1. **Un calcul de densité.** Soit X une variable aléatoire à densité, dont la fonction de répartition est :
$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ t^3 & \text{si } t \in [0,1], \\ 1 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$
   (a) Calculer la densité de X.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de X.
   (c) Soit $Y = \frac{1}{X}$. Donner la fonction de répartition, puis la densité de Y.

2. **Un calcul d'intégrales.** Soit X une variable aléatoire réelle, dont la densité f_X a pour forme $f_X(x) = \frac{C}{(1+x^2)^2}$.
   (a) Trouver la valeur de la constante C. On pourra utiliser l'identité
$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2}.$$
   (b) Calculer l'espérance et la variance de X. Que vaut $\mathbb{E}[X^3]$?

3. **Moments des lois gaussiennes et du χ^2.**
   (a) Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Montrer que $\mathbb{E}[X^{2n}] = (2n-1)(2n-3)\cdots 3\,1$ et $\mathbb{E}[X^{2n+1}] = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Soit $X \sim \chi^2(k)$. Montrer que $\mathbb{E}[X^n] = k(k+2)\cdots(k+2n-2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. **Lois gamma.** On rappelle que la fonction Γ est définie par l'équation intégrale $\Gamma(t) = \int_{s=0}^{\infty} s^{t-1}\,\mathrm{e}^{-s}\,ds$. La loi γ de paramètres $a, b > 0$, notée $\gamma(a,b)$, est donnée par la densité
$$f_X(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)}\,x^{a-1}\,\mathrm{e}^{-bx}\,1_{x\geq 0}.$$
   (a) Vérifier que $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = 1$.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de $X \sim \gamma(a,b)$.
   (c) Quelle loi retrouve-t-on lorsque $a = 1$? lorsque $a = 2$?

5. **Lois beta.**
   (a) Si $a, b > 0$, montrer que
$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$
   On pourra faire un changement de variables dans le calcul de l'intégrale double $\Gamma(a)\,\Gamma(b)$.

(b) En déduire que

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\, x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, 1_{x\in[0,1]}$$

est la densité d'une variable aléatoire continue, et qu'elle correspond à la loi d'un rapport $\frac{Y}{Y+Z}$, où Y et Z sont deux variables indépendantes de lois $\gamma(a,c)$ et $\gamma(b,c)$ avec $c>0$ paramètre arbitraire. On dit que f_X est la densité d'une loi β de paramètres a et b, notée $\beta(a,b)$.

(c) Quelle loi retrouve-t-on lorsque $a=b=1$?

(d) Calculer la moyenne et la variance de $X \sim \beta(a,b)$.

6. **Simulation de variables aléatoires.** Soit F_X une fonction strictement croissante sur un intervalle I, à valeurs dans $[0,1]$; et F_X^{-1} la bijection réciproque $[0,1]\to I$. On note U une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}([0,1])$.
   (a) Montrer que $X = F_X^{-1}(U)$ est une variable aléatoire qui a pour fonction de répartition F_X.
   (b) En déduire comment simuler n'importe quelle variable aléatoire à partir d'une variable aléatoire uniforme.

7. **Densité d'une fonction d'une variable aléatoire.** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un intervalle I, et de densité $f_X(x)$.
   (a) Soit $g : I \to J$ une fonction dérivable et strictement croissante, et $Y = g(X)$. Montrer que la densité de Y est donnée par la formule

$$f_Y(y) = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))}.$$

   (b) Que dire si g est strictement décroissante ?
   (c) Si $X \sim \mathcal{E}(1)$, donner la densité de la variable aléatoire $Y = \frac{1}{X}$.
   (d) Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans $\mathbb{R}$, de densité $f_X(x)$. Donner une formule pour la fonction de répartition, puis pour la densité de X^2.

8. **Lois exponentielles et lois géométriques.** Soit X une variable aléatoire continue, de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
   (a) Calculer pour tout entier $k \geq 1$ la probabilité pour que X soit compris entre $k-1$ et k.
   (b) En déduire que $\lceil X \rceil$, l'entier approchant X par valeurs supérieures, suit une loi géométrique de paramètre à préciser.

