Durée : 3 heures. Tous les documents sont autorisés. Toutes les réponses doivent être justifiées, et la rédaction sera prise en compte ; il est permis d'utiliser tout résultat qui a été démontré dans le cours ou qui a été énoncé dans une question précédente, même si cette question n'a pas été traitée. Dans tout le sujet, si λ est une partition d'entiers de longueur ℓ, on convient que $\lambda_j = 0$ pour $j > \ell$.

Longueur du plus long sous-mot croissant d'un mot aléatoire. Dans tout le problème, $N \geq 1$ est un entier fixé, et $w^{(n)} = w_1 w_2 \dots w_n$ est un mot aléatoire dont les lettres sont choisies indépendamment et uniformément dans $[\![1, N]\!]$. On rappelle que l'algorithme de Robinson–Schensted établit une bijection entre l'ensemble $[\![1, N]\!]^n$ des mots possibles de longueur n, et l'ensemble des paires (P, Q) de tableaux de même forme λ, avec λ partition de taille n, P tableau semistandard à entrées plus petites que N (remplissage des cases du diagramme de λ par des entiers dans $[\![1, N]\!]$, croissant au sens large suivant les lignes et au sens strict suivant les colonnes), et Q tableau standard (remplissage des cases du diagramme de λ par les entiers de 1 à n, strictement croissant suivant les lignes et les colonnes). Si $\lambda(w)$ est la forme de la paire $(P(w), Q(w))$ associée à un mot w, alors sa première ligne $(\lambda(w))_1$ est égale à la longueur d'un plus long sous-mot croissant au sens large de w, ce qu'on notera plus simplement $\ell(w)$.

1. Illustrer ce qui précède lorsque $w = 164531254$.

L'objectif du problème est d'établir l'inégalité élémentaire suivante, due à O'Donnell et Wright (2016) :

$$\mathbb{E}[\ell(w^{(n)})] \leq \frac{n}{N} + 2\sqrt{n}.$$

2. On note $w^{(n-1)} = w_1 w_2 \dots w_{n-1}$ le début du mot aléatoire $w^{(n)}$. Montrer que

$$\mathbb{E}[\ell(w^{(n)})] - \mathbb{E}[\ell(w^{(n-1)})] = \mathbb{P}[\text{l'entier } n \text{ apparaît sur la première ligne de } Q(w^{(n)})].$$

On admet le résultat suivant, qui est une conséquence de la dualité de Schur–Weyl : si $\mathfrak{S}(n)$ agit sur l'espace $(\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$ par permutations des termes d'un n-tenseur, alors la représentation correspondante de $\mathfrak{S}(n)$ se décompose comme suit :

$$(\mathbb{C}^N)^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda \text{ partition de taille } n} c(\lambda, N)\, S^\lambda,$$

où S^λ désigne la représentation irréductible de $\mathfrak{S}(n)$ de type λ, et la multiplicité $c(\lambda, N)$ est le nombre de tableaux semistandards de forme λ et à entrées dans $[\![1, N]\!]$. Dans ce qui suit, on n'utilisera pas la représentation $(\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$, mais uniquement son caractère, dont on admet qu'il est donné par la formule :

$$\mathrm{ch}(\sigma) = N^{\text{nombre de cycles de } \sigma}.$$

3. En utilisant la formule de Frobenius–Schur, montrer que $c(\lambda, N) = s_\lambda(1, 1, \dots, 1) = s_\lambda(1^{(N)})$, où s_λ est la fonction de Schur de type λ, et $1^{(N)}$ désigne une suite avec N termes égaux à 1.

4. Soit μ une partition de taille $n-1$, et μ^+ la partition de taille n obtenue en ajoutant 1 à la première part de μ. Montrer que

$$\mathbb{P}[\lambda(w^{n-1})=\mu]=\frac{(\dim\mu)\,s_\mu(1^{(N)})}{N^{n-1}};$$

$$\mathbb{P}[\text{l'entier } n \text{ apparaît sur la première ligne de } Q(w^{(n)})\mid\lambda(w^{n-1})=\mu]=\frac{s_{\mu^+}(1^{(N)})}{N\,s_\mu(1^{(N)})},$$

où $\dim\mu$ désigne la dimension de la représentation irréductible de $\mathfrak{S}(n-1)$ de type μ.

