III . −Actions de groupes

III.1 . −Relations d'équivalence

Les relations d'équivalence , dont nous avons rappelé la définition au point v de la définition I.2.2 , étant amenées à jouer un rôle majeur dans la plupart des constructions que nou déveloperons dans ce cours, il ne nous a pas paru vain de leur consacrer quelques lignes afin de rappler certaines de leur propriétés que nous espérons bien connues, ainsi que d'exposer quelques résultats moins habituels.

On va voir immédiatement que les relations d'équivalence constituent une sorte de description alternative aux applications surjectives. Bien mieux encore, nombre de relations que nous pourrons définir s'avéreront *compatible*s aux structures algébriques et fourniront dès lors non seulement des applications surjectives mais encore des *morphisme*s surjectifs (cf. la définition IV.0.1 , IV.1 et IV.2 , .)

Définition III.1.1 (Classes (d'équivalence)) Étant donnée une relation binaire (cf. I.2.1. iii ,) (pas nécessairement une relation d'équivalence ,) $\sim$ sur un ensemble E, pour tout $x \in E$, on appelle *classe* de x selon $\sim$ (ou pour $\sim \dots$) le sous-ensemble $\overline{x} := \{y \in E\,;\, y \sim x\} \subset E$ de E.

Si $\sim$ est une relation d'équivalence (cf. I.2.2. v , ce qui est le cas qu'on rencontrera le plus souvent,) on parlera de *classe d'équivalence* .

Le lemme technique suivant permet d'établir bon nombre de résultats concernant les relations d'équivalence :

Lemme III.1.2 *Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\sim$. Pour tout $(x, y) \in E \times E$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $x \sim y$;

b) $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \emptyset$;

c) $\overline{x} \subset \overline{y}$;

d) $\overline{x} = \overline{y}$.

Démonstration : *(cf. la question 1 de l'exercice III.7.1 .)*

Nous allons maintenant comparer les relations d'équivalence à d'autres objets mathématique dont on va s'apercevoir qu'ils ne sont en fait que des descriptions alternatives de la même réalité. En premier lieu les partitions d'un ensemble :

Définition III.1.3 (Partition d'un ensemble) Soit E un ensemble. On rappelle qu'une *partition* de E est une partie B de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E (ou encore un élément de $\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(E)\big)$) vérifiant :

Part$_1$) $\emptyset \notin B$;

Part$_2$) $\forall X \in B,\ \forall Y \in B,\ \big(X \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow X = Y\big)$;

Part$_3$) $\bigcup_{X \in B} X = E$.

Proposition III.1.4 *Étant donné un ensemble E,*

i) pour toute relation d'équivalence $\sim$ sur E, l'ensemble des classes selon $\sim$ est une partition de E ;

ii) réciproquement, étant donnée une partition P de E, il existe une unique relation d'équivalence sur E dont l'ensemble des classes est égal à P.

On définit ainsi une bijection entre l'ensemble des relations d'équivalence sur E et l'ensemble des partitions de E.

Démonstration *: (cf. la question 2 de l'exercice III.7.1 .)*

On compare maintenant les relations d'équivalence sur un ensemble E et les applications surjectives dont E est l'ensemble de départ :

Notation III.1.5 Pour un ensemble E muni d'une relation d'équivalence $\sim$, on note $E/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalence selon $\sim$.

Proposition III.1.6 *Soit E un ensemble,*

i) pour toute relation d'équivalence $\sim$ sur E, l'application

$$\pi \, : \, E \, \to \, E/\sim \, , \, x \, \mapsto \, \overline{x}$$

est surjective ;

ii) réciproquement pour toute application surjective $\rho \, : \, E \, \to \, F$, il existe une unique relation d'équivalence $\sim$ sur E telle que l'application $E/\sim \to F$, $\overline{x} \mapsto \rho(x)$ soit une bijection bien définie. La relation $\sim$ est alors caractérisée par

$$x \, \sim \, y \, \Leftrightarrow \, \rho(x) \, = \, \rho(y) \, .$$

On définit ainsi une bijection de l'ensemble des relations d'équivalence sur E dans l'ensemble des applications surjectives de E dans un ensemble F.

Démonstration *: (cf. la question 3 de l'exercice III.7.1 .)*

Définition III.1.7 (Ensemble quotient) Étant donné un ensemble E et une relation d'équivalence $\sim$, on appel

i) *ensemble quotient* l'ensemble $E/\sim$ et

ii) *surjection canonique* (et parfois même *projection canonique*) l'application

$$\pi \, : \, E \, \to \, E/\sim \, , \, x \, \mapsto \, \overline{x} \, .$$

Lemme III.1.8 *Avec les notations de la définition III.1.7 , pour tout $(x, y) \in E \times E$, les assertions a à d du lemme III.1.2 sont encore équivalentes à $\pi(x) = \pi(y)$.*

Proposition III.1.9 (Propriété universelle) *Pour toute application $f \, : \, E \, \to \, F$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $\forall (x, y) \in E \times E, \; x \, \sim \, y \, \Rightarrow \, f(x) \, = \, f(y)$.

b) Il existe une unique application

$$g \ : \ E/\sim \to \ F \text{ tel que } g \ \circ \ \pi \ = \ f \ .$$

De plus, si f est surjective g l'est aussi et g est injective si l'implication dans a est une équivalence .

***Démonstration** :*

*i) **(b $\Rightarrow$ a)***

Pour tout $(x, y) \ \in \ E \times E$, $x \ \sim \ y$ entraîne d'après le lemme III.1.8 ,, $\pi(x) \ = \ \pi(y)$; ce qui implique

$$f(x) \ = \ g[\pi(x)] \ = \ g[\pi(y)] \ = \ f(y) \ .$$

*ii) **(a $\Rightarrow$ b)***

Unicité S'il existe une application $g \ : \ E/\sim \to \ F$, telle que $g \ \circ \ \pi \ = \ f$, alors g est unique parce que π est surjective (cf. III.1.6. i .)

existence Plus précisément pour tout $\alpha \ \in \ E/\sim$ il existe $x \ \in \ E$ tel que $\alpha \ = \ \pi(x)$. Alors nécessairement

$$g(\alpha) \ = \ g[\pi(x)] \ = \ f(x) \ .$$

Ceci sera une bonne définition pour g ; si dès que $\alpha \ = \ \pi(y)$, pour $y \ \in \ E$ on a encore

$$g(\alpha) \ = \ g[\pi(y)] \ = \ f(y) \ .$$

Or

$$\pi(y) \ = \ \alpha \ = \ \pi(x)$$

equivaut précisément, en vertu du lemme III.1.8 , à $x \ \sim \ y$; ce qui entraîne d'après le point a , que $f(x) \ = \ f(y)$; et assure donc que g est bien définie.

