TP4 : Limite en loi et limite presque sûre

Exercice 15. — Le but de cet exercice est d'illustrer la convergence en loi des sommes précédentes, mais cette fois-ci avec une normalisation différente.

1. On note $S_k = X_1 + \cdots + X_k$. Tirer un échantillon $(X_1, \ldots, X_N)$ de variables aléatoires de loi uniforme de taille $N = 10000$ sur $[0; 1]$, puis tracer le graphique donnant

$$n \mapsto Z_n := \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} = \sqrt{\frac{n}{\mathrm{Var}(X_1)}} \left(\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1]\right), \quad n \in \{1, \ldots, N\}.$$

   Est-ce que la suite (aléatoire) Z_n converge ?

2. Simuler M réalisations indépendantes de la variable aléatoire Z_N avec $N \in \{10, 100, 10\,000\}$, et tracer les fonctions de répartition empiriques associées pour $M \in \{100, 1000, 10\,000\}$. Sur le même tracé, faire apparaître la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

   A-t-on convergence de la loi de Z_N pour N grand ?

Exercice 16. — Le but de cet exercice est de détailler à nouveau une convergence en loi, cette fois-ci pour le maximum d'un échantillon de variables aléatoires.

1. Tirer un échantillon $(X_1, \ldots, X_N)$ de variables de loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. On pourra utiliser la commande `scipy.stats.expon.rvs`. On pose $L_k := \max\{X_j,\, 1 \leq j \leq k\}$. Tracer le graphique donnant

$$k \mapsto \frac{L_k}{\log k}, \quad k \in \{2, \ldots, N\}.$$

   Tracer plusieurs telles trajectoires. A-t-on convergence presque sûre ?

2. Tracer le graphique donnant

$$k \mapsto L_k - \log k, \quad k \in \{2, \ldots, N\}.$$

   Tracer plusieurs telles trajectoires. A-t-on encore convergence presque sûre ?

3. Répéter M fois l'opération et tracer la fonction de répartition empirique de la variable $L_N - \log N$, pour $N \in \{10, 100, 1\,000\}$ et $M \in \{100, 1000, 10\,000\}$.

4. Calculer $\mathbb{P}(L_N \leq t)$ et en déduire la valeur de

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(L_N \leq \log N + t).$$

5. Superposer cette fonction de répartition (de la loi dite de Gumbel) aux graphes de la question 3.