_{\mathrm{LP}}(\mu,\nu)$: il existe un couplage optimal (X,Y) de μ et ν tel que $d_{\mathrm{LP}}(\mu,\nu)=\inf\{\varepsilon>0 \mid \mathbb{P}[d(X,Y)\geq\varepsilon]\leq\varepsilon\}$. En déduire que $d_{\mathrm{LP}}(\mu,\nu)\geq\frac{1}{2}\,d_{\mathrm{FM}}(\mu,\nu)$.

Exercice 2. Dimension entropique et vitesse de convergence des mesures empiriques. On fixe un espace métrique complet séparable $(\mathfrak{X},d)$ et une mesure de probabilité borélienne μ sur $\mathfrak{X}$. Pour $\varepsilon>0$, on note $N(\mu,\varepsilon)$ le nombre minimal de parties $S_1,S_2,\ldots,S_N$ telles que $\mu(\mathfrak{X}\setminus\bigcup_{i=1}^N S_i)\leq\varepsilon$, et telles que

$$\forall i\in[\![1,N]\!]\,,\ \ \mathrm{diam}(S_i)=\sup_{x,y\in S_i}d(x,y)\leq\varepsilon.$$

La dimension entropique de $(\mathfrak{X},d,\mu)$ est la quantité positive (éventuellement $+\infty$)

$$H(\mathfrak{X},d,\mu)=\limsup_{\varepsilon\to0}\left(-\frac{\log N(\mu,\varepsilon)}{\log\varepsilon}\right).$$

1. $(\star)$ On suppose que $\mathfrak{X}=\mathbb{R}^h$, que d est la distance euclidienne et que μ est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Montrer que $H(\mathfrak{X},d,\mu)=h$. Que peut-on dire si on ne suppose plus μ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue ?

Dans ce qui suit, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi μ, et μ_n est la n-ième mesure empirique : $\mu_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\delta_{X_i}$. On sait que $\mu_n\rightharpoonup\mu$ presque sûrement dans $\mathscr{M}^1(\mathfrak{X})$ (on ne demande pas de redémontrer ce fait). Autrement dit, comme la distance de Lévy–Prohorov métrise la convergence en loi, $d_{\mathrm{LP}}(\mu_n,\mu)\to0$ presque sûrement. Les questions suivantes estiment la vitesse de cette convergence.

2. Soit $T\subset\mathfrak{X}$ une partie borélienne, et $T=\bigsqcup_{i=1}^m S_i$ une partition de T en un nombre fini de parties boréliennes disjointes. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^m|\mu_n(S_i)-\mu(S_i)|\right]\leq\sqrt{\frac{m\,\mu(T)}{n}}.$$

3. On suppose que la dimension entropique $h=H(\mathfrak{X},d,\mu)$ est finie. Montrer que tout $\eta>0$, $\mathbb{E}[d_{\mathrm{LP}}(\mu_n,\mu)]\leq n^{-\frac{1}{h+2+\eta}}$ pour n assez grand. On pourra comparer $\mu_n(A)$ et $\mu(A^\varepsilon)$ en décomposant A à l'aide d'une partition de $\mathfrak{X}$ convenablement choisie.

Exercice 3. Front de certains processus de Poisson composés. On considère le processus de Poisson composé $(P_t)_{t\geq0}$ d'intensité

$$\nu(dx)=1_{x>0}\,\frac{1}{x\,\mathrm{e}^x}\,dx.$$

Notons que cette mesure intègre $|x|$, donc P_t est intégrable quelque soit $t\geq0$.

