V . −Espaces euclidiens

Dans cette section (V,) $\mathbb{K}$ est un corps (cf. V.0.3,) E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (cf. V.0.4,) de dimension finie $d \in \mathbb{N}^*$.

V.0 . −Brefs rappels d'algèbre linéaire

Définition V.0.1 (Anneau) Un *anneau* est un triplet $(A, +, *)$ (le plus souvent noté A,) tel que :

Ann$_1$) Le couple $(A, +)$ est un groupe abélien (cf. II.1.4 ;)
et la loi $* : A \times A \to A$ vérifie :

Ann$_2$) pour tout triplet (x, y, z) d'éléments de A,

$$x * (y * z) = (x * y) * z ,$$

(la loi $*$ est *associative*) ;

Ann$_3$) il existe un élément 1_A de A, appelé *élément neutre de* $(A, *)$, (souvent noté 1 lorsque le contexte est clair) tel que, pour tout $x \in A$,

$$1_A * x = x * 1_A = x ;$$

(on supposera toujours que $1_A \neq 0_A$ où 0_A est l'élément neutre pour la loi $+$;)

Ann$_4$) pour tout triplet (x, y, z) d'éléments de A,

$$x * (y + z) = x * y + x * z, \text{ et } (x + y) * z = x * z + y * z ,$$

(la loi $*$ est *distributive* par rapport à la loi $+$.)

On dira aussi que les lois $+$ et $*$ *donnent à l'ensemble A une structure d'anneau*.

La loi $+$ est usuellement appelée *addition* et la loi $*$ *multiplication*, par analogie avec l'anneau "modèle" $(\mathbb{Z}, +, *)$. Pour tout couple (x, y) d'éléments de A, on appellera $x + y$ et $x * y$ respectivement *somme* et *produit* de x et y.

On remarque que pour tout $x \in A$,

$$0_A * x = x * 0_A = 0_A .$$

On dit que 0_A est un *élément absorbant*.

Définition V.0.2 (Anneau commutatif) Étant donné un anneau $(A, +, *)$, si

$$\forall (x, y) \in A \times A,\ x * y = y * x$$

on dira que la loi $*$ est *commutative* ou encore que l'anneau $(A, +, *)$ est un *anneau commutatif.*

Définition V.0.3 (Corps) Un anneau commutatif $(A, +, *)$ est un *corps* si tous les éléments de A différents de 0_A possèdent un inverse pour la loi $*$; *i.e.* $A^\times = A \setminus \{0_A\}$. Un corps et bien évidemment un anneau intègre ; mais l'anneau $\mathbb{Z}$, par exemple, est un anneau intègre sans pour autant être un corps.

Définition V.0.4 (Espace vectoriel) Étant donné un corps $\mathbb{K}$, on rappelle qu'un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* est un triplet $(E, +, \cdot)$ (simplement noté E si cela ne doit être à l'origine d'aucune confusion,) tel que :

Vect$_0$) Le couple $(E, +)$ est un groupe abélien (cf. II.1.4 ;)

$\cdot\ :\ \mathbb{K}\times E\ \to\ E$, appelée *application de structure* vérifie :

Vect$_1$) $\forall(a,x,y)\in\mathbb{K}\times E\times E,\ a\cdot x+y\ =\ a\cdot x+a\cdot y$;

Vect$_2$) $\forall(a,b,x)\in\mathbb{K}\times\mathbb{K}\times E,\ a+b\cdot x\ =\ a\cdot x+b\cdot x$;

Vect$_3$) $\forall(a,b,x)\in\mathbb{K}\times\mathbb{K}\times E,\ a*b\cdot x\ =\ a\cdot(b\cdot x)$;

Vect$_4$) $\forall x\in E,\ 1\cdot x\ =\ x$.

Une application $f\ :\ E\ \to\ F$ est une *application linéaire* si :

Vect$_5$) $f\ :\ (E,+_E)\ \to\ (F,+_F)$ est un morphisme de groupes (cf. II.2.1 ;)

Vect$_6$) pour tout $a\ \in\ \mathbb{K}$ et tout $x\ \in\ E$,

$$f(a\cdot_E x)\ =\ a\cdot_F f(x)\ .$$

Rappel V.0.5 (Espaces vectoriels) On rappelle ici un certain nombre de résultats d'algèbre linéaire qui font partie du programme de L1 ou de L2 et dont on ne redonne évidemment pas les preuves. Cela permettra égalment de fixer quelques notations qui seront réutilisées dans la suite du texte.