Spécialisation principale des fonctions de Schur. Soit $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell)$ une partition de longueur ℓ. On rappelle que si $X=\{x_1,\ldots,x_N\}$ est un ensemble fini de variables ou de nombres réels avec $N\geq\ell$, alors

$$s_\lambda(x_1,\ldots,x_N)=\frac{a_{\lambda+\rho}(x_1,\ldots,x_N)}{a_\rho(x_1,\ldots,x_N)}$$

avec $\rho=(N-1,N-2,\ldots,0)$ et $a_\mu(x_1,\ldots,x_N)=\det((x_i)^{\mu_j})_{1\leq i,j\leq N}$ si μ est une suite d'entiers de longueur N. L'objectif de cette partie est de calculer $s_\lambda(1,q,q^2,q^3,\ldots)$, la suite des puissances de q étant infinie, et q étant un réel positif dans l'intervalle ouvert $(0,1)$.

5. Expliquer pourquoi la quantité $s_\lambda(1,q,q^2,q^3,\ldots)$ est bien définie pour $0<q<1$, et pourquoi c'est la limite lorsque N tend vers l'infini de $s_\lambda(1,q,\ldots,q^{N-1})$.

6. Montrer que pour toute suite décroissante d'entiers μ de longueur N,

$$a_\mu(1,q,\ldots,q^{N-1})=q^{b(\mu)}\prod_{1\leq i<j\leq N}(1-q^{\mu_i-\mu_j})\quad\text{avec } b(\mu)=\sum_{i=1}^{\ell(\mu)}(i-1)\mu_i.$$

   On pourra reconnaître un déterminant de Vandermonde.

7. Soit λ une partition d'entiers, $m=\lambda_1$ et $N\geq\ell(\lambda)=\lambda'_1$. Montrer que

$$[\![1,m+N]\!]=\{\lambda'_j+m-j,\ 1\leq j\leq m\}\sqcup\{\lambda_1-\lambda_j+j-1,\ 2\leq j\leq N+1\},$$

   les deux ensembles à droite étant disjoints (indication : faire un dessin). En déduire que

$$\sum_{j=1}^{\lambda_1}q^{h(1,j)}+\sum_{j=2}^{N}q^{\lambda_1-\lambda_j+j-1}=\sum_{j=1}^{\lambda_1+N-1}q^j,$$

   où $h(i,j)$ désigne la longueur d'équerre de la case sur la i-ième ligne et la j-ième colonne du diagramme de Young de λ (dessiné à la française).

8. Avec les mêmes hypothèses concernant λ, montrer que

$$\sum_{\square\in\lambda}q^{h(\square)}+\sum_{1\leq i<j\leq N}q^{\lambda_i-\lambda_j+j-i}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{\lambda_i+N-i}q^j.$$

En écrivant $\prod_{\square\in\lambda}(1-q^{h(\square)}) = \exp(\sum_{\square\in\lambda}\log(1-q^{h(\square)}))$ et en développant en série les logarithmes $\log(1-t) = -\sum_{k\geq 1}\frac{t^k}{k}$, en déduire que :

$$\prod_{\square\in\lambda}(1-q^{h(\square)}) = \frac{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{\lambda_i+N-i}(1-q^j)}{\prod_{1\leq i<j\leq N}(1-q^{\lambda_i-\lambda_j+j-i})}.$$

9. Déduire des questions précédentes les *formules des q-équerres de Stanley* :

$$s_\lambda(1,q,\ldots,q^{N-1}) = q^{b(\lambda)}\prod_{\square\in\lambda}\left(\frac{1-q^{N+c(\square)}}{1-q^{h(\square)}}\right);$$
$$s_\lambda(1,q,q^2,\ldots) = q^{b(\lambda)}\prod_{\square\in\lambda}\left(\frac{1}{1-q^{h(\square)}}\right),$$

où dans la première formule, $c(\square) = j-i$ si $\square$ est la case sur la i-ième ligne et la j-ième colonne du diagramme de λ.

