II . −Groupes, morphismes ...

II.1 . −Groupe

Définition II.1.1 (Groupe) Un *groupe* est un couple $(G, *)$ (le plus souvent simplement noté G,) où G est un ensemble et $* : G \times G \to G$ est une application appelée *loi de composition* vérifiant :

Gr$_1$) Pour tout triplet (x, y, z) d'éléments de G,

$$(x * y) * z = x * (y * z) ,$$

on dit que la loi interne $*$ est *associative*.

Gr$_2$) Il existe un élément $e \in G$ appelé *élément neutre* de G tel que, pour tout $x \in G, x * e = e * x = x$.

Gr$_3$) Pour tout élément $x \in G$, il existe un élément $x' \in G$ appelé *symétrique* de x et tel que $x * x' = x' * x = e$.

Il revient au même de dire que $(G, *)$ est un magma associatif possédant un élément neutre et dans lequel tout élément possède un symétrique.

Les formulations « $(G, *)$ est un groupe » ou « $*$ munit G d'une *structure de groupe* » sont synonymes.

Exemple II.1.2 i) Il n'existe pas de loi de composition $*$ sur $\emptyset$ fasse de $(\emptyset, *)$ un groupe. L'axiome Gr$_2$ de la définition II.1.1 entraîne, en effet, qu'un groupe possède toujours au moins un élément c'est-à-dire n'est jamais vide.

b) On peut définir une unique loi de composition qui donne à l'ensemble $\{\emptyset\}$ à un élément une structure de groupe :

$$\emptyset * \emptyset := \emptyset .$$

c) (**Le groupe $\mathcal{S}(X)$**)

Un des premiers groupes qu'on peut introduire, au sens où sa définition ne nécessite guère plus que les premiers axiomes de la théorie des ensembles(cf. I ,) est le groupe $\mathcal{S}(E)$ des bijections d'un ensemble E muni de la loi $\circ$(cf. la question 1 de l'exercice II.5.4 .) C'est une partie du magma considéré dans l'exemple I.5.13 , et précisément celle constituée des éléments qui ont un symétrique. Pour ne nécessiter que très peu de matériel pour être défini, ce groupe n'est cependant pas le plus aisé à étudier

Remarque II.1.3 On pourrait même affaiblir les axiomes de la définition II.1.1 , comme le montre l'exercice II.5.2 .

Définition II.1.4 (Groupe abélien) Étant donné un groupe $(G, *)$, si pour tout couple (x, y) d'éléments de G, $x * y = y * x$, on dira que G est *abélien* ou *commutatif*.

Dans ce cas on notera usuellement $+$ la loi interne et 0 l'élément neutre en référence au groupe abélien $(\mathbb{Z}, +)$

Un groupe n'étant rien de plus (ni de moins d'ailleurs) qu'un magma associatif possédant un élément neutre et dans lequel tout élément possède un symétrique, la proposition I.5.14 vaut encore ici mutatis mutandis.

Proposition II.1.5 (Propriétés) *Soient $(G, *)$ un grouepe.*

i) Si ϵ et ϵ' sont des éléments neutres de $(G, *)$ alors $\epsilon = \epsilon'$.

ii) Si y et z éléments de E sont des symétriques pour $x \in E$, $y = z$.

***Démonstration** : (cf. l'exercice II.5.1 .)*

Remarque II.1.6 On pourra donc parler de L'élément neutre d'un groupe et du symétrique d'un élément dans un groupe.

L'élément neutre est souvent noté 1 et même 0 dans le cas des groupes abéliens par analogie avec le groupe $(\mathbb{Z}, +)$. Le symétrique d'un élément x est usuellement noté x^{-1} et appelé *inverse* de x, voire $-x$ dans le cas d'un groupe abélien et appelé alors *opposé* de x.