*iii) **(Injectivité)***

L'application g est injective si et seulement si

$$\begin{aligned}
&\forall(\alpha,\beta) \in E/\sim \times E/\sim,\ g(\alpha) = g(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta \\
&\Rightarrow \{\forall(x,y) \in E \times E,\ g[\pi(x)] = g[\pi(y)] \Rightarrow \pi(x) = \pi(y)\} \\
&\Rightarrow \{\forall(x,y) \in E \times E,\ f(x) = f(y) \Rightarrow \pi(x) = \pi(y)\} \\
&\Rightarrow \{\forall(x,y) \in E \times E,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x \sim y\} \ .
\end{aligned}$$

*iv) **(Surjectivité)***

Si g est surjective comme π l'est $f \ = \ g \ \circ \ \pi$, l'est aussi.

Réciproquement, si f est surjective, pour tout $u \ \in \ F$, il existe $x \ \in \ E$ tel que $u \ = \ f(x)$; ce qui entraîne $u \ = \ g[\pi(x)]$; ce qui assure que g est surjective[3]

3. C'est d'ailleurs un fait générale pour des applications $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$ que si $v \ \circ \ u$ est surjective, alors v l'est.

III.2 . −Actions de groupe

Pour tout ensemble E, on rappelle qu'on note $\mathcal{S}(E)$ le groupe des bijections de E défini en II.1.2. c et pour toute bijection $f : E \to F$,

$$\mathcal{S}(f) : \mathcal{S}(E) \to \mathcal{S}(F)$$

l'isomorphisme de groupes qui s'en déduit (cf. II.2.5 .)

Dans toute cette section (III ,) $(G, *)$ est un groupe dont on notera e l'élément neutre.

Définition III.2.1 (Action de groupe) Étant donné un ensemble E et un groupe $(G, *)$ on dit que G *agit sur* (ou *opère sur*) E ou que E est muni d'une *action* de G, s'il existe un morphisme de groupe (cf. II.2.1 ,)

$$\phi : (G, *) \to (\mathcal{S}(E), \circ) .$$

On dira aussi que E est un G-*ensemble*.

Remarque III.2.2 Si l'on a une action $\phi : (G, *) \to (\mathcal{S}(E), \circ)$, cela signifie que

$$\forall g \in G,\ \forall h \in G,\ \phi(g * h) = \phi(g) \circ \phi(h)$$

et cela a pour conséquences que $\phi(e_G) = \mathrm{Id}_E$ (cf. II.2.8. i ;) et $\forall g \in G,\ \phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$ (cf. II.2.8. ii .)

Notation III.2.3 Étant donnés un groupe G agissant sur un ensemble E il est usuel de noter

$$\forall g \in G,\ \forall x \in E,\ g \cdot x := \phi(g)(x) .$$

On a alors

$$\forall x \in E,\ e_G \cdot x = x \text{ et } \forall g \in G,\ \forall h \in G,\ (g * h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) .$$

Proposition III.2.4 (Définitions équivalentes) *On peut définir les actions de groupes de manière équivalente comme à la définition III.2.1 ou comme à la notation III.2.3 . Plus précisément soit $(G, *)$ un groupe d'élément neutre e, et X un ensemble :*

i) Pour tout morphisme de groupes $\phi : G \to \mathcal{S}(X)$; on définit une loi externe

$$\cdot_\phi : G \times X \to X ,\ (g, x) \mapsto g \cdot_\phi x := \phi(g)(x)$$

qui vérifie :

Act$_1$)

$$\forall (g, h, x) \in G \times H \times X,\ (g * h) \cdot_\phi x = g \cdot_\phi (h \cdot_\phi x) ;$$

Act$_2$)

$$\forall x \in X,\ e \cdot_\phi x = x .$$

ii) Réciproquement étant donnée une loi externe $\cdot\ :\ G \times X \ \to\ X$ satisfaisant aux axiomes Act_1 et Act_2, on note

$$\Phi^{\cdot}\ :\ G\ \to\ \mathcal{S}(X)\ ,\ g\ \mapsto\ x \mapsto g\cdot x\ .$$

L'application $\phi^{\cdot}$ est alors bien définie et c'est un morphisme de groupes.

Démonstration *: Il faut d'abord bien vérifier que $\phi^{\cdot}(g)$ est une bijection de X dans lui-même. Or pour tout $g\ \in\ G$, et tout $x\ \in\ X$,*

$$\phi^{\cdot}(g^{-1})[\phi^{\cdot}(g)(x)]\ =\ g^{-1}\cdot(g\cdot x)\ ;$$

c'est-à-dire, puisqu'on a suposé que $\cdot$ vérifie Act_1

$$(g^{-1} * g)\cdot x\ =\ e\cdot x\ ;$$

c'est-à-dire puisqu'on a supposé Act_2, x ; si bien que

$$\phi^{\cdot}(g^{-1})\circ\phi^{\cdot}(g)\ =\ \mathrm{Id}_X\ .$$

Il faut ensuite prouver que $\phi^{\cdot}$ est bien un morphisme : Or

$$\forall(g,h,x)\in G\times G\times X,\ \phi^{\cdot}(g*)(x)\ =\ (g*h)\ \cdot x$$

c'est-à-dire d'après l'axiome Act_1 du point i

$$g\cdot(h\cdot x)\ =\ \phi^{\cdot}(g)[\phi^{\cdot}(h)(x)]\ ;$$

c'est-à-dire que

$$\phi^{\cdot}(g*h)\ =\ \phi^{\cdot}(g)\ \circ\phi^{\cdot}(h)\ .$$

iii) Enfin les procédés i et ii sont inverses l'un de l'autre, au sens où, pour tout morphisme $\phi\ :\ G\ \to\ \mathcal{S}(X)$ $\phi^{\cdot_\phi}\ =\ \phi$ et pour toute loi externe $morphisme \cdot G\times XX$ vérifiant Act_1 et Act_2, $\cdot_{\phi^{\cdot}}\ =\ \cdot$.