10. En utilisant la formule des équerres classiques, montrer que

$$s_\lambda(1^{(N)}) = \frac{\dim\lambda}{|\lambda|!}\prod_{\square\in\lambda}(N+c(\square)).$$

En déduire que la probabilité conditionnelle de la question 4 se réécrit comme suit :

$$\mathbb{P}[\text{l'entier } n \text{ apparaît sur la première ligne de } Q(w^{(n)}) \mid \lambda(w^{n-1}) = \mu] = \frac{\dim\mu^+}{n\,\dim\mu}\,\frac{N+\mu_1}{N}.$$

Preuve de l'inégalité de O'Donnell–Wright. On note $\delta_n = \mathbb{E}[\ell(w^{(n)}) - \ell(w^{(n-1)})]$.

11. En combinant les résultats des questions 2, 4 et 10, et en utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, montrer que

$$(\delta_n)^2 \leq \frac{1}{n}\sum_{|\mu|=n-1}\frac{\dim\mu^+\,(s_{\mu^+}(1^{(N)}))}{N^n}\,\frac{N+\mu_1}{N}.$$

En déduire que la suite $(\delta_n)_{n\geq 1}$ vérifie pour tout $n\geq 1$ l'inégalité :

$$\delta_n \leq \sqrt{\frac{1}{n}\left(1+\frac{\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n}{N}\right)}.$$

12. Montrer que pour tout $n\geq 1$, $\delta_n \leq \frac{1}{N}+\frac{1}{\sqrt{n}}$. On pourra procéder par récurrence, remarquer que la fonction

$$g:\delta\mapsto\delta-\sqrt{\frac{1}{n}\left(1+\frac{\delta_1+\cdots+\delta_{n-1}+\delta}{N}\right)}$$

est croissante et estimer $g(\frac{1}{N}+\frac{1}{\sqrt{n}})$.

13. Établir l'inégalité énoncée au début du problème concernant $\mathbb{E}[\ell(w^{(n)})]$.

1. L'algorithme RSK appliqué au mot $w = 164531254$ donne les deux tableaux

$$P(w) = \begin{array}{|c|c|c|c|}\cline{1-1} 6 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-3} 3 & 5 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array} \qquad ; \qquad Q(w) = \begin{array}{|c|c|c|c|}\cline{1-1} 6 \\ \cline{1-1} 5 \\ \cline{1-3} 3 & 7 & 9 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 8 \\ \hline \end{array} \quad .$$

La longueur de la première ligne est 4, et c'est bien la longueur d'un plus long sous-mot de w croissant au sens large, par exemple 1455 (prendre les lettres 1, 3, 4 et 8 du mot).

2. Soit μ la partition (aléatoire) de taille $n-1$ associée aux tableaux $P(w^{(n-1)})$ et $Q(w^{(n-1)})$; la part μ_1 est la longueur d'un plus long sous-mot croissant de $w^{(n-1)}$. La partition λ de taille n associée aux tableaux $P(w^{(n)})$ et $Q(w^{(n)})$ est obtenue à partir de μ en ajoutant une case au bord du diagramme. Cette case est ajoutée au bout de la première ligne si et seulement si $Q(w^{(n)})$ a l'entrée n au bout de la première ligne, et également si et seulement si $\lambda_1 - \mu_1 = \ell(w^{(n)}) - \ell(w^{(n-1)}) = 1$. On a donc bien :

$$\mathbb{E}[\ell(w^{(n)}) - \ell(w^{(n-1)})] = \mathbb{P}[\text{l'entier } n \text{ apparaît sur la première ligne de } Q(w^{(n)})].$$

3. On décompose le caractère de la représentation $(\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$ dans la base des caractères irréductibles :

$$N^{\text{nombre de cycles de } \sigma} = \mathrm{ch}(\sigma) = \sum_{|\lambda|=n} c(\lambda, N)\, \mathrm{ch}^\lambda(\sigma).$$

La formule de Frobenius–Schur indique également que pour toute partition d'entiers μ de taille n, $p_\mu(X) = \sum_{|\lambda|=n} \mathrm{ch}^\lambda(\mu)\, s_\lambda(X)$. Réécrivons cette identité avec le type cyclique d'une permutation arbitraire $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$:

$$p_{t(\sigma)}(X) = \sum_{|\lambda|=n} s_\lambda(X)\, \mathrm{ch}^\lambda(\sigma).$$

Si on évalue cette identité de fonctions symétriques en l'alphabet $X = 1^{(N)}$, on obtient :

$$N^{\text{nombre de cycles de } \sigma} = p_{t(\sigma)}(1^{(N)}) = \sum_{|\lambda|=n} s_\lambda(1^{(N)})\, \mathrm{ch}^\lambda(\sigma).$$

Comme les caractères irréductibles forment une base du centre de l'algèbre de $\mathfrak{S}(n)$, ces deux décompositions de la même fonction centrale sont les mêmes, et $c(\lambda, N) = s_\lambda(1^{(N)})$.