De même la proposition I.5.18 a son pendant pour les groupes :

Proposition II.1.7 *Étant donnés un groupe $(G, *)$ et un ensemble E, l'ensemble G^E des applications de E dans G muni de la loi induite (cf. I.5.18 ,) est un groupe (abélien si G l'est.)*

II.2 . −Morphisme

Définition II.2.1 (Morphisme de groupes) Étant donnés des groupes

$$(G, *) \text{ et } (H, \cdot),$$

un *morphisme de groupes* (ou *homomorphisme de groupes*) est une application $f : G \to H$ telle que pour tout couple (x, y) d'éléments de G,

$$f(x * y) = f(x) \cdot f(y) .$$

On notera $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Gr}}(G, H)$ (ou simplement $\mathrm{Hom}(G, H)$ si le contexte ne prête pas à confusion) l'ensemble des morphismes de G dans H.

On a l'exact analogue du lemme I.5.3 :

Lemme II.2.2 *i) Pour tout groupe $(G, *)$ l'identité Id_G est un morphisme du groupe G dans lui-même.*

ii) Pour $(G, *_G)$, $(H, *_H)$ et $(K, *_K)$ des groupes, $f : G \to H$ et $g : H \to K$ des morphismes, le composé $g \circ f$ est un morphisme.

On peut donc donner une définition analogue à la définition I.5.4 :

Définition II.2.3 Étant donnés deux groupes $(G, *)$ et $(H, \cdot)$, un morphisme $f : G \to H$ est un *isomorphisme* s'il existe un morphisme $g : H \to G$ tel que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_G \text{ et } f \circ g = \mathrm{Id}_H .$$

On notera $\mathrm{Isom}_{\mathbf{Gr}}(G, H)$ (ou simplement $\mathrm{Isom}(G, h)$ si le contexte est clair) l'ensemble des isomorphismes de $(G, *)$ dans $(H, \cdot)$.

On a encore, san surprise puisqu'en fait l'axiomatique n'est pas vraiement différente, un analogue de la proposition I.5.6 :

Proposition II.2.4 *Étant donnés deux groupes $(G, *)$ et $(H, \cdot)$, une application $f : G \to H$ est un isomorphisme si et seulement si c'est un morphisme bijectif.*

***Démonstration** : Il n'y a rien de plus à montrer que dans la preuve de la proposition I.5.6 .*

Exemple II.2.5 Soit E et F deux ensembles. On rappelle (cf. le point c de l'exemple II.1.2 et la question 1 de l'exercice II.5.4 ,) que

$$(\mathcal{S}(E), \circ) \text{ (resp. } (\mathcal{S}(F), \circ)\text{)}$$

est le groupe des bijections de E (resp. F,) dans lui-même.

Soit $u : E \to F$ une bijection de E dans F. L'application

$$\mathcal{S}(u) : \mathcal{S}(E) \to \mathcal{S}(F)\ ,\ f \mapsto u \circ f \circ u^{-1}$$

est un isomorphisme de groupes (cf. la question 2 de l'exercice II.5.4 .)

Des définitions analogues à la définition I.5.7 peuvent donc être données :

Définition II.2.6 Soit $(G, *)$ un groupe.

i) **(Endomorphismes)**
Un morphisme $f : G \to G$ de G dans lui-même est appelé *endomorphisme*. On note $\mathrm{End}_{\mathbf{Gr}}(G)$ (ou simplement $\mathrm{End}(G)$,) l'ensemble des endomorphismes de G.

ii) **(Automorphismes)**
Un morphisme $f : G \to G$ est un *automorphisme* si c'est à la fois un isomorphisme et un endomorphisme. Il revient au même, grâce à la proposition II.2.4 , de dire que f est un endomorphisme bijectif. On note $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Gr}}(G)$ (ou simplement $\mathrm{Aut}(G)$) l'ensemble des automorphismes de G.

Exemple II.2.7 Pour un groupe G, l'identité Id_G est un automorphisme.

Proposition II.2.8 (Propriétés des morphismes) *Étant donné un morphisme de groupe*

$$f : (G, *) \to (H, \cdot) \text{ avec } e_G (\text{resp. } e_H) \text{ l'élément neutre de } G (\text{resp. } H\ :)$$

i) $f(e_G) = e_H$;

Démonstration *: (cf. la question 1 de l'exercice II.5.3 .)*

ii) pour tout $x \in G$, si $y \in G$ est son symétrique, $f(y)$ est le symétrique de $f(x)$ dans H.