1. Calculer $\mathbb{E}[P_t]$, puis la transformée de Fourier $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi P_t}]$. On pourra établir une équation différentielle linéaire vérifiée par la fonction $\xi\mapsto\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi P_t}]$.
2. Pour tout paramètre $\alpha>0$, on rappelle que la loi Γ de paramètres $(\alpha,1)$ est donnée par la densité

$$1_{x>0}\,\frac{x^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(\alpha)}\,dx,\quad \text{avec } \Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,dx.$$

   Calculer la transformée de Fourier de cette loi, et en déduire la loi des marginales du processus $(P_t)_{t\geq0}$.
3. On dit qu'une variable aléatoire réelle X a un front en t si elle admet une densité $f(x)\,dx$ par rapport à la mesure de Lebesgue, avec f croissante sur $(-\infty,t]$ et décroissante sur $[t,+\infty)$ (on ne demande pas que f soit continue). Déterminer le front de chaque variable P_t (s'il y en a un). Commenter.

Corrigé exercice 1.

1. Il est bien connu que l'application $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur l'ensemble des fonctions bornées sur $\mathfrak{X}$. Par ailleurs, $\|\cdot\|_L$ vérifie bien la condition $\|\lambda f\|_L = |\lambda|\,\|f\|_L$ et l'inégalité triangulaire :
$$\frac{|(f+g)(x)-(f+g)(y)|}{d(x,y)} \leq \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)} + \frac{|g(x)-g(y)|}{d(x,y)} \leq \|f\|_L + \|g\|_L,$$
d'où l'inégalité triangulaire par passage à la borne supérieure dans le terme de gauche. Par conséquent, $\|\cdot\|_{\mathrm{BL}}$ est la somme d'une norme et d'une semi-norme (norme sans la séparation) sur $\mathrm{BL}(\mathfrak{X})$, donc c'est bien une norme sur cet espace. Pour la complétude, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions sur $\mathfrak{X}$ qui est de Cauchy pour $\|\cdot\|_{\mathrm{BL}}$, alors elle est *a fortiori* de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, donc elle converge uniformément vers une fonction bornée f (on utilise ici le fait bien connu que $(\ell^\infty(\mathfrak{X}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach). Cette fonction limite f est bien lipschitzienne, car pour tous $x, y \in \mathfrak{X}$ avec $x \neq y$,
$$\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)} = \lim_{n\to\infty} \frac{|f_n(x)-f_n(y)|}{d(x,y)} \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_L \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{\mathrm{BL}} < +\infty.$$
Finalement, on a bien convergence dans $(\mathrm{BL}(\mathfrak{X}), \|\cdot\|_{\mathrm{BL}})$, car pour tous $x, y, z \in \mathfrak{X}$ avec $x \neq y$,
$$\begin{aligned}&|(f-f_n)(z)| + \frac{|(f-f_n)(x)-(f-f_n)(y)|}{d(x,y)} \\ &= \lim_{p\to\infty} |(f_{n+p}-f_n)(z)| + \frac{|(f_{n+p}-f_n)(x)-(f_{n+p}-f_n)(y)|}{d(x,y)} \\ &\leq \sup_{p\in\mathbb{N}} \|f_{n+p}-f_n\|_{\mathrm{BL}},\end{aligned}$$
d'où par passage à la borne supérieure $\|f-f_n\|_{\mathrm{BL}} \leq \sup_{p\in\mathbb{N}} \|f_{n+p}-f_n\|_{\mathrm{BL}}$. Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour $\|\cdot\|_{\mathrm{BL}}$, on conclut que $f_n \to_{\|\cdot\|_{\mathrm{BL}}} f$.

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions avec $\|f_n\|_{\mathrm{BL}} \leq 1$ pour tout n, et $K \subset \mathfrak{X}$ un compact. Ces fonctions sont uniformément bornées et uniformément lipschitziennes sur K, donc par le théorème d'Arzelà-Ascoli, il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur K. Attention, en revanche, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas forcément de sous-suite qui converge pour la norme $\|\cdot\|_{\mathrm{BL}}$ (l'espace $\mathrm{BL}(\mathfrak{X})$ est en général de dimension infinie, donc sa boule unité n'est en général pas compacte), ou pour la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathfrak{X}$ tout entier.