Démonstration *: C'est un exercice.*

Exemple III.2.5 a) Pour tout ensemble E, le groupe $\mathcal{S}(E)$ agit évidemment sur E, dans la mesure où

$$\mathrm{Id}_{\mathcal{S}(E)}\ :\ \mathcal{S}(E)\ \to\ \mathcal{S}(E)$$

est un morphisme de groupes.

b) Étant donnés un groupe G agissant sur un ensemble E par $\phi\ :\ G\ \to\ \mathcal{S}(E)$ tout morphisme $f\ :\ H\ \to\ G$ définit une action $\phi\circ f$ de H sur E. En particulier si G agit sur E, tout sous-groupe H de G agit naturellement sur E à travers l'injection naturelle $H\ \hookrightarrow\ G$.

c) Si $f\ :\ E\ \to\ F$ est une bijection d'un ensemble E sur un ensemble F, l'isomorphisme

$$\mathcal{S}(f)\ :\ \mathcal{S}(E)\ \to\ \mathcal{S}(F)$$

défini à l'exemple II.2.5 , associe à toute action $\phi\ :\ G\ \to\ \mathcal{S}(E)$ d'un groupe G sur E, une action

$$\mathcal{S}(f)\circ\phi\ :\ G\ \to\ \mathcal{S}(F)$$

et l'on a de manière évidente :

$$\forall(g,x)\in G\times E,\ f(g\cdot x)\ =\ g\cdot f(x)\ .$$

Les exemples ci-dessus sont en quelque sorte tautologiques et ne mettent pas en évidence daction de groupes arbitraires (autre que le groupe $\mathcal{S}(E)$.) Or un des intérêts de la notion d'action de groupe est précisément de permettre l'étude d'un certain nombre de propriétés de groupes arbitraires à travers la manière dont ils peuvent agir. Donnons donc quelques exemples plus concrets qui sont cependant très loins d'épuiser la question :

Exemple III.2.6 a) Pour un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V, le groupe linéaire $\mathrm{GL}(V)$ *i.e.* le groupe des applications linéaires bijectives de V dans lui-même agit sur V, puisque $\mathrm{GL}(V)$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}(V)$.

Le groupe $\mathbb{K}^\times$ des éléments inversibles de $\mathbb{K}$ muni de la multiplication s'identifie au sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ formé des homothéties bijectives et agit donc également sur V.

b) Dans le cas où V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une structure euclidienne (voir le chapitre V ,) il résulte du point a que les sous-groupes $\mathcal{O}(V)$ et $\mathcal{SO}(V)$ de $\mathrm{GL}(V)$ agissent également sur V. Il peut être plus intéressant encore de constater qu'ils agissent sur des parties remarquables de V (cf. l'exercice VI.4.1 .)

c) Étant donné un $\mathbb{K}$-espace affine A, le groupe des translations, (resp. le groupe des isométries si A est euclidien) agit sur A [4].

Définition III.2.7 (Applications invariantes/G-morphismes) Étant donnés un groupe G et deux ensembles E et F munis d'actions

$$\phi_E(\text{resp. } \phi_F) \; : \; G \; \to \; \mathcal{S}(E)(\text{resp. } \mathcal{S}(F))$$

de G, on dit qu'une application $f \; : \; E \; \to \; F$ de E dans F est *invariante* si

$$\forall g \in G, \; f \; \circ \phi_E(g) \; = \; \phi_F(g) \; \circ \; f$$

ce qui s'écrit encore

$$\forall (g,x) \in G \times E, \; f(g \cdot_E x) \; = \; g \cdot_F f(x) \; .$$

Le terme de *morphisme de G-ensembles* est synonyme d'application invariante.

Exemple III.2.8 On a vu un exemple d'application invariante au point c de l'exemple III.2.5 mais c'est loin d'être le plus intéressant.

Toute application linéaire $V_1 \; \to \; V_2$ est invariante pour l'action par homothétie (cf. III.2.6. a .)

III.3 . −Orbites

Proposition III.3.1 *Étant donnés un groupe G agissant sur un ensemble E, la relation $\sim$ définie sur E par*

$$\forall x \in E, \, \forall y \in E, \; x \; \sim \; y \; \Leftrightarrow \; \exists g \; \in \; G, \; y \; = \; g \cdot x$$

est une relation d'équivalence (cf. I.2.2. v ,) sur E.

Démonstration : *C'est un exercice.*

Définition III.3.2 (Orbite) Étant donnés un groupe G agissant sur un ensemble E, *i.e.* un G-ensemble E :

i) (**orbite**)

Les classes déquivalence pour la relation définie par la proposition III.3.1 sont appelées *orbites*. Plus précisément pour tout $x \; \in \; E$, la classe de x est appelée *orbite de x sous l'action* de G. On la note usuellement $O_G(x)$ (ou simplement $O(x)$ s'il n'en résulte aucune ambiguîté) et l'on a :

$$O(x) \; = \; \{g \cdot x \; , \; g \in G\} \; .$$

4. On conseille de reconsidérer cet exemple à la lumière du cours de géométrie.

ii) (**point fixe**)
Pour $x \in E$, de manière équivalente, $O(x) = \{x\}$, $O(x)$ est un singleton, $\forall g \in G,\ g \cdot x = x$. On dit alors que x est un *point fixe pour l'action* de G sur E. On dit aussi que l'orbite de x est *triviale*.

Exemple III.3.3 Pour laction de $\mathbb{K}^\times$ sur V par homothétie (cf. III.2.6. a ,) les orbites sont, d'une part l'origine 0_V de V et d'autre part les droites de V privées de l'origine.

Lemme III.3.4 *Étant donné un G-ensemble E, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) Il y a une seule orbite sous l'action de G ;

b) $\forall x \in E,\ O_G(x) = E$;

c) $\forall (x, y) \in E \times E,\ \exists g \in G,\ y = g \cdot x$;

d) $\forall x \in E,\ E = O_G(x)$.

***Démonstration** : (cf. la question 1 de l'exercice III.7.3 .)*

Définition III.3.5 (Action transitive) Si un G-ensemble E vérifie les assertions équivalentes du lemme III.3.4 , on dit que l'action de G sur E est *transitive* ou encore que G agit/opère *transitivement* sur E.

Exemple III.3.6 Si E est un G-ensemble, pour tout $x \in E$, G agit transitivement sur l'orbite $O(x)$ de x.

III.4 . −Stabilisateur d'un élément

Proposition III.4.1 (Stabilisateur d'un élément) *Étant donnée une action d'un groupe G sur un ensemble E, pour tout $x \in E$, l'ensemble :*

$$\mathrm{Stab}_G(x) := \{g \in G\,;\ g \cdot x = x\} \qquad \textit{III.4.1.1}$$

est un sous-groupe de G.

