Probabilités discrètes et dénombrement S6 Polytech

1. **Warm-up.** Dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$, à quelles conditions un événement A peut-il être indépendant de lui-même ?

2. **Belote.** Un jeu de belote est constitué de 32 cartes, avec dans chaque couleur les huit cartes du 7 à l'as. Calculer le nombre de mains de huit cartes qui contiennent :
   (a) trois cartes consécutives dans la couleur coeur ;
   (b) cinq cartes consécutives dans l'une des quatre couleurs ;
   (c) trois cartes consécutives dans l'une des quatre couleurs ;
   (d) quatre cartes de même valeur (par exemple 4 as) ;
   (e) exactement 4 cartes $\heartsuit$ et 3 valets V ?

3. **Poker.** Au cours d'une partie de poker, on distribue à un joueur 5 cartes d'un jeu de 52 cartes. Rappeler la formule pour le nombre de telles mains de 5 cartes. Calculer les probabilités d'avoir :
   (a) une paire (deux cartes de même niveau) ;
   (b) deux paires (deux fois deux cartes de même niveau, mais pas un carré) ;
   (c) un brelan (trois cartes de même niveau, mais pas quatre) ;
   (d) une suite de 5 cartes consécutives pas toutes de la même couleur (l'as pouvant être à la fois la plus petite et la plus grande des cartes) ;
   (e) cinq cartes de même couleur ($\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\heartsuit$ ou $\spadesuit$) ;
   (f) un full (trois cartes de même niveau, et deux autres cartes de même niveau) ;
   (g) un carré (quatre cartes de même niveau) ;
   (h) et une suite de 5 cartes consécutives de la même couleur ($\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\heartsuit$ ou $\spadesuit$).

4. **Paradoxe des anniversaires.** Calculer la probabilité que N élèves d'une classe aient tous une date d'anniversaire différente (on ne prend pas en compte le problème des gens nés le 29 février). Donner une valeur approchée de cette probabilité lorsque $N = 30$.

5. **Nombres de compositions.** Quel est le nombre de vecteurs de solutions entières $(k_1 \geq 0, \ldots, k_r \geq 0)$ de l'équation $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$, avec $n \geq 0$?

6. **Suites d'événements et probabilités.** Dans cet exercice, $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité discret (fini ou dénombrable), et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements.
   (a) On suppose la suite croissante, c'est-à-dire que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n. Rappeler pourquoi $(\mathbb{P}[A_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de nombres réels. Montrer que dans ce cas,
$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right] = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}[A_n].$$

(b) De la même façon, si la suite est décroissante, montrer que

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right] = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}[A_n].$$

(c) Lemme de Borel-Cantelli : on ne fait plus d'hypothèse sur les A_n, et on considère

$$A^* = \bigcap_{n=0}^{\infty} \left(\bigcup_{N\geq n} A_N\right).$$

On suppose que $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[A_n] < +\infty$ est une somme finie. Montrer que $\mathbb{P}[A^*] = 0$ (on pourra montrer que la probabilité est plus petite que tout $\varepsilon > 0$).

7. **L'inégalité de Bonferroni.** Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ une famille d'événements dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i] - \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{P}[A_i \cap A_j].$$

Montrer qu'on a aussi

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] \leq \min_{k\in[\![1,n]\!]} \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}[A_j] - \sum_{j\neq k} \mathbb{P}[A_j \cap A_k]\right).$$

8. **Un problème d'urnes.** On considère deux urnes U_1 et U_2, la première contenant deux boules blanches et trois boules rouges, et la seconde trois boules blanches et quatre boules rouges. On tire une boule au hasard dans U_1 et on la place dans U_2. On mélange ensuite U_2 et on y tire une boule au hasard. Calculer la probabilité pour que cette boule soit blanche.

9. **Un autre problème d'urnes.** On considère deux urnes U_{blanche} et U_{rouge}, la première contenant une proportion r de boules blanches et une proportion $1-r$ de boules rouges, et la seconde contenant une proportion $1-s$ de boules blanches et une proportion s de boules rouges. En commençant par l'urne blanche, on tire au temps n une boule b_n au hasard dans une urne, et la boule tirée au temps $n+1$ le sera dans l'urne de la couleur de b_n (on remet les boules dans les urnes après chaque tirage). Soit p_n la probabilité que b_n soit blanche.

   (a) Calculer p_0 et p_1.

   (b) Donner une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1}.

   (c) Calculer p_n pour tout n, puis $\lim_{n\to\infty} p_n$.

10. **La formule du crible.** Si $A \subset \Omega$ est une partie d'un ensemble fini Ω, on note 1_A la fonction caractéristique de A : c'est la fonction $\Omega \to \{0,1\}$ qui vaut 1 sur A et 0 sur A^{c}.