3. L'inégalité triangulaire et la symétrie de d_{FM} sont triviales, et le seul point à vérifier est la séparation : si $d_{\mathrm{FM}}(\mu,\nu) = 0$, alors $\mu = \nu$. Notons que si $d_{\mathrm{FM}}(\mu,\nu) = 0$, alors $\mu(f) = \nu(f)$ pour toute fonction lipschitzienne bornée (pas seulement celles de norme $\|f\|_{\mathrm{BL}}$ plus petite que 1). En effet, de façon générale, par linéarité de l'intégrale, si $\mu, \nu \in \mathscr{M}^1(\mathfrak{X})$ et $f \in \mathrm{BL}(\mathfrak{X})$, alors
$$|\mu(f) - \nu(f)| \leq d_{\mathrm{FM}}(\mu,\nu)\, \|f\|_{\mathrm{BL}}.$$
Soit $F \subset \mathfrak{X}$ une partie fermée, et $f_m(x) = \max(0, 1 - m\, d(x,F))$. C'est une fonction dans $\mathrm{BL}(\mathfrak{X})$, avec $\|f_m\|_{\mathrm{BL}} \leq m+1$. Par hypothèse, $\mu(f_m) = \nu(f_m)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et par convergence dominée, comme $\lim_{m\to\infty} f_m(x) = 1_{x\in F}$ pour tout $x \in \mathfrak{X}$, $\mu(F) = \nu(F)$. On sait alors que l'égalité de deux mesures sur tous les fermés implique l'égalité des deux mesures.

   Supposons que $d_{\mathrm{FM}}(\mu_n, \mu)$ tende vers 0. On va vérifier le critère de Portmanteau sur les fermés : pour tout fermé $F \subset \mathfrak{X}$, $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$. On remarque qu'avec les mêmes fonctions f_m que précédemment,
$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(f_m) = \mu(f_m) \quad \text{puisque } |\mu_n(f_m) - \mu(f_m)| \leq (m+1)\, d_{\mathrm{FM}}(\mu_n,\mu) \to 0.$$

Comme $f_m(x) \geq 1_{x \in F}$, ceci implique $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \leq \mu(f_m)$ pour tout m, puis, par convergence dominée sur le terme de droite de cette inégalité, $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$. Ainsi, $\mu_n \rightharpoonup \mu$.

Supposons réciproquement $\mu_n \rightharpoonup \mu$. On raisonne par l'absurde et on suppose que $d_{\mathrm{FM}}(\mu_n, \mu)$ ne tend pas vers 0. À extraction près, on peut donc supposer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

- $\mu_n \rightharpoonup \mu$;
- il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathrm{BL}(\mathfrak{X})$ avec $\|f_n\|_{\mathrm{BL}} \leq 1$ et $|\mu_n(f_n) - \mu(f_n)| \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme $\mu_n \rightharpoonup \mu$ et comme $\mathfrak{X}$ est polonais, la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue et on peut trouver un compact $K \subset \mathfrak{X}$ tel que $\mu_n(K) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{6}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et de même pour $\mu(K)$. D'après la question précédente, la suite de fonctions restreintes $((f_n)_{|K})_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme sur K. À extraction près, on peut donc également supposer $f_n \to_{\|\cdot\|_{\infty,K}} f$, f étant une fonction continue sur K avec $\|f\|_{\infty,K} \leq 1$. On prolonge f en une fonction continue sur $\mathfrak{X}$ tout entier, de sorte que $\|f\|_\infty \leq 1$: c'est possible et le choix du prolongement ne jouera pas de rôle dans la suite. Comme f est une fonction continue bornée sur $\mathfrak{X}$, par hypothèse, $\mu_n(f) \to \mu(f)$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}|\mu_n(f) - \mu(f)| &\geq |\mu_n(f_n) - \mu(f_n)| - |(\mu_n - \mu)((f - f_n)1_{\mathfrak{X}\setminus K})| - |(\mu_n - \mu)((f - f_n)1_K)| \\ &\geq \varepsilon - 2(\mu_n(\mathfrak{X} \setminus K) + \mu(\mathfrak{X} \setminus K)) - 2\|f - f_n\|_{\infty,K} \geq \frac{\varepsilon}{3} - 2\|f - f_n\|_{\infty,K}.\end{aligned}$$