***Démonstration** : C'est un exercice (cf. la question 2 de l'exercice III.7.3 et le point a de la question 3 de l'exercice IV.4.8 dans le cas particulier de l'action par conjugaison.)*

Définition III.4.2 (Stabilisateur) Étant donnée une action d'un groupe G sur un ensemble E, pour tout $x \in E$, le sous-groupe $\mathrm{Stab}_G(x)$ défini en III.4.1.1 est appelé *stabilisateur* de x.

Proposition III.4.3 *Étant donné un G-ensemble E, pour tout $x \in E$, notons $\mathrm{Stab}_G(x)$ le stabilisateur de x pour l'action de G, et*

$$p\ :\ G \to O(x)\ ,\ g \mapsto g \cdot x\ .$$

Alors :

i) L'ensemble des $p^{-1}(\{y\})$ pour $y \in O(x)$, forme une partition de G.

***Démonstration** : (cf. la question 3 de l'exercice III.7.3 .)*

ii) Pour tout $g \in G$,

$$p^{-1}(\{g \cdot x\}) = g * \mathrm{Stab}_G(x) = \{g * h \, , \, h \in \mathrm{Stab}_G(x)\} \, .$$

***Démonstration** : Pour tout* $g \in G$ *et tout* $h \in p^{-1}(\{g \cdot x\})$ *si et seulement si* $p(h) = g \cdot x$ *i.e.*

$$h \cdot x = g \cdot x \Leftrightarrow (g^{-1} * h) \cdot x = x \Leftrightarrow g^{-1} * h \in \mathrm{Stab}_G(x) \Leftrightarrow h \in g * \mathrm{Stab}_G(x) \, .$$

Corollaire III.4.4 *Sous les hypothèses de la proposition III.4.3 , si l'on suppose de plus que* G *est un groupe fini alors :*

$$\forall x \in E, \ \#(G) = \#(\mathrm{Stab}_G(x)) \cdot \#(O(x)) \, .$$

***Démonstration** : C'est une conséquence immédiate de la proposition III.4.3 .*

Proposition III.4.5 *Soit* E *un* G*-ensemble. Pour tout* $x \in E$ *et tout* $g \in G$,

$$\mathrm{Stab}_G(g \cdot x) = g * \mathrm{Stab}_G(X) * g^{-1} := \{g * h * g^{-1} \, , \, h \in \mathrm{Stab}_G(x)\} \, .$$

***Démonstration** : (cf. l'exercice III.7.4 .)*
Pour tout $(x, g, h) \in E \times G \times G$, $h \in \mathrm{Stab}_G(g \cdot x)$ *si et seulement si* $h \cdot (g \cdot x) = g \cdot x$ *si et seulement si*

$$g^{-1} \cdot (h \cdot (g \cdot x)) = x \Leftrightarrow (g^{-1} * h * g) \cdot x = x \Leftrightarrow g^{-1} * h * g \in \mathrm{Stab}_G(x)$$

c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathrm{Stab}_G(x)$ *tel que* $g^{-1} * h * g = k$ *i.e.* $h = g * k * g^{-1}$ *c'est-à-dire finalement que*

$$h \in g * \mathrm{Stab}_G(x) * g^{-1} \, .$$

Les définitions qui suivent sont données pour compléter la présentation des actions de groupe mais il est probable qu'on en fera assez peu usage.

Définition III.4.6 Soit E un G-ensemble.

i) (**Action libre**)
On dit que l'action de G sur E est *libre* (ou encore que G agit/opère *librement*) si pour tout $x \in E$,

$$\mathrm{Stab}_G(x) = \{e\} \, .$$

ii) (**Action fidèle**)
On dit que l'action de G sur E est *fidèle* (ou encore que G agit/opère *fidèlement*) si l'intersection de touts les stabilisateurs des éléments de E est $\{e\}$ ce qui équivaut à dire que le morphisme $G \to \mathcal{S}(E)$ définissant l'action est injectif.

iii) (**ACtion simplement transitive**)
Laction est *simplement transitive* si elle est libre et transitive (cf. III.3.5 .)

III.5 . −Action par translation à gauche

Dans ce paragraphe $(G, *)$ est un groupe (noté seulement G si aucune confusion n'en résulte) et l'on note e son élément neutre.

Lemme III.5.1 *Soit $(G, *)$ un groupe. L'application de $G \times G$ dans G définie par $g \cdot x \ := \ g * x$ est une action de G sur lui-même.*

Démonstration *: On constate d'abord que pour tout $g \ \in \ G$, l'application de G dans lui-même donée par $x \ \mapsto \ g * x$ est bien une bijection de G dans lui-même (i.e. un élément de $\mathcal{S}(G)$,) de bijection réciproque $x \ \mapsto \ g^{-1} * x$.*

En outre

$$\forall (g, h) \in G \times G, \ (g * h) \ \cdot \ x \ = \ (g * h) * x \ = \ g * (h * x) \ = \ g \ \cdot \ (h * x) \ = \ g \ \cdot \ (h \cdot x)$$

ce qui assure qu'on a bien une action.

Définition III.5.2 (Translation à gauche) Étant donné un groupe G, l'action de G sur lui-même définie par le lemme III.5.1 est appelée *action par translation à gauche*.

Il résulte du point b de l'exemple III.2.5 que tout sous-groupe H de G agit encore sur G à travers l'action de G sur lui-même par translation à gauche. Cette action de H sur G est encore appelée *action par translation à gauche de H sur G*.

Remarque III.5.3 Si $P \ \subset \ G$, est une partie de G (*i.e.*

$$P \ \in \ \mathcal{P}(G) \ \underline{\text{pas nécessairement un sous-groupe}}\ , \ )$$

notons

$$\forall g \in G, \ g * P \ := \ \{g * x \ , \ x \ \in \ P\} \ .$$

Alors l'application $G \times \mathcal{P}(G) \ \to \ \mathcal{P}(G)$ définie par $(g, P) \ \mapsto \ g \cdot P \ := \ g * P$ est une action de G sur l'ensemble de ses parties, qu'on apellera encore action par translation à gauche. Elle induit encore une action par translation à gauche de tout sous-groupe H de G sur $\mathcal{P}(G)$.

Notation III.5.4 On a vu à la proposition III.3.1 que, dès que E est un G-ensemble, l'action de G sur E induit une relation d'équivalence $\sim$. Dans le cas de l'action de H sur G par translation à gauche on notera parfois $\sim_{H,g}$ cette relation. Elle prend une forme suffisamment particulière dans ce cas pour qu'on l'explicite :

$$\begin{array}{lrcl}
\forall (x, y) \in G \times G, & x & \sim_{H,g} & y \\
\Leftrightarrow & \exists h \ \in \ H, \ y & = & h \cdot x \\
\Leftrightarrow & y & = & h * x \\
\Leftrightarrow & y * x^{-1} & \in & H \\
\Leftrightarrow & x * y^{-1} & \in & H \ .
\end{array}$$

Remarque III.5.5 Soit $(G, *)$ un groupe.

i) L'application de $G \times G$ dans G définie par $g \cdot x \ := \ x * g$ est une *action à droite* de G sur lui-même. Elle est appelée *action par translation à droite*.