9. **Variables exponentielles indépendantes et lois de Poisson.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, chaque variable X_n suivant une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit une loi $\gamma(n,\lambda)$. On pourra utiliser la formule du produit de convolution.

(b) Calculer la probabilité de l'événement ($S_n \leq 1$ et $S_{n+1} > 1$) (indication : comparer $\mathbb{P}[S_{n+1} \leq 1]$ et $\mathbb{P}[S_n \leq 1]$).

(c) En déduire la loi de $N = \max\{n \in \mathbb{N} \mid S_n \leq 1\}$.

(d) Application : on considère une pièce mécanique, qui subit des pannes espacées par des intervalles de temps aléatoires X_i, qui sont des variables aléatoires indépendantes exponentielles de même paramètre λ. Calculer l'espérance et la variance du nombre N de pannes observées durant l'intervalle de temps $[0, 1]$.

10. **Loi du maximum de deux variables aléatoires indépendantes.** Soient X et Y deux variables aléatoires continues indépendantes, de densités respectives f_X et f_Y.

(a) On pose $V = \max(X, Y)$. Donner un lien entre les fonctions de répartition F_V, F_X et F_Y. En déduire la valeur de la densité de V.

(b) On pose $U = \min(X, Y)$. En remarquant que $\min(x, y) = -\max(-x, -y)$, donner la densité de U.

(c) Application : on suppose que X et Y sont des variables exponentielles de paramètres λ et μ. Donner la loi de $U = \min(X, Y)$.

11. **Loi de Cauchy.** Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes, toutes deux de loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$. On note $X = \frac{U}{V}$.

(a) En faisant un changement de variables polaires, montrer que

$$\mathbb{P}[X \leq t] = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}} 1_{\tan(\theta) \leq t} \, dr \, d\theta$$

(b) En déduire la valeur de la fonction de répartition de la variable X.

(c) Montrer que la densité de X est $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. On dit que X suit une loi de Cauchy.

(d) Que vaut $\mathbb{E}[X]$?

(e) Quelle est la loi de $\frac{1}{X}$?

12. **Distance entre deux points aléatoires.** On note X et Y deux variables indépendantes de même loi $\mathcal{U}([0, a])$, et $Z = |X - Y|$ la distance entre ces deux points.

(a) Écrire $\mathbb{P}[Z \leq t] = F_Z(t)$ comme une intégrale double.

(b) On voit $F_Z(t) = F_Z(t, a)$ comme une fonction de t et du paramètre a. Montrer que

$$\frac{\partial F_Z(t, a)}{\partial a} = -\frac{2F_Z(t, a)}{a} + \frac{2t}{a^2}.$$

(c) En déduire la fonction de répartition de Z s'écrit sous la forme $F_Z(t, a) = \frac{2t}{a} + \frac{K(t)}{a^2}$, où $K(t)$ est une fonction qui ne dépend que de t (et pas de a).

(d) Montrer que $F_Z(t, a)$ est une fonction du rapport $\frac{t}{a}$. En déduire la valeur de $K(t)$, et de $F_Z(t, a)$. Si a est fixé, quelle est la densité de Z ? son espérance ?

13. **Le paradoxe de Bertrand.** On étudie dans cet exercice deux façons différentes de choisir une corde reliant deux points aléatoires d'un cercle de rayon 1.

(a) Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur le segment $[0, 2\pi]$. On note L la longueur de la corde reliant les deux points d'angle U et V sur le cercle unité. Montrer que

$$L = 2 \sin \left| \frac{V - U}{2} \right|.$$

(b) Donner la loi de $\left|\frac{V-U}{2}\right|$, puis celle de L (on demande les densités dans les deux cas).

(c) Pour choisir une corde au hasard sur un cercle, on peut également faire comme suit : on tire au hasard une direction $\theta \in [0, 2\pi]$, puis un point P au hasard sur le rayon reliant l'origine au point d'angle θ sur le cercle, la distance de ce point à l'origine suivant une loi $\mathcal{U}(1)$. On choisit alors l'unique corde du cercle qui a pour milieu P. Donner dans ce cas la loi de L', la longueur de la corde.

(d) Dans quel cas a-t-on la plus longue corde en moyenne ?