Comme $\|f - f_n\|_{\infty,K} \to 0$, on conclut que $\liminf_{n\to\infty} |\mu_n(f) - \mu(f)| \geq \frac{\varepsilon}{3} > 0$, d'où une contradiction. Ceci démontre l'implication $(\mu_n \rightharpoonup \mu) \Rightarrow (d_{\mathrm{FM}}(\mu_n, \mu) \to 0)$.

4. Considérons la fonction $f(x) = \max(-1, 1 - \frac{2}{\varepsilon}\, d(x, F))$. C'est le maximum de deux fonctions $\frac{2}{\varepsilon}$-lipschitziennes, donc elle est elle-même $\frac{2}{\varepsilon}$-lipschitzienne. Par ailleurs, ses valeurs sont par définition comprises entre 1 et -1, donc $\|f\|_\infty \leq 1$. On conclut que $f \in \mathrm{BL}(\mathfrak{X})$ et que

$$\|f\|_{\mathrm{BL}} \leq 1 + \frac{2}{\varepsilon}.$$

Si $x \in F$, alors $d(x, F) = 0$, donc $f(x) = 1$. Si $x \notin F^\varepsilon$, alors $d(x, F) \geq \varepsilon$ et $1 - \frac{2}{\varepsilon}\, d(x, F) \leq -1$, donc $f(x) = -1$. On a donc bien construit une fonction vérifiant les hypothèses attendues.

On écrit alors

$$\left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right) d_{\mathrm{FM}}(\mu, \nu) \geq |(\mu - \nu)(f)| \geq (\mu - \nu)(f) = (\mu - \nu)(f + 1) \geq 2(\mu(F) - \nu(F^\varepsilon)) \geq 2\varepsilon.$$

5. Notons que la distance de Lévy–Prohorov peut être définie comme un infimum sur les parties fermées au lieu des parties boréliennes. En effet, si la borne $\mu(A) \leq \nu(A^\varepsilon) + \varepsilon$ est vraie pour toute partie borélienne, alors *a fortiori* elle est vraie pour les fermés. Réciproquement, si elle est vraie pour les fermés, alors étant donné un borélien arbitraire A, on a

$$\mu(A) \leq \mu(\overline{A}) \leq \nu\left((\overline{A})^\varepsilon\right) + \varepsilon = \nu(A^\varepsilon) + \varepsilon$$

car $(\overline{A})^\varepsilon = A^\varepsilon$ pour tout A et tout $\varepsilon > 0$.

Fixons $\varepsilon < d_{\mathrm{LP}}(\mu, \nu) \leq 1$. Ceci implique l'existence d'un fermé F tel que $\mu(F) > \nu(F^\varepsilon) + \varepsilon$, donc d'après la question précédente,

$$d_{\mathrm{FM}}(\mu, \nu) \geq \frac{2\varepsilon}{1 + \frac{2}{\varepsilon}} = \frac{2\varepsilon^2}{2 + \varepsilon} \geq \frac{2\varepsilon^2}{3}.$$

Par passage à la borne supérieure dans le terme de droite, on conclut que $d_{\mathrm{FM}}(\mu,\nu) \geq \frac{2\,(d_{\mathrm{LP}}(\mu,\nu))^2}{3}$.