La notion d'action à droite ne sera pass développée ni utilisée dans ce qui suit. Disons simplement que la formule

$$(g * h) \cdot x \ = \ g \cdot (h \cdot x)$$

qui caractérise les actions à gauches est remplacée par

$$(g * h) \cdot x \ = \ h \cdot (g \cdot x) \ .$$

ii) Il résulte du point b de l'exemple III.2.5 que tout sous-groupe H de G agit encore sur G à travers l'action de G sur lui-même par translation à droite. Cette action de H sur G est encore appelée *action par translation à droite de H sur G.*

iii) Si $P \subset G$, est une partie de G (*i.e.* $P \in \mathcal{P}(G)$ pas nécessairement un sous-groupe,) notons

$$\forall g \in G,\ P * g := \{x * g\ ,\ x \in P\}\ .$$

Alors l'application $G \times \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(G)$ définie par $(g, P) \mapsto g \cdot P := P * g$ est une action à droite de G sur l'ensemble de ses parties, qu'on apellera encore action par translation à droite. Elle induit encore une action par translation à droite de tout sous-groupe H de G sur $\mathcal{P}(G)$.

iv) On a vu à la proposition III.3.1 que, dès que E est un G-ensemble, l'action de G sur E induit une relation d'équivalence $\sim$. Dans le cas de l'action de H sur G par translation à droite on notera parfois $\sim_{H,d}$ cette relation. Elle prend une forme suffisamment particulière dans ce cas pour qu'on l'explicite :

$$\begin{array}{llcl} \forall(x,y) \in G \times G, & x & \sim_{H,d} & y \\ \Leftrightarrow & \exists h \in H,\ y & = & h \cdot x \\ \Leftrightarrow & y & = & x * h \\ \Leftrightarrow & x^{-1} * y & \in & H \\ \Leftrightarrow & y^{-1} * x & \in & H\ . \end{array}$$

Définition III.5.6 (Classes à gauche/droite) Étant donnés un groupe G et un sous-groupe H de G, les classes d'équivalence pour la relation $\sim_{H,g}$, (cf. III.5.4 ,) qui sont aussi les orbites (cf. III.3.2. i ,) pour l'action par translation à gauche, sont appelées *classes à gauche*. L'ensemble de ses classes est noté $G/{\sim_{H,g}}$.

On a une définition analogue de *classes à droite* en utilisant la relation $\sim_{H,d}$ (cf. III.5.5. iv ,) dont l'ensemble est noté $G/{\sim_{H,d}}$.

Proposition III.5.7 *Soit G un groupe et H un sous-groupe de g. On considère l'action de H sur G par translation à gauche. Alors :*

i) Pour tout $x \in G$, l'application

$$p\ :\ H \to O(x)\ ,\ g \mapsto g \cdot x$$

définie comme dans la proposition III.4.3 est bijective.

Démonstration : *Pour tout $x \in G$, considérons l'application*

$$p\ :\ H \to O(x)\ ,\ g \mapsto g \cdot x$$

comme à la proposition III.4.3 . Il résulte alors du point ii de la proposition III.4.3 que

$$\forall y \in O(x),\ p^{-1}(\{y\}) \cong \mathrm{Stab}_H(x)\ .$$

Or $g \in \mathrm{Stab}_H(x)$ si et seulement si $g \cdot x = x$, si et seulement si $g * x = x$ si et seulement si $g = e$. Le sous-groupe $\mathrm{Stab}_H(x)$ de H est donc un singleton. Ainsi en va-t-il donc aussi de $p^{-1}(\{y\})$ c'est-à-dire que $p : H \to O(x)$ est bijective.

ii) H est l'orbite de l'élément neutre e et la seule qui soit un sous-groupe de G.

***Démonstration** : En effet*

$$O(e) = \{h \cdot e\ ,\ h \in H\} = \{h * e\ ,\ h \in H\} = \{h \in H\} = H\ .$$

Pour $x \in G$, si $O(x)$ est un sous-groupe $e \in O(x)$ et par conséquent $O(x) = O(e)$.

iii) Il existe une bijection entre l'ensemble $G/{\sim_{H,g}}$ des classes à gauche et l'ensemble $G/{\sim_{H,d}}$ des classes à droite.

iv) Si G est fini, i.e. G est un ensemble fini alors il en est de même de H et de l'ensemble $G/\sim$ des orbites et l'on a :

$$\#(G) = \#(H) * \#(G/\sim)\ .$$

***Démonstration** : Puisque les orbites sous l'action de G sont des classes d'équivalence , elles réalisent une partition de G. Si G est fini, les orbites sont donc toutes des sous-ensembles finis ($H = O(e)$ en particulier) et en nombre fini i.e. $G/\sim$ est aussi un ensemble fini. En posant $\#(G/\sim) = k \in \mathbb{N}$, choisissons $(x_i)_{1 \leq i \leq k}$ des éléments de G tels que*

$$\forall (i,j) \in [1;k] \times [1;k],\ i \neq j \Rightarrow O(x_i) \cap O(x_j) = \emptyset$$

autrement dit un représentant par orbite. On a alors $G = \bigcap_{1 \leq i \leq k} O(x_i)$ ce qui entraîne

$$\#(G) = \sum_{i=1}^{k} \#(O(x_i))\ .$$

Or il découle du point i que $\forall 1 \leq i \leq k,\ \#(O(x_i)) = \#(H)$ d'où il résulte finalement que

$$\#(G) = k * \#(H) = \#(G/\sim) * \#(H)\ .$$

Remarque III.5.8 Le point i de la proposition III.5.7 pourrait se reformuler en disant que l'action par translation à gauche (resp. à droite) est libre (cf. III.4.6. i .)

Définition III.5.9 (Indice d'un sous-groupe) Étant donnés un groupe G et un sous-groupe H de G, si l'ensemble $G/{\sim_{H,g}}$, est fini son cardinal, qui est aussi celui de $G/{\sim_{H,d}}$, est appelé *indice de H dans G*.

III.6 . −Action par conjugaison

Dans cette section $(G, *)$ (le plus souvent abrégé en G) est un groupe dont on note e l'élément neutre.