4. Pour la première formule, on écrit :

$$\mathbb{P}[\lambda(w^{(n-1)}) = \mu] = \frac{1}{N^{n-1}}\, c(\mu, N)\, \dim \mu$$

puisque l'algorithme RSK établit une bijection entre les mots dont les deux tableaux ont forme μ, et les paires (P, Q) de forme μ avec P semistandard à entrées dans $[\![1, N]\!]$ et Q standard. On a aussi utilisé le fait que le nombre de tableaux standards de forme μ coïncidait avec la dimension de la représentation irréductible de type μ. Pour la seconde formule, remarquons que si l'entier n apparaît sur la première ligne de $Q(w^{(n)})$ et $\lambda(w^{(n-1)}) = \mu$, alors il y a $c(\mu^+, N)$ possibilités pour le tableau $P(w^{(n)})$ (n'importe quel tableau semistandard de forme μ^+), et $\dim \mu$ possibilités pour le tableau $Q(w^{(n)})$ (partant de n'importe quel tableau standard de forme μ, on obtient le tableau $Q(w^{(n)})$ en rajoutant n au bout de la première ligne). Ainsi,

$$\mathbb{P}[\lambda(w^{(n-1)}) = \mu \text{ et } n \text{ apparaît sur la première ligne de } Q(w^{(n)})] = \frac{1}{N^n}\, c(\mu^+, N)\, \dim \mu.$$

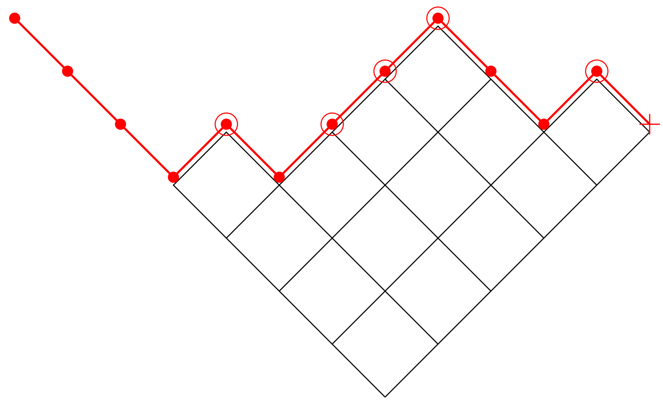
En prenant le ratio des probabilités, on obtient bien :

$$\mathbb{P}[n \text{ apparaît sur la première ligne de } Q(w^{(n)}) \,|\, \lambda(w^{(n-1)}) = \mu] = \frac{c(\mu^+, N)}{N\, c(\mu, N)} = \frac{s_{\mu^+}(1^{(N)})}{N\, s_\mu(1^{(N)})}.$$

5. La série $\sum_{n\geq 0} q^n$ est sommable, ce qui garantit la bonne définition de $p_k(1, q, q^2, \ldots)$ pour tout $k \geq 1$; plus précisément, $p_k(1, q, q^2, \ldots) = \frac{1}{1-q^k}$ pour tout $k \geq 1$. Comme les sommes de puissance engendrent l'algèbre des fonctions symétriques, on peut alors évaluer n'importe quelle fonction symétrique en l'alphabet $(1, q, q^2, \ldots)$ en la décomposant dans la base des produits de sommes de puissance. Par exemple, pour la fonction de Schur s_λ, la formule de Frobenius–Schur donne
$$s_\lambda = \sum_{|\mu|=|\lambda|} \mathrm{ch}^\lambda(\mu)\, \frac{p_\mu}{z_\mu},$$
donc
$$s_\lambda(1, q, q^2, \ldots) = \sum_{|\mu|=|\lambda|} \frac{\mathrm{ch}^\lambda(\mu)}{z_\mu} \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} \frac{1}{1 - q^{\mu_i}}$$
est bien définie. Le même argument permet d'écrire
$$s_\lambda(1, q, \ldots, q^{n-1}) = \sum_{|\mu|=|\lambda|} \frac{\mathrm{ch}^\lambda(\mu)}{z_\mu} \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} \frac{1 - q^{n\mu_i}}{1 - q^{\mu_i}},$$
donc on a bien $s_\lambda(1, q, q^2, \ldots) = \lim_{n\to\infty} s_\lambda(1, q, \ldots, q^{n-1})$.