6. Si (X,Y) est un couplage et $\mathbb{P}[d(X,Y) \geq \varepsilon] \leq \varepsilon$, alors pour tout borélien $A \subset \mathfrak{X}$,

$$\begin{aligned}\mu(A) = \mathbb{P}[X \in A] &\leq \mathbb{P}[d(X,Y) \geq \varepsilon] + \mathbb{P}[X \in A \text{ et } d(X,Y) \leq \varepsilon]\\ &\leq \varepsilon + \mathbb{P}[X \in A \text{ et } Y \in A^{\varepsilon}] \leq \varepsilon + \nu(A^{\varepsilon}),\end{aligned}$$

donc $d_{\mathrm{LP}}(\mu,\nu) \leq \varepsilon$.

7. Soit (X,Y) un couplage optimal, f telle que $\|f\|_{\mathrm{BL}} \leq 1$, et $\varepsilon > d_{\mathrm{LP}}(\mu,\nu)$. On calcule

$$\begin{aligned}|(\mu-\nu)(f)| = |\mathbb{E}[f(X)-f(Y)]| &\leq 2\,\mathbb{P}[d(X,Y) \geq \varepsilon]\,\|f\|_\infty + \mathbb{E}[|f(X)-f(Y)|\,1_{d(X,Y)<\varepsilon}]\\ &\leq 2\varepsilon\,\|f\|_\infty + \varepsilon\,\|f\|_L \leq 2\varepsilon\,\|f\|_{\mathrm{BL}} \leq 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Par passage aux bornes, on conclut que $d_{\mathrm{FM}}(\mu,\nu) \leq 2\,d_{\mathrm{LP}}(\mu,\nu)$.

Corrigé exercice 2.

1. Comme $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^h$ est polonais, μ est tendue et on peut trouver une partie K bornée dans $\mathbb{R}^h$, disons $K = [-M,M]^h$, telle que $\mu(K) \geq 1-\varepsilon$. Cette partie se découpe en $(\lceil \frac{2M}{\varepsilon} \rceil)^h$ hyperrectangles dont les dimensions sont plus petites que ε, et donc dont les diamètres euclidiens sont plus petits que $\sqrt{h}\,\varepsilon$. Par conséquent,

$$N(\mu,\sqrt{h}\,\varepsilon) \leq \left(\frac{2M}{\varepsilon}+1\right)^h \quad ; \quad -\frac{\log N(\mu,\sqrt{h}\,\varepsilon)}{\log(\sqrt{h}\,\varepsilon)} \leq h\,\frac{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+\log(2M+\varepsilon)}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)-\frac{\log h}{2}} \to_{\varepsilon\to 0} h.$$

Ainsi, sans hypothèse supplémentaire sur μ, on a toujours $H(\mathfrak{X},d,\mu) \leq h$. Supposons maintenant μ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. La quantité $H(\mathfrak{X},d,\mu)$ est bien sûr croissante en $\mathfrak{X}$ et en μ, donc pour montrer que $H(\mathfrak{X},d,\mu) \geq h$, il suffit de considérer une sous-partie $S \subset \mathfrak{X}$ et la restriction de μ à S. On prend $S = f^{-1}([t,+\infty))$, où f est la densité de μ et où t est choisi strictement positif, mais de sorte que $\mu(S) \geq \frac{1}{2}$; c'est toujours possible. Si S_i est une partie de diamètre plus petit que ε, alors

$$\mu(S) \leq t \int_{|s|\leq\varepsilon,\ s\in\mathbb{R}^h} ds \leq C(h)\,t\,\varepsilon^h,$$

où $C(h)$ est le volume de boule unité de $\mathbb{R}^h$. Le nombre minimal de parties nécessaires pour recouvrir S à ε près est donc au moins égal à

$$\frac{\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}{C(h)\,t\,\varepsilon^h} \leq N(S,\mu_{|S},\varepsilon) \leq N(\mathfrak{X},\mu,\varepsilon).$$

En prenant les logarithmes de cette inégalité, on obtient bien $H(S,d_{|S},\mu_{|S}) \geq h$, et donc $H(\mathfrak{X},d,\mu) = h$. Bien sûr, si on ne suppose plus μ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, alors on peut avoir une dimension entropique plus petite que h, en prenant par exemple une mesure μ supportée par un sous-espace ou une sous-variété de dimension $h-1$.

