TP3 : Phénomènes de convergence

7 Approximation d'une loi de Poisson par une loi binomiale

On rappelle le résultat suivant :

Théorème 2. *Si $\mu > 0$, on considère pour tout entier $n > \mu$ une variable aléatoire X_n de loi binomiale $\mathcal{B}(n, \mu/n)$. Alors, X_n converge en loi lorsque n tend vers l'infini vers une loi de Poisson de paramètre μ. Ceci veut dire que pour tout k dans $\mathbb{N}$,*

$$\mathbb{P}(X_n = k) \longrightarrow_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!}.$$

Exercice 11. —

1. Écrire un programme `binomiale(n, p)` qui simule une variable aléatoire binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ (on pourra utiliser le fait qu'il s'agit de la loi de la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes).

2. Écrire un programme `convergence_vers_poisson(N, mu, n)` qui :

   (a) Construit un échantillon $X_1, X_2, \ldots, X_N$ de variables aléatoires de loi $\mathcal{B}(n, \mu/n)$.

   (b) Trace le diagramme en bâtons de la loi empirique de cette échantillon (c'est-à-dire qu'il doit y avoir un bâton au-dessus de chaque valeur $k \in \mathbb{N}$ possible, de hauteur égale à la proportion des X_i dans cet échantillon égaux à k). Autrement dit, on représente la fonction

   $$f(k) = \frac{\mathrm{Card}(\{1 \leqslant i \leqslant N : X_i = k\})}{N}.$$

   On se donnera auparavant un seuil K sur les valeurs et on ne représentera ces diagrammes en bâtons que pour $k \leqslant K$.

   (c) Superpose à ce tracé le diagramme en bâtons de la loi de Poisson de paramètre μ.

3. Utiliser ce programme pour illustrer la convergence expliquée dans le théorème (essayer par exemple avec $n = 100$, $N = 5000$, $\mu = 2$).

8 Approximation d'une loi exponentielle par une loi géométrique

On rappelle le résultat suivant :

Théorème 3. *Si $\mu > 0$, on considère pour tout entier $n > \mu$ une variable aléatoire de loi géométrique $\mathcal{G}(\mu/n)$. Alors, $\frac{X_n}{n}$ converge en loi lorsque n tend vers l'infini vers une loi exponentielle $\mathcal{E}(\mu)$.*

Exercice 12. —

1. Écrire un programme `geometrique(p)` qui simule une variable aléatoire géométrique $\mathcal{G}(p)$ (on pourra utiliser le fait qu'il s'agit de la loi de la première apparition d'un 1 dans une suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p).

2. Écrire un programme `convergence_vers_exp(N, mu, n)` qui :

- Construit un échantillon $\frac{1}{n}X_1, \frac{1}{n}X_2, \ldots, \frac{1}{n}X_N$ de variables aléatoires indépendantes avec X_i de loi $\mathcal{G}(\mu/n)$.
- Trace la fonction de répartition empirique de cette échantillon.
- Superpose à ce tracé la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre μ.

3. Utiliser ce programme pour illustrer la convergence expliquée dans le théorème (essayer par exemple avec $n = 100$, $N = 5000$, $\mu = 0.5$).

9 Loi des grands nombres

On rappelle le résultat suivant :

Théorème 4. *Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de loi intégrable. Alors, on a presque sûrement :*

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \longrightarrow_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_1].$$

Exercice 13. —

1. Écrire un programme `exponentielle(mu)` qui simule une variable aléatoire exponentielle $\mathcal{E}(\mu)$.
2. Écrire un programme `grands_nombres_expo(N, mu)` qui construit un échantillon $X_1, X_2, \ldots, X_N$ de variables aléatoires de loi $\mathcal{E}(\mu)$ et indépendantes, puis trace la fonction
$$f : n \in \{1, \ldots, N\} \mapsto \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$
3. Utiliser ce programme pour illustrer la convergence expliquée dans le théorème.

10 Moyennes empiriques de variables de lois de Cauchy

Exercice 14. —

1. Écrire un programme `cauchy()` qui simule une variable aléatoire de Cauchy, c'est-à-dire de loi de densité $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.
2. Écrire un programme `test_cauchy(N)` qui construit un échantillon $X_1, X_2, \ldots, X_N$ de variables aléatoires de Cauchy indépendantes, puis trace la fonction
$$f : n \in \{1, \ldots, N\} \mapsto \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$
Qu'observez-vous ?
3. On note μ_n la loi de $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$, où les X_i sont des variables aléatoires de Cauchy indépendantes. Les questions suivantes ont pour but de comprendre ce à quoi ressemble μ_n et sa fonction de répartition F_n (à la fin on testera pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 10$). Écrire un programme `moyenne_cauchy(n)` qui renvoie une variable Z qui a pour loi μ_n.
4. Écrire un programme `loi_empirique_moyenne_cauchy(N, n)` qui construit un échantillon $Z_1, \ldots, Z_N$ de variables aléatoires indépendantes de loi μ_n, puis trace la fonction de répartition empirique $(\widehat{F_n})_N$ des Z_i (qui doit donc être proche de F_n lorsque N est grand).
5. Utiliser ce programme pour dessiner sur un même graphique des versions approchées de F_1, F_2 et F_{10}. Que conjecturez-vous sur la loi de $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ en fonction de n ? Superposer à ce graphique la fonction de répartition de la loi que vous conjecturez pour vérifier votre hypothèse.