6. La fonction $a_\mu(1, q, \ldots, q^{n-1})$ est le déterminant de Vandermonde $\det(q^{i\mu_j})_{0\leq i\leq n-1, 1\leq j\leq n} = \prod_{1\leq i<j\leq n}(q^{\mu_j} - q^{\mu_i})$. La formule demandée s'en déduit en mettant en facteur q^{μ_j} dans chaque terme $q^{\mu_j} - q^{\mu_i}$ avec $i < j$ (il y a $j - 1$ facteurs de ce type pour chaque $j \leq n$).

7. Dessinons le diagramme de Young de λ tourné à 45 degrés, de sorte que chaque cellule du diagramme ait des côtés de longueur $\sqrt{2}$. Par exemple, avec $\lambda = (5, 4, 4, 1)$, on obtient :



Considérons comme point base (m,m) le coin à l'extrême droite de ce dessin. Les autres points à coordonnées entières situés sur le bord supérieur de ce dessin (en rouge) ont pour abscisses $m-1, m-2, \ldots, m-(m+n)$. Distinguons deux types parmi ces points :

— les points à gauche desquels on trouve un segment montant (entourés sur le dessin ci-dessus). Il y a un tel point pour chaque colonne $j \in [\![1,m]\!]$ du diagramme de Young, et l'abscisse du point correspondant à la colonne j est $j-\lambda'_j = m-(\lambda'_j+m-j)$.

— les points à droite desquels on trouve un segment descendant. Il y a un tel point pour chaque ligne $j \in [\![2,n+1]\!]$ du diagramme de Young (y compris les lignes vides si $n+1 \geq j > \ell(\lambda)$), et l'abscisse du point correspondant à la ligne j est $\lambda_j - j + 1 = m - (\lambda_1 - \lambda_j + j - 1)$.

Cette dichotomie implique la décomposition de l'intervalle entier $[\![1, m+n]\!]$ en les deux parties indiquées par l'énoncé. Alors,

$$q^{m+n} + \sum_{j=1}^{\lambda_1+n-1} q^j = \sum_{j=1}^{m+n} q^j = \sum_{j=1}^{\lambda_1} q^{\lambda'_j+\lambda_1-j} + \sum_{j=2}^{n+1} q^{\lambda_1-\lambda_j+j-1} = \sum_{j=1}^{\lambda_1} q^{h(1,j)} + \sum_{j=2}^{n} q^{\lambda_1-\lambda_j+j-1} + q^{m+n}$$

d'où la formule sommatoire en retirant le terme q^{m+n}.

8. Pour toute partition λ de longueur plus petite que n, $\sum_{j=1}^{\lambda_1} q^{h(1,j)} + \sum_{1<j\leq n} q^{\lambda_1-\lambda_j+j-1} = \sum_{j=1}^{\lambda_1+n-1} q^j$. En appliquant le résultat à la partition $(\lambda_i, \ldots, \lambda_n)$ de longueur plus petite que $n+1-i$, on obtient :

$$\sum_{j=1}^{\lambda_i} q^{h(i,j)} + \sum_{i<j\leq n} q^{\lambda_i-\lambda_j+j-i} = \sum_{j=1}^{\lambda_i+n-i} q^j.$$

En faisant la somme de ces identités pour $i \leq n$, on obtient

$$\sum_{\square\in\lambda} q^{h(\square)} + \sum_{1\leq i<j\leq n} q^{\lambda_i-\lambda_j+j-i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\lambda_i+n-i} q^j.$$

