8. Percolation de Bernoulli

Dans ce dernier chapitre, on généralise la construction des graphes d'Erdős–Rényi en fixant à l'avance une structure pour les graphes aléatoires, par exemple une grille. Si $G = (V, E)$ est un graphe fini fixé, le *graph percolé* G_p de paramètre p est le graphe aléatoire :

- avec le même ensemble de sommets V,
- avec chaque arête $e \in E$ conservée avec probabilité p, indépendamment pour chaque arête.

Le graphe d'Erdős–Rényi $\mathrm{G}(n, p)$ est le cas particulier de graphe percolé avec $G = K_n$, le graphe complet à n sommets. Dans ce qui suit, on s'intéressera au cas où

$$G = C_n = [\![-n, n]\!]^2$$

est la grille carrée de côté $2n$, avec (i, j) connecté à (i', j') si et seulement si $|i-i'|+|j-j'| = 1$.

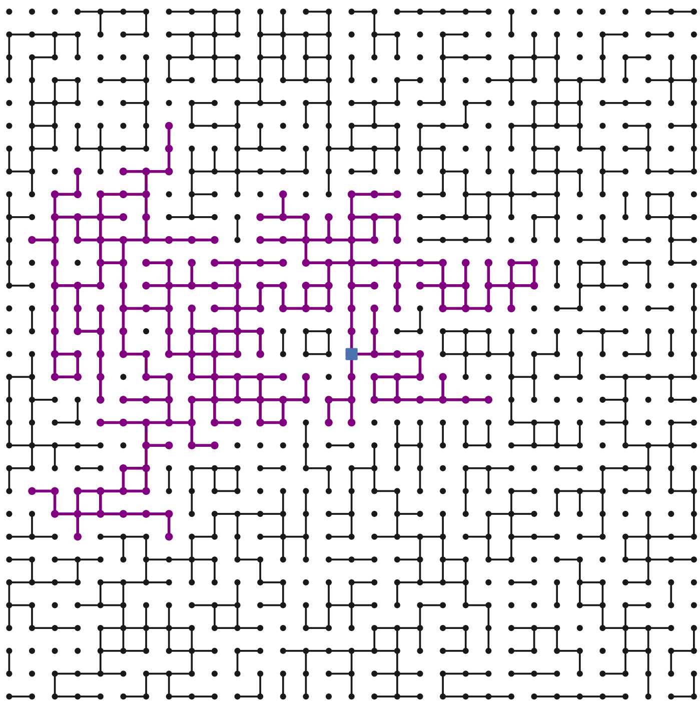

Fig. 8.1. Percolation sur la grille carrée. Ici, $n = 15$ et $p = 0.45$; la composante connexe de (0.0) apparaît en violet.

1. Simulation dans $\mathbb{Z}^2$.

(1) Écrire un programme `percolation(n, p)` qui prend en paramètre une taille n et un paramètre $p \in (0, 1)$, et qui renvoie le graphe aléatoire percolé $C_{n,p}$ (sous la forme d'un graphe `NetworkX`). On pourra faire en sorte que les sommets du graphe soient identifiés par leurs coordonnées dans $\mathbb{Z}^2$ (les sommets d'un graphe `NetworkX` peuvent être n'importe quel objet `Python`, par exemple une paire d'entiers). Écrire un autre

programme `dessin_percolation(n, p)` qui dessine $C_{n,p}$, en respectant la géométrie de la grille $\mathbb{Z}^2$.

(2) Expérimenter les programmes précédents avec $n = 25$ et p dans $[0, 1]$. Commenter les graphes obtenus, en particulier l'aspect de leurs composantes connexes.

(3) Modifier le programme de dessin pour que la composante connexe qui contient le point $(0, 0)$ apparaisse dans une autre couleur. Pour déterminer la composante connexe du centre de la grille, on pourra utiliser la commande `nx.node_connected_component`.

(4) Une quantité importante est la *probabilité de connexion au bord* :

$$\begin{aligned} q_{n,p} &= \mathbb{P}_p\left[(0,0) \leftrightarrow \partial C_n\right] \\ &= \mathbb{P}_p[\text{la composante connexe contenant } (0,0) \text{ touche le bord de la grille carrée } C_n]. \end{aligned}$$

Écrire un programme `proba_connexion(n, p, N)` qui estime cette probabilité sur un échantillon de N simulations de $C_{n,p}$. Tester ce programme avec $n = 30$ et différentes valeurs de p.

(5) En utilisant un couplage approprié des graphes percolés $C_{n,p}$, montrer que $p \mapsto q_{n,p}$ est croissant. En déduire un programme efficace pour dessiner le graphe de $p \mapsto q_{n,p}$. Commenter ce graphe lorsque $n = 50$.

(6) Montrer que $n \mapsto q_{n,p}$ est décroissante.