Lemme III.6.1 *Étant donné un groupe G, pour tout $g \in G$, l'application $x \mapsto g * x * g^{-1}$ est un automorphisme de groupe de G (cf. II.2.6. ii .)*

***Démonstration** : Tout d'abord*

$$\forall (g,x,y) \in G \times G \times G,\ g * x * y * g^{-1} = g * x * g^{-1} * g * y * g^{-1}$$

si bien que $x \mapsto g * x * g^{-1}$ est bien un morphisme de G dans luie-même (on pourrait dire un endomorphisme de G.)

Par ailleurs,

$$\forall (g,x) \in G \times G,\ (g^{-1}) * g * x * g^{-1} * (g^{-1})^{-1} = x$$

si bien que $x \mapsto (g^{-1}) * x * (g^{-1})^{-1}$ est l'application réciproque de $x \mapsto g * x * g^{-1}$ cette dernière étant donc bijective donc un isomorphisme et finalement un automorphisme (isomorphisme et endomorphisme.)

Lemme III.6.2 *L'application de $G \times G$ dans G donnée par $(g, x) \mapsto g \cdot x := g * x * g^{-1}$ définit une action de G sur lui-même.*

***Démonstration** : On a vu au lemme III.6.1 que $x \mapsto g * x * g^{-1}$ est un automorphisme de G donc en particulier une bijection de G sur lui-même i.e. un élément de $\mathcal{S}(G)$ (cf. II.1.2. c .)*

De plus

$$\begin{aligned} \forall (g, h, x) \in G \times G \times G, \quad (g * h) \cdot x &= g * h * x * g * h^{-1} \\ &= g * h * x * h^{-1} * g^{-1} \\ &= g \cdot (h * x * h^{-1}) \\ &= g \cdot (h \cdot x) \end{aligned}$$

ce qui prouve qu'on a bien défini une action.

Définition III.6.3 (Action par conjugaison) Soit G un groupe :

i) L'action de G sur lui-même définie par le lemme III.6.2 s'appelle *action par conjugaison* de G sur lui-même.

ii) Les orbites (cf. III.3.2. i ,) pour l'action par conjugaison sont usuellement appelées *classes de conjugaison*.

iii) Deux élément appartenant à la même orbite, ou de manière équivalente, en relation par la relation $\sim$ (cf. III.3.1 ,) sont dits *conjugués*. Ainsi explicitement, $(x, y) \in G \times G$ sont conjugués s'il existe z (appartenant à G ou à un sous-groupe selon l'action considérée,) tel que $y = z * x * z^{-1}$.

iv) Il résulte du point b de l'exemple III.2.5 que tout sous-groupe H de G agit encore sur G à travers l'action de G sur lui-même par conjugaison. Cette action de H sur G est encore appelée *action par conjugaison de H sur G.*

Remarque III.6.4 Si $P \subset G$, est une partie de G,
(*i.e.* $P \in \mathcal{P}(G)$, pas nécessairement un sous-groupe,) notons

$$\forall g \in G, \ g * P * g^{-1} := \{g * x * g^{-1} \, , \, x \in P\} \, .$$

Alors l'application $G \times \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(G)$ définie par $(g, P) \mapsto g \cdot P := g * P * g^{-1}$ est une action de G sur l'ensemble de ses parties, qu'on apellera encore action par conjugaison. Elle induit encore une action par conjugaison de tout sous-groupe H de G sur $\mathcal{P}(G)$.

Proposition III.6.5 *Étant donné un groupe $(G, *)$ on note $\mathcal{G}$ l'ensemble de ses sous-groupes. Pour tout $g \in G$, et $H \in \mathcal{G}$ on note :*

$$g * H * g^{-1} := \{g * x * g^{-1} \, , \, x \in H\} \, . \qquad \text{III.6.5.1}$$

Alors :

i) Pour tout $H \in \mathcal{G}$ $g * H * g^{-1}$ est un sous-groupe de G i.e. un élément de $\mathcal{G}$.

***Démonstration** : Étant donné un sous-groupe H de G et $g \in G$, $g * H * g^{-1}$ n'est autre que l'image de H par l'application $x \mapsto g * x * g^{-1}$ dont on a montré au lemme III.6.1 que c'est un morphisme de groupe. L'ensemble $g * H * g^{-1}$ est donc un groupe.*

ii) L'application

$$G \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}\ ,\ (g, H) \mapsto g * H * g^{-1}$$

est une action de G sur $\mathcal{G}$ qui sera encore apppelée action par conjugaison.

***Démonstration** : Voir l'exercice III.7.6 .*

III.7 . −Exercices

Exercice III.7.1 (Quelques résultats du cours (relations d'équivalence (cf. III.1)) 1) (Classes d'équivalence)

Faire la preuve du lemme III.1.2 .

2) (Partitions)

Donner la preuve de la proposition III.1.4 .

3) (Applications surjectives)

Faire la preuve de la proposition III.1.6 .

Exercice III.7.2 (Relation d'équivalence sur $\mathcal{S}(E)$) Dans la suite, on considère un ensemble E et $x \notin E$. On note $F := E \cup \{x\}$.

Le groupe $(\mathcal{S}(E), \circ)$ est celui considéré à l'exercice II.5.4 et au point c de l'exemple II.1.2 .

On définit sur $\mathcal{S}(F)$ la relation $\sim_x$ par

$$\forall (f, g) \in \mathcal{S}(F) \times \mathcal{S}(F),\ f \sim_x g \Leftrightarrow f(x) = g(x)\ .$$

1) ($\sim_x$)

Montrer que $\sim_x$ est une relation d'équivalence .

Dans la suite on notera, pour tout $f \in \mathcal{S}(F)$, $\overline{f}_x$ sa classe d'équivalence pour la relation $\sim_x$ et $\mathcal{S}(F)/\sim_x$ l'ensemble des classes d'équivalence dans $\mathcal{S}(F)$ pour la relation $\sim_x$.

2) (Partition)

Justifier que

$$\mathcal{S}(f) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{S}(F)/\sim_x} \alpha\ .$$

3) (La bijection $\overline{f}_x \cong \mathcal{S}(E)$)

a) Pour tout $f \in \mathcal{S}(F)$, tout $(g, h) \in \overline{f}_x \times \overline{f}_x$, montrer que :

i)

$$g^{-1} \circ h(E) \subset E$$

ii) et que la restriction $g^{-1} \circ h_{|E}$ de $g^{-1} \circ h$ à E est un élément de $\mathcal{S}(E)$.

b) Déduire de ce qui précède, que pour tout $f \in \mathcal{S}(F)$, l'application

$$\psi_f \ : \ \overline{f}_x \ \to \ \mathcal{S}(E) \ , \ g \ \mapsto \ f^{-1} \circ g_{|E}$$

est une bijection.