Démonstration *: (cf. la question 2 de l'exercice II.5.3 .)*

II.3 . −Sous-groupe

Définition II.3.1 (Sous-groupe) Une partie H d'un groupe $(G, *)$ est un *sous-groupe* si la restriction de $*$ à $H \times H$ donne à H une structure de groupe.

Exemple II.3.2 Étant donné un groupe $(G, *)$ d'élément neutre ϵ, les ensembles $\{\epsilon\}$ et G lui-même sont des sous-groupes de G.

Remarque II.3.3 i) Il ne suffit pas pour que H soit un sous-groupe de G que H soit un sous-magma de G comme le montre la question 2 de l'exercice I.7.16 . Il faut en effet exiger en plus que H possède un élément neutre (cf. II.1.1. Gr_2 e)t que tout élément de H possède un symétrique (cf. II.1.1. Gr_3 .)

ii) La définition de sous-groupe donnée ci-dessus n'est peut-être pas celle qu'on a été habitué à rencontrer qui est parfois plutôt la caractérisation donnée à la proposition II.3.5 . On ne peut cependant se contenter de cette dernière en l'état puisqu'aux termes stricts de cet énoncé on ne saurait même pas qu'un sous-groupe est lui-même un groupe, ce qui avouons-le devra à tout le moins être établi, si l'on veut bénéficier d'une théorie utilisable. L'énoncé clef est en fait l'équivalence entre le point a et le point b .

Le lemme technique suivant est un ingrédient permettant d'établir l'équivalence entre les diverses caractérisations des sous-groupes.

Lemme II.3.4 *Soit* $(G, *)$ *un groupe d'élément neutre* e *et* H *un sous-groupe de* G *au sens de la définition II.3.1 .*

i) Si f *est l'élément neutre de* H, $f = e$.

Démonstration : *Puisque* f *est l'élément neutre de* H,

$$\forall x \in H,\ f * x = x$$

et, en particulier $f * f = f$. *Mais* f *est toujours un élément de* G *dont l'élément neutre est* e ; *si bien que* $f * e = f$; *d'où il résulte* $f * f = f * e$. *En tant qu'élément de* G, *qui est un groupe,* f *possède un inverse* g *vérifiant* $g * f = e$. *Il s'ensuit que :*

$$\begin{array}{rrcl} & f * f & = & f \\ \Rightarrow & f * f & = & f * e \\ \Rightarrow & g * f * f & = & g * f * e \\ \Rightarrow & (g * f) * f & = & (g * f) * e \\ \Rightarrow & e * f & = & e * e \\ \Rightarrow & f & = & e\,. \end{array}$$

ii) Pour tout $x \in H$, *l'inverse* ${x^{-1}}_H$ *de* x *dans* H *est aussi son inverse dans* G.

Démonstration : *Tout* $x \in H$ *possède un inverse* ${x^{-1}}_H$ *tel que*

$$x *_H {x^{-1}}_H = {x^{-1}}_H *_H x = f = e$$

en utilisant le point i . Or x *et* ${x^{-1}}_H$ *étant en particulier des éléments de* G, *on peut encore écrire,*

$$x * {x^{-1}}_H = {x^{-1}}_H * x = e$$

c'est-à-dire que ${x^{-1}}_H$ *est l'inverse* x^{-1} *de* x *dans* G *puisque ce dernier est unique (cf. le point i de la proposition II.1.5 .)*

Proposition II.3.5 (Sous-Groupe) *Étant donnés un groupe* $(G, *)$ *et* $H \subset G$ *une partie de* G, *les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) H *est un sous-groupe au sens de la définition II.3.1 .*

b) H *est non vide et pour tout couple* (x, y) *d'éléments de* H, $x * y^{-1} \in H$.

c) H *est non vide, pour tout couple* (x, y) *d'éléments de* H, $x * y \in H$ *et pour tout* $x \in H$, $x^{-1} \in H$.