Alors, suivant les indications de l'énoncé, on obtient

$$\begin{aligned}
\prod_{\square\in\lambda}(1-q^{h(\square)}) &= \exp\left(-\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\sum_{\square\in\lambda} q^{kh(\square)}\right) \\
&= \exp\left(\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\sum_{1\leq i<j\leq n} q^{k(\lambda_i-\lambda_j+j-i)} - \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\lambda_i+n-i} q^{kj}\right) \\
&= \exp\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\lambda_i+n-i}\log(1-q^j) - \sum_{1\leq i<j\leq n}\log(1-q^{\lambda_i-\lambda_j+j-i})\right) \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{\lambda_i+n-i}(1-q^j)}{\prod_{1\leq i<j\leq n}(1-q^{\lambda_i-\lambda_j+j-i})}.
\end{aligned}$$

9. On calcule le rapport de fonctions antisymétriques :

$$\begin{aligned}
s_\lambda(1,q,\ldots,q^{n-1}) = \frac{a_{\lambda+\rho}(1,q,\ldots,q^{n-1})}{a_\rho(1,q,\ldots,q^{n-1})} &= q^{b(\lambda+\rho)-b(\rho)}\,\frac{\prod_{1\leq i<j\leq n}(1-q^{\lambda_i-\lambda_j+j-i})}{\prod_{1\leq i<j\leq n}(1-q^{j-i})} \\
&= q^{b(\lambda)}\,\frac{1}{\prod_{\square\in\lambda}(1-q^{h(\square)})}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=n-i+1}^{n-i+\lambda_i}(1-q^j).
\end{aligned}$$

Le dernier produit double porte en fait seulement sur les indices $i \in [\![1, \ell(\lambda)]\!]$, et si i est fixé, alors

$$\prod_{j=n-i+1}^{n-i+\lambda_i} (1-q^j) = \prod_{j=1}^{\lambda_i} (1-q^{n+j-i})$$

est le produit des termes $1 - q^{n+c(\square)}$ lorsque la case $\square$ parcourt la i-ième ligne de λ. On a donc bien

$$s_\lambda(1, q, \ldots, q^{n-1}) = q^{b(\lambda)} \prod_{\square \in \lambda} \frac{1-q^{n+c(\square)}}{1-q^{h(\square)}},$$

et la formule pour $s_\lambda(1, q, q^2, \ldots)$ s'en déduit en faisant tendre n vers l'infini.

10. Pour tous entiers a, b avec $b \neq 0$, $\lim_{q\to 1} \frac{1-q^a}{1-q^b} = \frac{a}{b}$. Par conséquent, partant de la formule des q-équerres pour $s_\lambda(1, q, \ldots, q^{N-1})$ et faisant tendre q vers 1, on obtient :

$$s_\lambda(1^{(N)}) = \prod_{\square \in \lambda} \frac{N + c(\square)}{h(\square)}.$$

Si $|\lambda| = n$, alors $\dim \lambda = \frac{n!}{\prod_{\square \in \lambda} h(\square)}$, donc la formule ci-dessus se réécrit

$$s_\lambda(1^{(N)}) = \frac{\dim \lambda}{n!} \prod_{\square \in \lambda} (N + c(\square)).$$

En appliquant ce résultat avec $\lambda = \mu$ et $\lambda = \mu^+$, on obtient à partir de la question 4 :

$$\mathbb{P}[n \text{ apparaît sur la première ligne de } Q(w^{(n)}) \,|\, \lambda(w^{(n-1)}) = \mu] = \frac{\dim \mu^+}{nN \dim \mu} \frac{\prod_{\square \in \mu^+}(N + c(\square))}{\prod_{\square \in \mu}(N + c(\square))}.$$

Or, les diagrammes de Young de μ et μ^+ ont les mêmes cases, excepté la case au bout de la première ligne de μ^+, qui a pour contenu $(\mu_1 + 1) - 1 = \mu_1$. Ainsi, le ratio de produits de termes $N + c(\square)$ est égal à $N + \mu_1$.