4) (Quotient)
Pour tout $f \in \mathcal{S}(F)$ **on pose** $\lambda(f) \ := \ f(x)$ **et pour tout** $y \in F$, **on définit** $t_y \ : \ F \ \to \ F$ **par :**

$$t_y(x) \ = \ y \ , \ t_y(y) \ = \ x \ , \ \forall z \in F, \ z \ \neq \ x \text{ et } z \neq y \ \Rightarrow \ t_y(z) \ = \ z \ .$$

a) Montrer que

$$\forall y \in F, \ t_y \ \in \ \mathcal{S}(F) \ .$$

b) Calculer $\lambda(t_y)$.

c) En déduire que λ est surjective.

5) (Factorisation : application quotient)
L'application λ **étant définie comme à la question 4 , on définit**

$$\overline{\lambda} \ : \ \mathcal{S}(F)/ \sim_x \to \ F \ , \ \alpha \ \mapsto \ \lambda(f) \ \forall f \ \in \alpha \ .$$

a) Montrer que $\overline{\lambda}$ est bien définie.

b) Montrer que $\overline{\lambda}$ est surjective.

c) Montrer finalement que $\overline{\lambda}$ est bijective.

6) (Calcul du nombre d'éléments de $\mathcal{S}(E)$)
On suppose dans cette question que E est un ensemble fini.

a) Montrer que si l'on suppose que $\mathcal{S}(E)$ est fini alors $\mathcal{S}(F)$ est fini et donner, dans ce cas, une relation entre $\#(\mathcal{S}(E))$, $\#(F)$, et $\#(\mathcal{S}(F))$.
Indication : *On pourrra utiliser la question 2 , le point b de la question 3 et le point c de la question 5* .

b) Montrer finalement que si E est un ensemble fini, $\mathcal{S}(E)$ est fini et donner $\#(\mathcal{S}(E))$ en fonction de $\#(E)$.

Exercice III.7.3 Quelques résultats du cours à propos des actions de groupe (cf. III.2)

1) Faire la preuve du lemme III.3.4

2) Faire la preuve de la proposition III.4.1 .

3) Faire la preuve du point i de la proposition III.4.3 .

Exercice III.7.4 (Stabilisateur) Soit $(G,*)$ un groupe et E un ensemble muni d'une action de G notée $g\cdot x$ pour tout $(g,x) \in G\times E$.

Montrer que pour tout $(x,g) \in E\times G$,

$$\mathrm{Stab}_G(g\cdot x) = g * \mathrm{Stab}_G(x) * g^{-1} .$$

Exercice III.7.5 Considérons l'action par translation à gauche sur les parties de G définie en III.5.3 .

1) Montrer que cette action ne se restreint pas en général en une action de G sur l'ensemble de ses sous-groupes.

2) Montrer que l'orbite $O(P)$ d'une partie $P \in \mathcal{P}(G)$ contient au plus un sous-groupe.

Exercice III.7.6 Faire la preuve du point ii de la proposition III.6.5 .

Exercice III.7.7 (Points fixes d'une action) Soit E un ensemble fini muni d'une action $\cdot : G\times E \to E$ d'un groupe fini G. On note

$$E_G := \{x \in E\,;\, \forall g\in G,\ g\cdot x = x\}$$

qu'on appelle l'*ensemble des points fixes pour l'action* de G sur E.

1) On suppose que

$$E_G = \emptyset\ ,\ \#(G) = 15 \text{ et } \#(E) = 17\ .$$

Quel est alors le nombre d'orbites et le cardinal de chacune d'elles ?

2) On suppose que

$$\#(G) = 33 \text{ et } \#(E) = 19\ .$$

Montrer que E_G ne peut pas être vide.

Exercice III.7.8 (Sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$) On rappelle que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices $n\times n$ à coefficients réels dont on a déjà montré (cf. la question 1 de l'exercice II.5.7 ,) que c'est un groupe pour la multiplication (au moins dans le cas $n=2$.) L'argument pour n quelconque étant exactement le même on ne cherchera pas à le redémontrer.

1) On note

$$G := \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}\ .$$

a) Montrer que G est un sous-ghroupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Pour tout $(g,x) \in G\times\mathbb{R}^2$ on note gx le produit (matriciel) de la matrice carré g par le vecteur $x := \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, c'est-à-dire l'image du vecteur x par l'application linéaire associée à g dans la base canonique.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, que vaut

$$\sum_{g\,\in\,G} gx\ ?$$

c) Quels sont les éléments de G pour lesquels 1 est valeur propre ?

2) Le groupe G est celui défini ci-dessus à la question 1 . On peut, dans cette question, considérer comme acquis les résultats établis ci-dessus.

Soit

$$\mathcal{C} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} x \in \{-1, 0, 1\}, y \in \{-1, 0, 1\} \right\} \subset \mathbb{R}^2 .$$

a) Que vaut $\#(\mathcal{C})$?

b) Montrer que G agit sur $\mathcal{C}$ par

$$\cdot : G \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} , (g, v) \mapsto gv .$$

c) Déterminer les orbites de l'action de G sur $\mathcal{C}$ et pour chacune d'entre elles le stabilisateur d'un de ses éléments.

d) L'action de G sur $\mathcal{C}$ est-elle transitive ?

3) Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\sum_{g \in G} gx \neq 0 .$$

a) Montrer qu'alors 1 est valeur propre de g pour tout $g \in G$.
Indication : *Calculer* $h \sum_{g \in G} gx$.

b) La conclusion vaut-elle encore si l'on ne suppose pas l'existence de $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{g \in G} g(x) \neq 0$?

Exercice III.7.9 (Actions deux fois transitives) Soit G un groupe opérant (agissant) sur un ensemble X.

1) Que signifie la phrase « G opère transitivement sur X » ?

On fait opérer G sur $X \times X$ par :

$$g \cdot (x, y) := (g \cdot x, g \cdot y) .$$

2) Vérifier que la formule ci-dessus définit bien une action de G sur $X \times X$.

On note

$$\Delta := \{(x, x) , x \in X\} .$$

On note dans toute la suite

$$Y := (X \times X) \setminus \Delta = \{(x, y) , x \in X , y \in X , x \neq y\} .$$

3) (Stabilité)
Montrer que Δ et $Y := (X \times X) \setminus \Delta$ sont stables par laction de G sur $X \times X$.

4) En déduire que laction de G sur $X \times X$ se restreint d'une part en une action sur Δ et d'autre part en une action sur Y.