La dernière question permet de définir sans ambiguïté $q_p = \lim_{n\to\infty} q_{n,p} = \mathbb{P}_p[(0, 0) \leftrightarrow \infty]$: c'est la probabilité pour qu'un chemin partant de 0 aille à l'infini dans le graphe percolé.

2. Transition de phase.

La percolation en dimension 2 (et en fait, en toute dimension $d \geq 2$) subit une *transition de phase* lorsque p augmente, vis-à-vis de la probabilité de connexion à l'infini :

$$\begin{cases} q_p = 0 \text{ si } p < p_c; \\ q_p > 0 \text{ si } p > p_c, \end{cases}$$

avec $p_c \in (0, 1)$ probabilité *critique*.

(1) Conjecturer la valeur de p_c à partir des simulations.

(2) On souhaite montrer que $p_c > 0$: autrement dit, $q_p = 0$ pour p assez petit. Montrer que :

$$q_p \leq p^n \,\#(\text{chemin partant de } (0,0) \text{ et de longueur } n)$$

pour tout $n \geq 1$ (par chemin, on entend une suite de sommets distincts, avec les sommets consécutifs qui sont voisins). En déduire que si $p < \frac{1}{3}$, alors $q_p = 0$. Donner une borne inférieure pour p_c.

(3) On souhaite montrer que $p_c < 1$: autrement dit, $q_p > 0$ pour p assez grand. La percolation de paramètre p dans $\mathbb{Z}^2$ induit une percolation de paramètre $1 - p$ dans le *graphe dual* ${\mathbb{Z}'}^2 = \mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$:

$$\left(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}\right) \leftrightarrow \left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}\right) \text{ dans } {\mathbb{Z}'}^2 \quad \Leftrightarrow \quad (i, j) \not\leftrightarrow (i + 1, j) \text{ dans } \mathbb{Z}^2;$$
$$\left(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}\right) \leftrightarrow \left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}\right) \text{ dans } {\mathbb{Z}'}^2 \quad \Leftrightarrow \quad (i, j) \not\leftrightarrow (i, j + 1) \text{ dans } \mathbb{Z}^2.$$

Autrement dit, on met une arête dans le graphe dual ${\mathbb{Z}'}^2$ si et seulement si elle ne croise pas une arête dans le graphe $\mathbb{Z}^2$. Remarquons que alors si $(0,0)$ n'est pas connecté à l'infini dans $\mathbb{Z}^2$, alors il existe un chemin clos l'entourant dans le graphe dual.

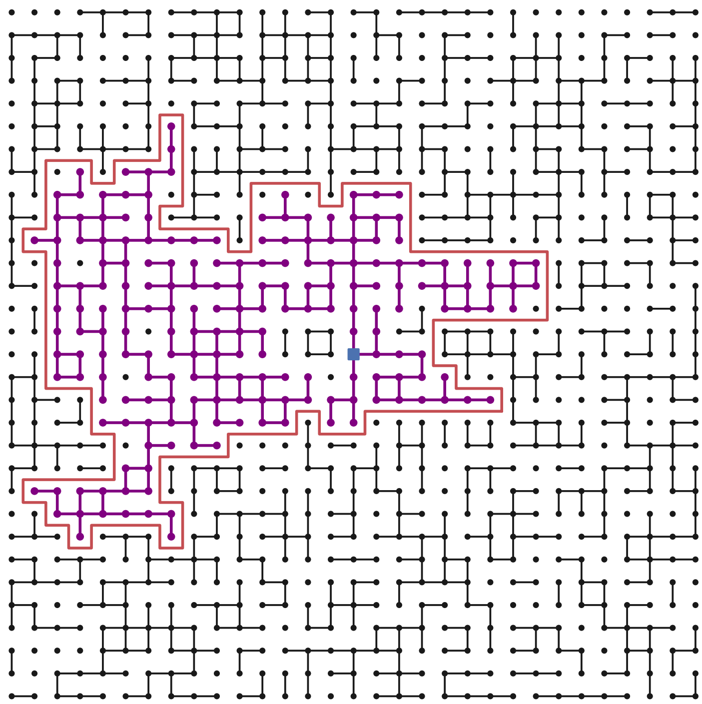

FIG. 8.2. Si $(0,0)$ n'est pas connecté à l'infini dans $(\mathbb{Z}^2)_p = \bigcup_{n=1}^{\infty} \uparrow C_{n,p}$, alors dans le graphe dual $({\mathbb{Z}'}^2)_{1-p}$, il y a un chemin clos entourant $(0,0)$.

À partir de cette observation, montrer que

$$1 - q_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{2n} \,\#(\text{circuit dual entourant } (0,0) \text{ et de longueur } 2n).$$

Montrer que le nombre de circuits entourant $(0,0)$ et de longueur $2n$ est plus petit que

$$n 3^{2n-1}.$$

On pourra remarquer qu'un tel circuit contient un segment $(k+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \leftrightarrow (k+\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$. Conclure.