2. Par Cauchy–Schwarz, on peut écrire :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^m |\mu_n(S_i)-\mu(S_i)|\right] \leq \sqrt{m}\,\sqrt{\sum_{i=1}^m \mathbb{E}[|\mu_n(S_i)-\mu(S_i)|^2]}.$$

Notons que $\mathbb{E}[\mu_n(S_i)] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mathbb{E}[1_{X_j \in S_i}] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mu(S_i) = \mu(S_i)$, donc $\mathbb{E}[|\mu_n(S_i) - \mu(S_i)|^2] = \mathrm{var}(\mu_n(S_i))$. Cette variance est simplement :

$$\mathrm{var}(\mu_n(S_i)) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^m \mathrm{var}(1_{X_j \in S_i}) = \frac{\mu(S_i)(1-\mu(S_i))}{n} \leq \frac{\mu(S_i)}{n}.$$

On conclut que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^m |\mu_n(S_i) - \mu(S_i)|\right] \leq \sqrt{m}\sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{\mu(S_i)}{n}} \leq \sqrt{\frac{m\,\mu(T)}{n}}.$$

3. On fixe $\eta > 0$, et pour $\varepsilon > 0$, une famille $(S_i^\varepsilon)_{i \leq N(\mu,\varepsilon)}$ qui recouvre $\mathfrak{X}$ à un ensemble de μ-mesure plus petite que ε près, les S_i^ε étant de diamètre inférieur à ε. On peut supposer sans perte de généralité que les parties S_i^ε sont disjointes, quitte à prendre des parties plus petites. On note $R^\varepsilon = \mathfrak{X} \setminus \bigsqcup_{i=1}^{N(\mu,\varepsilon)} S_i^\varepsilon$. Considérons alors un borélien A. On a

$$\begin{aligned}\mu_n(A) &= \sum_{\substack{i \leq N(\mu,\varepsilon)\\ A \cap S_i^\varepsilon \neq \emptyset}} \mu_n(A \cap S_i^\varepsilon) + \mu_n(A \cap R^\varepsilon) \leq \sum_{\substack{i \leq N(\mu,\varepsilon)\\ A \cap S_i^\varepsilon \neq \emptyset}} \mu_n(S_i^\varepsilon) + \mu_n(R^\varepsilon)\\ &\leq \sum_{\substack{i \leq N(\mu,\varepsilon)\\ A \cap S_i^\varepsilon \neq \emptyset}} \mu(S_i^\varepsilon) + \mu(R^\varepsilon) + \sum_{i=1}^{N(\mu,\varepsilon)} |(\mu_n - \mu)(S_i^\varepsilon)| + |(\mu_n - \mu)(R^\varepsilon)|\\ &\leq \mu(A^\varepsilon) + \varepsilon + \sum_{i=1}^{N(\mu,\varepsilon)} |(\mu_n - \mu)(S_i^\varepsilon)| + |(\mu_n - \mu)(R^\varepsilon)|.\end{aligned}$$

Comme c'est vrai pour tout A, on obtient

$$d_{\mathrm{LP}}(\mu_n, \mu) \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{N(\mu,\varepsilon)} |(\mu_n - \mu)(S_i^\varepsilon)| + |(\mu_n - \mu)(R^\varepsilon)|.$$

En prenant l'espérance et en utilisant la question précédente, on en déduit :

$$\mathbb{E}[d_{\mathrm{LP}}(\mu_n, \mu)] \leq \varepsilon + \sqrt{\frac{N(\mu,\varepsilon)}{n}}.$$

Par définition de la dimension entropique, pour ε assez petit, $N(\mu,\varepsilon) \leq \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{h+\eta}$, donc

$$\mathbb{E}[d_{\mathrm{LP}}(\mu_n, \mu)] \leq \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^{(h+\eta)/2} n^{1/2}}.$$

On choisit alors un ε optimal en fonction de n, supposant n assez grand : $\varepsilon = n^{-\frac{1}{h+2+\eta}}$. Ceci donne $\mathbb{E}[d_{\mathrm{LP}}(\mu_n, \mu)] \leq 2\,n^{-\frac{1}{h+2+\eta}}$, et comme c'est vrai pour tout $\eta > 0$ et n assez grand, on peut retirer le facteur 2.