On dit que l'action de G sur X est *doublement transitive* si l'action induite de G sur $Y = (X \times X) \setminus \Delta$ est transitive ; c'est-à-dire que

$$\forall (x, y, z, t) \in X \times X \times X \times X,\ x \neq y\ ,\ z \neq t\ ,\ \exists g \in G,\ g \cdot x = z\ ,\ g \cdot y = t \textit{ \textbf{i.e.} } g \cdot (x, y) = (z, t)\ .$$

On suppose désormais que G agit de manière doublement transitive sur X.

5) **Soit $a \in X$ et G_a le stabilisateur de a. Pour tout $g \in G$ on note**

$$G_a^g := G_a * g * G_a := \{h * g * k\ ,\ (h, k) \in G_a \times G_a\}\ .$$

Montrer que si $g \notin G_a$ G est la réunion disjointe de G_a et de G_a^g *i.e.*

$$G = G_a \cup G_a^g \text{ et } G_a \cap G_a^g = \emptyset\ .$$

Indication : *Si $h \notin G_a$, on posera $b := g \cdot a$, $c := h \cdot a$ et on appliquera la double transitivité aux couples (a, b) et (a, c).*

6) **Soit E un espace vectoriel de dimension finie ≥ 2 sur un corps commutatif $\mathbb{K}$. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites de E.**

a) Rappeler comment $\mathrm{GL}(E)$ agit sur $\mathcal{D}$.

b) Montrer que l'action ainsi définie est doublement transitive.

7) Montrer à l'aide des questions précédentes que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ est la réunion disjointe de B et de $B\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}B$ avec

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\ ,\ (a, b, c) \in \mathbb{K}^\times \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}^\times \right\}\ .$$

Exercice III.7.10 (Formule de BURNSIDE) **Soit $(G, *)$ un groupe dont on note 1 l'élément neutre et E un G-ensemble, c'est-à-dire un ensemble muni d'une action de G notée**

$$\cdot\ :\ G \times E \to E\ ,\ (g, x) \mapsto g \cdot x\ .$$

1) **(Cours)**

a) Rappeler ce que signifie que E est un G-ensemble ou de manière équivalente que G agit sur E.

b) Pour tout $x \in E$, qu'appelle-t-on l'orbite $O(x)$ de x sous l'action de G ?

c) Pour tout $x \in E$, qu'appelle-t-on le stabilisateur $\mathrm{Stab}_G(x)$ de x sous l'action de G ?

On suppose désormais que G et E sont finis.

2) (**Orbites et stabilisateurs**)

a) Montrer qu'il y a un nombre fini d'orbites $O(x_i)_{,1 \leq i \leq k}$ pour l'action de G sur E et que chacune d'entre elles est un ensemble fini.

b) Pour tout $x \in E$ rappeler (sans démonstration) la relation liant

$$\#(G)\ ,\ \#\big(\mathrm{Stab}_G(x)\big) \text{ et } \#\big(O(x)\big)\ .$$

Pour tout $g \in E$, **on note**

$$\mathrm{Fix}_E(g) \ := \ \{x \in E\ ;\ g\cdot x = x\} \text{ (\textbf{ou simplement}) } \mathrm{Fix}(g)\ .$$

On note

$$F \ := \ \{(g,x) \in G\times E\ ;\ g\cdot x = x\},$$

$$\begin{array}{rrcl} p: & F & \to & G \\ & (g,x) & \mapsto & g \\ q: & F & \to & E \\ & (g,x) & \mapsto & x\ . \end{array}$$

3) (**L'ensemble** F)
Représenter graphiquement l'ensemble F correspondant à :

a) l'action de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) sur $\{1,2,3\}$ définie à .

b) l'action étudiée à .

4) (**Formule de Burnside**)

a) Décrire en fonction des objets dont on a rappelé ou donné la définition dans ce problème

$$p^{-1}(\{g\})_{,g\in G} \text{ et } q^{-1}(\{x\})_{,x\in E}\ .$$

b) Montrer que

$$F \ = \ \coprod_{x\,\in\,E} q^{-1}(\{x\}) \ = \ \coprod_{g\,\in\,G} p^{-1}(\{g\}),$$

(en particulier

$$\forall (x,y)\in E\times E,\ q^{-1}(\{x\}) \cap q^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset \Rightarrow q^{-1}(\{x\}) = q^{-1}(\{y\})$$

et

$$\forall (g,h)\in G\times G,\ p^{-1}(\{g\}) \cap p^{-1}(\{h\}) \neq \emptyset \Rightarrow p^{-1}(\{g\}) = p^{-1}(\{h\})\ .$$

)

c) On rappelle qu'on a noté k le nombre d'orbites sous l'action de G sur E (cf. 2. a .) En écrivant $\#(F)$ de deux manières différentes établir la *formule de* BURNSIDE :

$$k \;=\; \frac{1}{\#(G)} \sum_{g \,\in\, G} \#\big(\mathrm{Fix}(g)\big) \;.$$

Exercice III.7.11 (Carrés 3×3) Notons $C := [1;3] \times [1;3]$. Dans cet exercice, on appellera simplement *carré* la donnée d'une application bijective $C \to \{1, \ldots, 9\}$. Un exemple est représenté de façon visuelle ci-dessous :

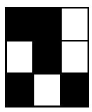
1	2	3
4	5	6
7	8	9

1) Combien existe-t-il de carrés ?

2) Si on identifie deux carrés qui sont obtenus l'un de l'autre par permutation des lignes, combien y a-t-il de possibilités ?

3) On s'autorise maintenant à faire des permutations des lignes et des permutations des colonnes, et ce dans un ordre arbitraire. Pour la relation d'équivalence correspondante, combien y a-t-il de classes d'équivalence de carrés ?

4) On s'intéresse maintenant à des *tableaux*, qui seront ici définies comme étant des applications $C \to \{0, 1\}$. On peut les représenter en utilisant deux couleurs (noir pour la valeur 1, blanc pour 0) :



a) Combien y a-t-il de tableaux ?

b) Si on identifie deux tableaux qui sont obtenus l'un de l'autre par permutation des lignes, combien y a-t-il de possibilités ?

c) Si on identifie deux tableaux qui sont obtenus l'un de l'autre par permutation des lignes et par une éventuelle inversion des couleurs, combien y a-t-il de possibilités ?

5) On s'autorise maintenant à faire des permutations des lignes et des permutations des colonnes, et ce dans un ordre arbitraire. Pour la relation d'équivalence correspondante, combien y a-t-il de classes d'équivalence de tableaux ?