(a) Montrer que

$$1_{A^c} = 1 - 1_A \qquad ; \qquad 1_{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \prod_{i=1}^n 1_{A_i}.$$

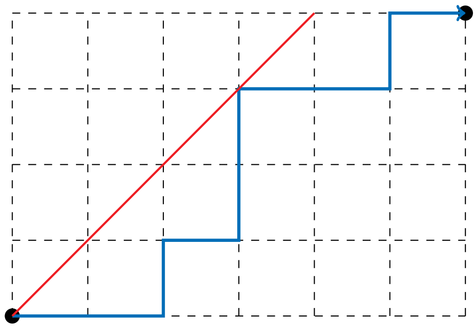
(b) Montrer aussi que pour toute partie $A \subset \Omega$, $\operatorname{card} A = \sum_{\omega\in\Omega} 1_A(\omega)$.

(c) En développant $1_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = 1 - 1_{\bigcap_{i=1}^n (A_i)^c}$, montrer que

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1}\left(\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_m\leq n} \operatorname{card}\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_m}\right)\right)$$

pour toute famille $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ de parties de Ω. Expliciter cette formule lorsque $n = 3$.

11. **Chemins nord-est.** On considère une grille de taille $n \times m$, et l'ensemble Ω de tous les chemins de longueur $n+m$ qui relient le coin de coordonnées $(0,0)$ au coin de coordonnées (n,m) avec seulement des pas vers le haut ou vers la droite :



(a) On suppose $n = 6$ et $m = 3$. Calculer $\operatorname{card}\Omega$.

(b) Plus généralement, calculer le cardinal $C_{n,m}$ de $\Omega = \Omega_{n,m}$ en fonction de n et m.

(c) On suppose $n \geq m$, et on note A le sous-ensemble de $\Omega_{n,m}$ constitué des chemins qui restent sous la diagonale (ainsi, l'exemple ci-dessus de chemin est dans A). Montrer qu'il y a autant de chemins :
— dans le complémentaire A^c de A dans l'ensemble $\Omega_{n,m}$ des chemins nord-est dans une grille de taille $n \times m$;
— et dans l'ensemble $\Omega_{m-1,n+1}$ des chemins nord-est dans une grille de taille $(m-1)\times(n+1)$.

On pourra remarquer que si un chemin de $\Omega_{n,m}$ ne reste pas en dessous de la diagonale, alors il atteint la sur-diagonale D d'équation $y = x + 1$. On peut alors utiliser une réflexion orthogonale par rapport à cette droite pour faire correspondre ce chemin touchant D dans une grille de taille $n \times m$, et un autre chemin nord-est dans une grille de taille $(m-1, n+1)$. En déduire une formule pour $\operatorname{card} A$.

(d) Si $n = m$, montrer que

$$\operatorname{card} A = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Dans ce cas, quelle est la probabilité pour qu'un chemin nord-est aléatoire choisi uniformément reste toujours sous la diagonale ?

12. **Dérangements.** On demande à N personnes de fournir chacun sa carte d'identité. On mélange ces cartes, et on les redistribue au hasard à ces N personnes, chacune des permutations possibles étant équiprobable. On dit qu'on a un dérangement si aucune des personnes ne récupère sa propre carte. L'objectif est de calculer la probabilité P_N d'avoir un dérangement. On note S_N le nombre de permutations possibles des cartes, et D_N le nombre de dérangements.

   (a) Rappeler la formule pour S_N, et donner une formule reliant D_N, S_N et P_N.

   (b) Montrer que $D_N = (N-1)(D_{N-1} + D_{N-2})$ pour tout $N \geq 3$. On pourra interpréter $D_{N-1} + D_{N-2}$ comme le nombre de dérangements tels que la N-ième personne récupère la i-ième carte, $i \in [\![1, N-1]\!]$.

   (c) En déduire que $D_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k \, N!}{k!}$. Que vaut P_N, et quelle est sa limite lorsque $N \to \infty$?

13. **Tables de couples.** On considère $N \geq 2$ couples qui s'asseyent autour d'une table de $2N$ places numérotées, qui est circulaire. Quel est le nombre total de façons possibles de s'asseoir pour ces $2N$ personnes, étant entendu qu'on identifie deux façons qui différeraient seulement par une rotation de la table ? On suppose que toutes les façons ont la même probabilité. Calculer :

   (a) la probabilité pour que chaque homme soit entouré de deux femmes, et chaque femme entourée de deux hommes ;

   (b) conditionnellement au fait que les hommes et les femmes soient placés de façon alternée, la probabilité que chaque homme soit placé à côté de sa femme (qui peut être à sa droite ou à sa gauche) ;

   (c) conditionnellement au fait que les hommes et les femmes soient placés de façon alternée, la probabilité qu'aucun homme ne soit placé à côté de sa femme.

   Pour la dernière question, on doit trouver

$$\frac{1}{N!} \sum_{m=0}^{N} (-1)^m \, \frac{2N}{2N-m} \binom{2N-m}{m} (N-m)! \, .$$

   On utilisera la formule du crible, et on pourra d'abord montrer qu'étant fixé $m \in [\![1, N]\!]$ couples parmi les N couples, le nombre de façons d'asseoir les $2N$ personnes de façon alternée et telle que dans chacun des m couples l'homme soit à côté de sa femme est

$$2 \, \frac{m! \, (N-m)!^2}{2N-m} \binom{2N-m}{m}$$

   (indication : il faut intercaler $2N - 2m$ personnes entre ces couples, et on peut utiliser l'exercice sur les nombres de composition).