Corrigé exercice 3.

1. On sait que l'espérance d'un processus de Poisson composé d'intensité ν intégrant x est

$$\mathbb{E}[P_t] = t\,\nu(x) = t\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,dx = t.$$

Pour la transformée de Fourier, on a par la formule de Campbell

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi P_t}] = \exp\left(t\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}-1}{x\,\mathrm{e}^x}\,dx\right).$$

Notons $L(\xi)$ l'intégrale dans l'exponentielle. C'est une fonction qui vaut 0 en $\xi = 0$, et qui est infiniment dérivable par rapport à ξ, de dérivée

$$L'(\xi) = \int_0^\infty \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\xi-1)x}\,dx.$$

En effet, le terme $\mathrm{e}^{-x}\,dx$ permet de dominer toutes les intégrales de dérivées et d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale. En dérivant une seconde fois et en faisant une intégration par parties, on obtient

$$L''(\xi) = \int_0^\infty -x\,\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\xi-1)x}\,dx = \frac{1}{\mathrm{i}\xi-1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{(\mathrm{i}\xi-1)x}\,dx = \frac{\mathrm{i}L'(\xi)}{1-\mathrm{i}\xi},$$

d'où $L'(\xi) = \frac{C}{1-\mathrm{i}\xi}$. Comme $L'(0) = \mathrm{i}$, on obtient $L'(\xi) = \frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}\xi}$. Si $F(t,\xi) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi P_t}]$, alors

$$\frac{\partial F(t,\xi)}{\partial \xi} = t\,L'(\xi)\,F(t,\xi) = \frac{\mathrm{i}t}{1-\mathrm{i}\xi}\,F(t,\xi),$$

d'où $F(t,\xi) = \frac{1}{(1-\mathrm{i}\xi)^t}$.

2. La transformée de Fourier $G(\alpha,\xi)$ de la loi $\Gamma(\alpha,1)$ s'écrit :

$$G(\alpha,\xi) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\Gamma(\alpha,1)(dx) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\xi-1)x}\,dx.$$

On peut de nouveau dériver par rapport à ξ pour obtenir :

$$\frac{\partial G(\alpha,\xi)}{\partial \xi} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \mathrm{i}x^\alpha\,\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\xi-1)x}\,dx = \frac{\mathrm{i}\alpha}{1-\mathrm{i}\xi}\,G(\alpha,\xi),$$

d'où, pour les mêmes raisons que précédemment, $G(\alpha,\xi) = \frac{1}{(1-\mathrm{i}\xi)^\alpha}$. On en déduit que la loi $\Gamma(t,1)$ et la loi de P_t ont les mêmes transformées de Fourier, donc sont égales.

3. Si $t \leq 1$, alors la densité $f_t(x) = \frac{1_{x>0}}{\Gamma(t)}\,x^{t-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$ est décroissante sur $[0,+\infty)$, et constante sur $(-\infty,0]$, donc la loi de P_t a son front en 0. Si $t > 1$, alors la densité $f_t(x)$ est constante sur $(-\infty,0]$, puis croissante sur $[0,t-1]$, car

$$\frac{df_t}{dx}(x) = \frac{1_{x>0}(t-1-x)\,x^{t-2}\,\mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(t)}.$$

Elle est ensuite décroissante sur $[t+1,+\infty)$. La loi de P_t a donc un front en $t-1$ si $t > 1$. Ainsi, le front de la loi de P_t reste d'abord constant à 0, puis avance linéairement à partir du temps 1.