d) La restriction

$$\mathrm{Id}_{G|H} \;:\; H \;\to\; G$$

de l'identité Id_G *à* H *est un morphisme de groupes. Ceci signifie implicitement que* H *possède une structure de groupe.*

Démonstration :

i) (**a** $\Rightarrow$ **b** *)*

Si H *est un sous-groupe de* G*, en particulier* H *est un groupe et il est donc non vide (cf. II.1.2. i .)*

Pour tout couple (x, y) *d'éléments de* H*,* x *et* y^{-1} *sont encore des éléments de* H *(cf. II.3.4. ii .) Dire que la restriction* $*_H$ *de* $*$ *à* $H \times H$ *donne à* H *une structure de groupe signifie, en particulier, qu'elle est à valeurs dans* H*, ce qui prouve que*

$$x * y^{-1} \;=\; x *_H y^{-1} \;\in\; H\;.$$

ii) (**b** $\Rightarrow$ **a** *)*

Réciproquement, supposons donnée une partie non vide H *de* G *telle que pour tout couple* (x, y) *d'éléments de* H*,* $x * y^{-1} \;\in\; H$*.*

Si H *est non vide il existe en particulier un élément* $x \;\in\; H$*, et, dès lors,* $\epsilon_G \;=\; x * x^{-1} \;\in\; H$*. Il est clair que* <u>$\epsilon_G$ *est alors un élément neutre pour* H*.*</u>

De plus, pour tout $x \;\in\; H$*, puisque* $\epsilon_G \;\in\; H$*,* $\epsilon_G * x^{-1} \;=\; x^{-1} \;\in\; H$ *c'est-à-dire que* <u>*tout élément de* H *possède un inverse dans* H*.*</u>

Enfin, pour tout couple (x, y) *d'éléments de* H*,* $y^{-1} \;\in\; H$ *et*

$$x * y \;=\; x * (y^{-1})^{-1} \;\in\; H$$

c'est-à-dire que <u>*la restriction de* $*$ *à* $H \times H$ *est bien à valeurs dans* H*.*</u>

La partie H *de* G *est donc bien un sous-groupe.*

Exemple II.3.6 (Automorphismes) Pour un ensemble E, on a introduit (cf. II.1.2. c ,) le groupe $(\mathcal{S}(E), \circ)$ des bijections de E dans lui-même. Dans le cas où G, est un groupe $(\mathcal{S}(G), \circ)$ reste bien évidemment un groupe ; mais on dispose alors de la notion d'automorphisme (cf. II.2.6. ii ,) qui sont des bijections particulières ; c'est-à-dire que $\mathrm{Aut}(G) \;\subset\; \mathcal{S}(G)$. C'est un bon exercice pour s'approprier la notion de sous-groupe que de montrer que $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{S}(G), \circ)$ (cf. la question 2 de l'exercice II.5.5 .)

Proposition II.3.7 *Soient* G *un groupe,* H *et* K *des sous-groupes de* G*.*

i) $H \;\cap\; K$ *est un sous-groupe de* G*.*

Démonstration : *(cf. la question 4 de l'exercice II.5.5 .)*

ii) Plus généralement, pour $\mathcal{H}$ *un ensemble non vide de sous-groupes de* G*,* $\bigcap_{H\in\mathcal{H}} H$ *est un sous-groupe de* G*.*

Démonstration : *(cf. la question 4 de l'exercice II.5.5 .)*

iii) $H \cup K$ *est un sous-groupe de* G *si et seulement si*

$$H \subset K \text{ ou } K \subset H .$$

Démonstration : *(cf. la question 3 de l'exercice II.5.5 .)*

iv) *Si* $\left(H_n\right)_{,n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de sous-groupes de* G *telle que*

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N},\ \exists r \in \mathbb{N},\ H_p \subset H_r \text{ et } H_q \subset H_r,$$

alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H$ *est un sous-groupe de* G.

