Examen Modélisation en Probabilités – 10 avril 2025

1. Le sujet comporte deux exercices indépendants.
2. Vous ne pouvez pas vous connecter à votre session personnelle ; vous vous connecterez à la session `mathens` avec le mot de passe `mathens`. **Tous vos fichiers devront être enregistrés dans le dossier "`reMise_copie`" présent sur le bureau. Il faut impérativement inclure votre nom dans le nom des fichiers.**
3. L'idéal est de transmettre l'exportation en `pdf` de votre feuille de calcul (ou alors, la feuille de calcul elle-même, avec le suffixe `.ipynb`).
4. Les réponses aux questions théoriques peuvent être données dans la feuille de calcul (si possible dans des cellules Markdown), ou sur les copies papier.
5. Les graphes doivent avoir un titre et être légendés ; ils doivent être présents, le code qui les engendre ne suffit pas.
6. Pour toutes les questions qui demandent d'écrire un programme, on demande en plus du programme écrit une exécution du dit programme avec des paramètres convenablement choisis.

On rappelle par ailleurs les commandes d'import des bibliothèques adéquates :

```
import math
import numpy as np
import scipy.stats as scs
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.random as random
```

Exercice 1 — Une récurrence stochastique.

Soit $A_0, A_1, \ldots$ une suite de variables aléatoires i.i.d (indépendantes et identiquement distribuées). On définit une suite $Y_0, Y_1, \ldots$ par la récurrence suivante :

$$Y_0 = 1, \qquad Y_{n+1} = A_n Y_n + 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On s'intéresse au comportement en temps long de cette suite.

1. Définir une fonction Python `rec(mu, sigma, N)` qui retourne une réalisation de $(Y_0, \ldots, Y_N)$, lorsque $A_n = \exp(G_n)$ avec les G_n qui suivent la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de densité

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

   On rappelle que la commande `scs.norm.rvs(loc=mu, scale=sigma, size=N)` engendre N variables gaussiennes indépendantes de moyenne μ et de variance σ^2.

2. (a) Engendrer 5 réalisations indépendantes de $(Y_0, \ldots, Y_N)$ pour $(\mu, \sigma, N) = (1, 1, 500)$. Tracer sur un graphe Y_n en fonction de n (on superposera les 5 tracés, un par réalisation). Faire la même chose sur un autre graphe, mais cette fois pour $\log_{10} Y_n$ en fonction de n, en superposant les tracés des 5 réalisations (pour le tracé de $\log_{10} Y_n$, on pourra utiliser la commande `plt.yscale ('log')`).

   (b) Que dire du comportement presque sûr de $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ pour $\mu = 1$?

3. Reprendre la question précédente (simulation et estimation du comportement limite) dans le cas $(\mu, \sigma, N) = (-1, 1, 500)$.

4. On fixe désormais $(\mu, \sigma) = (-1, 1)$. On pose

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{Y_k \leq x}.$$

Tracer 30 réalisations de $\hat{F}_n(2)$ en fonction de n pour $0 \leq n \leq N = 10\,000$ (superposer les 30 tracés). Commenter ce tracé.

5. Étudier l'asymptotique de la fonction $\hat{F}_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini (on pourra faire calculer puis représenter $\hat{F}_n(x)$ pour de grandes valeurs de n).

6. Superposer sur un même graphique la fonction $\hat{F}_n(x)$ pour n grand (par exemple, $n = 10\,000$) et la fonction de répartition empirique d'un échantillon de 1000 réalisations indépendantes de la variable Y_n (pour le même n grand). Commenter ce graphique.

Exercice 2 — Une loi différente.

Le but de cet exercice est d'étudier la loi de la série aléatoire

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} B_n 2^{-n},$$

où $B_1, B_2, \ldots$ est une suite de v.a. indépendantes de loi Bernoulli de paramètre p.

1. Écrire un programme `simuleserie(D, p, N)` qui simule N copies indépendante de la v.a.

$$X_D = \sum_{n=1}^{D} B_n 2^{-n},$$

où $B_1, B_2, \ldots$ est une suite de v.a. indépendantes de loi Bernoulli de paramètre p.

2. On pose $D = 30$, $N = 10000$. Pour chaque $p \in \{\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}\}$, tracer la fonction de répartition empirique de X_D obtenue à partir d'un échantillon de N simulations (on superposera les 5 tracés de fonction de répartition).

3. Décrire la forme des fonctions de répartition. Quelle loi reconnaît-on pour $p = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$?

4. Pour $p = \frac{1}{2}$, établir rigoureusement la convergence en loi de X_D, $D \to +\infty$ vers la loi identifiée dans la question précédente.