11. On combine la formule des probabilités totales et l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$\begin{aligned}
(\delta_n)^2 &= \left(\mathbb{P}[n \text{ apparaît sur la première ligne de } Q(w^{(n)})]\right)^2 \\
&= \left(\sum_{|\mu|=n-1} \mathbb{P}[\lambda(w^{(n-1)}) = \mu] \, \mathbb{P}[n \text{ apparaît sur la première ligne de } Q(w^{(n)}) \,|\, \lambda(w^{n-1}) = \mu] \right)^2 \\
&\leq \sum_{|\mu|=n-1} \mathbb{P}[\lambda(w^{(n-1)}) = \mu] \, \mathbb{P}[n \text{ apparaît sur la première ligne de } Q(w^{(n)}) \,|\, \lambda(w^{n-1}) = \mu]^2 \\
&\leq \sum_{|\mu|=n-1} \frac{\dim \mu \, (s_{\mu^+}(1^{(N)}))^2}{N^{n+1} \, s_\mu(1^{(N)})} = \sum_{|\mu|=n-1} \frac{\dim \mu \, (s_{\mu^+}(1^{(N)}))}{N^n} \frac{s_{\mu^+}(1^{(N)})}{N \, s_\mu(1^{(N)})} \\
&\leq \sum_{|\mu|=n-1} \frac{\dim \mu \, (s_{\mu^+}(1^{(N)}))}{N^n} \frac{\dim \mu^+}{n \dim \mu} \frac{N + \mu_1}{N} = \frac{1}{n} \sum_{|\mu|=n-1} \frac{\dim \mu^+ \, (s_{\mu^+}(1^{(N)}))}{N^n} \frac{N + \mu_1}{N}.
\end{aligned}$$

Remarquons que $\frac{\dim \mu^+ \, (s_{\mu^+}(1^{(N)}))}{N^n} = \mathbb{P}[\lambda(w^{(n)}) = \mu^+]$, et que $\frac{N+\mu_1}{N} \leq \frac{N+(\mu^+)_1}{N}$. Par conséquent, la somme ci-dessus est une partie de l'espérance de $\frac{N+\ell(w^{(n)})}{N}$ (la partie correspondant aux cas où

$\lambda(w^{(n)})$ est une partition qui peut s'écrire sous la forme μ^+ avec $|\mu| = n-1$, c'est-à-dire que la première part de $\lambda(w^{(n)})$ est strictement plus grande que la seconde part). On a donc :

$$(\delta_n)^2 \leq \frac{1}{n}\,\frac{N + \mathbb{E}[\ell(w^{(n)})]}{N} = \frac{1}{n}\,\frac{N + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n}{N}.$$

12. On procède par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant évident puisque $\mathbb{E}[\ell(w^{(1)})] = 1 \leq \frac{1}{N} + \frac{1}{\sqrt{1}}$. Si le résultat est vrai jusqu'au rang $n-1$, remarquons que la fonction g indiquée par l'énoncé est croissante, car

$$g'(\delta) = 1 - \frac{1}{2N\sqrt{n\left(1 + \frac{\delta_1+\cdots+\delta_{n-1}+\delta}{N}\right)}} \geq 1 - \frac{1}{2N\sqrt{n}} > 0.$$

Comme $g(\delta_n) \leq 0$, pour montrer que $\delta_n \leq \frac{1}{N} + \frac{1}{\sqrt{n}}$, il suffit de montrer que $g(\frac{1}{N} + \frac{1}{\sqrt{n}}) \geq 0$. Or,

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) &= \frac{1}{N} + \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\frac{1}{n}\left(1 + \frac{\delta_1 + \cdots + \delta_{n-1} + \frac{1}{N} + \frac{1}{\sqrt{n}}}{N}\right)} \\ &\geq \frac{1}{N} + \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\frac{1}{n}\left(1 + \frac{\frac{n}{N} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}}}{N}\right)} \\ &\geq \frac{1}{N} + \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\frac{1}{Nn}\left(N + \frac{n}{N} + 2\sqrt{n}\right)} \end{aligned}$$

car $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}} \leq 2\sqrt{n}$ par comparaison des séries et intégrales. On reconnaît

$$\frac{1}{Nn}\left(N + \frac{n}{N} + 2\sqrt{n}\right) = \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2,$$

donc $g(\frac{1}{N} + \frac{1}{\sqrt{n}}) \geq 0$.

13. On a donc

$$\mathbb{E}[\ell(w^n)] \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{\sqrt{i}}\right) \leq \frac{n}{N} + 2\sqrt{n}.$$