Démonstration : *(cf. l'exercice II.5.6 .)*

Proposition II.3.8 (Image directe/réciproque) *Soit* $f : G \to H$ *un morphisme de groupes.*

i) ***(Image directe)***
Pour tout sous-groupe G' *de* G, *l'image directe de* G'

$$f(G') = \{y \in H\ ;\ \exists x \in G',\ ,\ y = f(x)\}$$

est un sous-groupe de H.

ii) ***(Image réciproque)***
Pour tout sous-groupe H' *de* H, *l'image réciproque*

$$f^{-1}(H') = \{x \in G\ ;\ f(x) \in H'\}$$

est un sous-groupe de G.

Définition II.3.9 (Noyau/image) Étant donné un morphisme de groupes $f : G \to H$, ϵ_H étant l'élément neutre de H, on appelle

i) **(Noyau)**
noyau de f le sous-ensemble

$$\operatorname{Ker} f := f^{-1}(\{\epsilon\}_H) = \{x \in G\ ;\ f(x) = \epsilon_H\} \text{ (resp. .} f^{-1}\{0\} \text{),}$$

ii) **(Image)**
image de f l'ensemble

$$\operatorname{Im} f := f(G) = \{y \in H\ ;\ \exists x \in G,\ ,\ y = f(x)\} \text{ (resp. } f(A) \text{) .}$$

Corollaire II.3.10 *Pour un morphisme de groupes $f : G \to H$, le noyau (resp. l'image) de f est un sous-groupe de G (resp. H.)*

Proposition II.3.11 *Un morphisme de groupes $f : G \to H$ est injectif (resp. surjectif) si et seulement si* $\operatorname{Ker} f = \{\epsilon_G\}$ *(resp.* $\operatorname{Im} f = H$ *.)*

Définition II.3.12 Si $i : H \to G$ est un morphisme de groupes injectif, il induit un isomorphisme $H \cong \operatorname{Im} i$; si bien que H est isomorphe à un sous-groupe de G. On dira parfois même par abus de langage que H est lui-même un sous-groupe de G.

II.4 . –Partie génératrice

Dans tout ce paragraphe (II.4 ,) $(G, *)$ est un groupe dont lélément neutre est noté e et dans lequel l'inverse (symétrique) de toute élément x est noté x^{-1}.

Lemme II.4.1 *Étant donnée une partie $S \subset G$, notons $\mathcal{G}_S$ l'ensemble des sous-groupes de G contenant S. Alors*

$$< S > := \bigcap K \in \mathcal{G}_S K$$

est le plus petit élément (pour l'inclusion) de $\mathcal{G}_S$.

Démonstration *: On remarque d'abord que $\mathcal{G}_S$ est non vide puisque $G \in \mathcal{G}_S$. Or pour tout $K \in \mathcal{G}_S$, $S \subset K$, donc*

$$S \subset < S > .$$

Il s'ensuit en particulier que

$$< S > \neq \emptyset .$$

Pour tout $(x, y) \in < S > \times < S >$, par définition,

$$\forall K \in \mathcal{G}_S,\ x \in K \text{ et } y \in K$$

il s'ensuit (cf. II.3.5 ,) que

$$\forall K \in \mathcal{G}_S,\ x * y^{-1} \in K$$

ce qui entraîne que $x * y^{-1} \in < S >$ ce qui combiné au fait que $< S >$ est non vide assure que $< S >$ est un sous-groupe de G.

Puisque, de plus $S \subset < S >$,

$$< S > \in \mathcal{G}_S .$$

Il est immédiat de montrer, et ce du fait même de la définition de $< S >$, que

$$\forall k \in \mathcal{G}_S,\ < S > \subset K$$

c'est-à-dire que $< S >$ est un minorant de $\mathcal{G}_S$ qui, étant de plus élément de $\mathcal{G}_S$ est son plus petit élément.

Définition II.4.2 Étant donné un groupe G et $S \subset G$ une partie de G :

i) **(sous-groupe engendré)**
le sous-groupe $< S >$ de G défini par le lemme II.4.1 s'appelle le *sous-groupe de G engendré par S*;

ii) (**partie génératrice**)
si $G = < S >$, on dit que G est *engendré* par S ou que S est une *partie génératrice* de G.

Exemple II.4.3 a) Pour tout groupe G d'élément neutre e,

$$< \emptyset > = \{e\} .$$

b) Pour tout groupe G, $G = < G >$.

Définition II.4.4 (Groupe monogène) Pour un groupe G et $x \in G$, si $< \{x\} > = G$ on dit que G est *monogène*.

Notation II.4.5 Pour deux sous-groupes H et K d'un groupe G, on note

$$HK := < (H \cup K) >$$

qui est le plus petit sous-groupe contenant à la fois H et K. Si G est abélien la notation

$$H + K := < (H \cup K) >$$

sera plutôt utilisée.

Remarque II.4.6 On a vu au point iii de la proposition II.3.7 que $H \cup K$ n'est pas en général un sous-groupe de G et c'est HK qui « joue alors le rôle » de $H \cup K$. Si le lecteur a quelques souvenirs de son cours d'algèbre linéaire il remarquera que c'est précisément la situation rencontrée pour les espaces vectoriels, ce qui n'a d'ailleurs rien d'étonnant, ces derniers étant en particuliers des groupes abéliens.

Proposition II.4.7 *Étant donnés un groupe G et une partie S de G, on note (comme au lemme II.4.1 ,) $\mathcal{G}_S$ l'ensemble des sous-groupes de G qui contiennent S. Alors pour toute partie H G, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) L'ensemble H est l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant S :

$$H = \bigcap_{K \in \mathcal{G}_S} K \, ;$$

b)

$$H \in \mathcal{G}_S \text{ et } \forall K \in \mathcal{G}_S, \; H \subset K$$

autrement dit H est le plus petit élément de $\mathcal{G}_S$;

c) H est constitué des éléments $t_1 t_2 \ldots t_r$ avec $r \geq 1$ où un élément t_i est dans S ou a son inverse dans S.

***Démonstration** : (cf. la question 5 de l'exercice II.5.5 .)*

II.5 . −Exercices

Exercice II.5.1 (Unicité des éléments remarquables) Soit $(E, *)$ un ensemble muni d'une loi associative.

1) (**Élément neutre**)
Montrer que si $(E, *)$ possède un élément neutre ϵ celui-ci est unique.

2) (**Symétrique**)
Montrer que si $(E, *)$ possède un élément neutre ϵ, tout élément $x \in E$ possède au plus un symétrique.

Exercice II.5.2 (Affaiblissement des axiomes de groupe) Soit G un ensemble muni d'une loi associative notée $(G, *)$. On suppose qu'il existe un élément neutre à gauche e (c'est-à-dire que $e * x = x$ pour tout $x \in G$) et que tout élément admet un inverse à gauche (c'est-à-dire que pour tout $x \in G$, il existe $y \in G$ tel que $y * x = e$.)

1) Montrer que l'inverse à gauche est aussi un inverse à droite *i.e.*

$$y * x = e \Rightarrow x * y = e .$$

Indication : *On pourra considérer l'inverse à gauche z de y et calculer* $e * (x * y) = (z * y) * (x * y)$.

2) Montrer que e est aussi un élément neutre à droite *i.e.*

$$\forall x \in G,\ x * e = x .$$

3) Montrer que $(G, *)$ est un groupe.

Exercice II.5.3 (Morphismes de groupes) Soit

$$f : (G, *, \epsilon_G) \to (H, \cdot, \epsilon_H)$$

un morphisme de groupes.

1) (**Élément neutre**)
Montrer que $f(\epsilon_G) = \epsilon_H$.

2) (**Symétrique**)
Montrer que pour tout $x \in G$, si y est son symétrique, $f(y)$ est le symétrique de $f(x)$.

3) (**Image**)
Montrer que $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-groupe de $(H, \cdot)$.

4) (**Noyau**)
Montrer que $\mathrm{Ker}\, f$ est un sous-groupe de $(G, *)$.

5) (**Isomorphisme**)
Montrer que si f est bijective et que g est son applications réciproque, alors g est un morphisme de groupe.

Exercice II.5.4 (Le groupe des bijections d'un ensemble E) Pour E un ensemble, on note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des bijections de E dans lui-même. On notera $\circ$ de manière usuelle la composition des applications.

1) (**Le groupe** $(\mathcal{S}(E), \circ)$)
Soit E un ensemble.

a) Vérifier que $\circ$ est une loi interne sur $\mathcal{S}(E)$.

b) Montrer qu'il existe un élément neutre pour la loi $\circ$ dans $\mathcal{S}(E)$ et le caractériser.

c) Montrer finalement que $(\mathcal{S}(E), \circ)$ est un groupe.

2) (**La bijection** $\mathcal{S}(E) \cong \mathcal{S}(F)$)
Soient E et F deux ensembles et $u : E \to F$ une bijection de E dans F dont on notera v la bijection réciproque *i.e.*

$$v : F \to E : v \circ u = \mathrm{Id}_E , u \circ v = \mathrm{Id}_F .$$

Montrer que l'application

$$\phi_u : (\mathcal{S}(E), \circ) \to (\mathcal{S}(F), \circ) , f \mapsto u \circ f \circ v$$

est un isomorphisme de groupes.

Exercice II.5.5 (Sous-groupes) 1) (**Caractérisation des sous-groupes**)
Étant donné un groupe $(G, *)$, montrer qu'une partie $H \subset G$ de G est un sous-groupe (cf. cours définition II.3.1 ,) de G si et seulement si, $H \neq \emptyset$ et

$$\forall x \in H, \forall y \in H, x * y^{-1} \in H .$$

2) (**Groupe des automorphismes**)
Complétez la construction de l'exemple II.3.6 .

3) (**Union de deux sous-groupes**)
Étant donnés des sous-groupes H et K d'un groupe commutatif $(G, +)$, montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de $(G, +)$ si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.
Indication : *Montrer qu'il revient au même de démontrer que [$H \not\subset K$ et $H \cup K$ sous-groupe entraîne $K \subset H$] puis prouver cette dernière assertion.*

4) (**Intersection de deux sous-groupes**)
Pour deux sous-groupes H et K d'un groupe G, $H \cap K$ est un sous-groupe de G.

5) Soit S une partie de G et H une autre partie de G. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

a) L'ensemble H est l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant S.

b) L'ensemble H est un sous-groupe de G contenant S et tel que, pour tout sous-groupe K de G contenant S, $H \subset K$.

c) H est constitué des éléments $s_1 s_2 \dots s_r$ avec $r \geq 1$ où un élément s_i est dans S ou a son inverse dans S.

Exercice II.5.6 (Famille filtrante) Faire la preuve du point iv de la proposition II.3.7 .

Exercice II.5.7 (Groupe de matrices triangulaires) On rappelle que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ avec $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ et qui sont inversibles, *i.e.*

$$\forall A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),\ \exists B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),\ A * B = B * A = I,$$

où l'on désignera par I la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) (**Le groupe** $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), *)$)
Rappeler pourquoi $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est un groupe pour la loi $*$.

2) (**Un sous-groupe de** $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$)
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note

$$\mu(a) := \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, calculer $\mu(a) * \mu(b)$.

b) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mu(a) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

c) Montrer que $\mu : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), *)$.

d) Le groupe $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), *)$ est-il abélien ? Le sous-ensemble $\mathrm{Im}\,\mu$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est-il un sous-groupe abélien de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$?

Exercice II.5.8 (Le groupe $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$) Soit

$$\mathcal{SO}_2\mathbb{R} := \left\{ \rho(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbb{R} \right\} .$$

Montrer que $(\mathcal{SO}_2\mathbb{R}, \times)$ est un groupe abélien, et que l'application

$$\begin{array}{rccc} \rho : & (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & \mathcal{SO}_2\mathbb{R} \\ & \theta & \longmapsto & \rho(\theta) \end{array}$$

est un morphisme de groupes.

Exercice II.5.9 (Le groupe S_1) Soit

$$S_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 a^2 + b^2 = 1 \right\} .$$

1) Montrer que S_1 est un sous-groupe du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ des matrices inversibles 2×2 à coefficients réels.

2) Construire un isomorphisme de groupes

$$S_1 \;\cong\; \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$$

où $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est le groupe défini à l'exercice II.5.8 .