Soit donc un corps $\mathbb{K}$ (cf. V.0.3,) et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (cf. V.0.4.)

i) (**Partie génératrice**)
une partie $S\ \subset\ E$ est une *partie génératrice* de E si E est le plus petit sous espace de E contenant S ce qui revient à dire que E est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de S à coefficients dans $\mathbb{K}$

ii) (**Partie libre**)
une partie $S\ \subset\ E$ est une *partie libre* de E si
pour tout $n\ \in\ \mathbb{N}$, tout n-uplet $(s_i)_{1\ \leq\ i\ \leq\ n}\ \in\ S$, d'éléments deux à deux distincts de s, et tout n-uplet $(a_i)_{1\ \leq\ i\ \leq\ n}\ \in\ \mathbb{K}$,

$$\sum_{i=1}^{n}a_is_i\ =\ 0\ \Rightarrow\ \forall i\leq 1\leq n,\ a_i\ =\ 0\ ;$$

iii) (**base**)
Une *base* de E est une partie de E à la fois libre et génératrice .

iv) (**Propriétés des bases, dimension**)

a) Une partie libre de E peut toujours se compléter en une base.

b) Un espace vectoriel possède toujours une base.

c) Si un espace vectoriel E possède une base qui est une partie finie à $d\ \in\ \mathbb{N}$ éléments de E, alors toutes les bases de E sont des ensembles à d éléments ; et d s'appelle la *dimension* de E qui est notée $\dim_{\mathbb{K}} E$ ou même simplement $\dim E$ s'il n'y a aucune ambiguîté quant au corps considéré. On dit alors que E est *de dimension finie*.

Rappel V.0.6 (Applications linéaires) On a rappelé la définition d'*application linéaire* (cf. V.0.4,) il nous arrivera parfois d'employer le terme *morphisme d'espaces vectoriels* ou même *morphisme* si le contexte est clair comme synonyme d'application linéaire.

Soit $u : E \to F$ une *application linéaire* (ou morphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels :)

i) (**application linéaire surjective**)
une *application linéaire* $u : E \to F$ est surjective si et seulement si il existe une partie génératrice de E dont l'image est une partie génératrice de F, si et seulement si il existe une partie de E dont l'image est une partie génératrice de F, si et seulement si l'image de toute partie générratrice de E est une partie génératrice de F , si et seulement si $\operatorname{Im} u = F$;

ii) (**application linéaire injective**)
une application linéaire $u : E \to F$ est injective si et seulement si l'image de toute partie libre de E est une partie libre de F, si et seulement si $\operatorname{Ker} u = 0$;

iii) (**Isomorphisme**)
Une application linéaire $u : E \to F$ est un isomorphisme si et seulement si c'est une application linéaire bijective (cf. II.2.4, .)

iv) (**isomorphisme**)
une application linéaire $u : E \to F$ est bijective *i.e.* un isomorphisme (cf. II.2.3, proposition II.2.4,) si et seulement si l'image de toute base de E est une base de F, si et seulement si il existe une base de E dont l'image est une base de F ;

v) Étant donnée une base $\mathcal{B}$ de E et une application $f : \mathcal{B} \to F$, il existe une unique application linéaire

$$u : E \to F \text{ tel que } \forall b \in \mathcal{B},\ u(b) = f(b)$$

Rappel V.0.7 (Sous-espaces vectoriels) Étant donné un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E (cf. V.0.4 :)

a) un sous-espace F est un sous-groupe de E tel que
$\forall (a, x) \in \mathbb{K} \times F,\ a \cdot x \in F$.

b) une partie $F \subset E$ est un sous-espace de E si et seulement si

$$F \neq \emptyset \text{ et } \forall (a, b, x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times F \times F,\ a \cdot x + b \cdot y \in F \ ;$$

c) un sous-espace F possède toujours un supplémentaire G, *i.e.* il existe un sous-espace

$$G \text{ tel que } E = F \oplus G \text{ (cf. V.0.5.iv.a.)}$$

Proposition V.0.8 (Principe de conjugaison) *Soient $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espacevectoriel,*

$$(f, g) \in \operatorname{End}(E) \times \operatorname{End}(E) \textit{ des endomorphismes de } E \textit{ avec } f \textit{ inversible.}$$

i) ***(Sous-espaces stables)***
Un sous-espace $F \subset E$ est stable sous g (i.e. $g(F) \subset F$,) si et seulement si $f(F)$ est stable sous $f * g * f^{-1}$.

ii) ***(Valeurs/vecteurs propres)***

Un couple $(x, \lambda) \in E \times \mathbb{K}$, est un couple vecteur propre valeur propre pour g (i.e. $g(x) = \lambda x$ et $x \neq 0$,) si et seulement si $(f(x), \lambda)$ est un couple vecteur propres, valeur propre pour $f * g * f^{-1}$.

V.1 . −Formes bilinéaires, formes quadratiques

Dans ce paragraphe (V.1,) on considère un corps $\mathbb{K}$ qui ne soit pas de caractéristique 2 ; c'est-à-dire dans lequel 2 possède un inverse. C'est évidemment le cas de $\mathbb{Q}$ $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$; nous nous limiterons d'ailleurs à ce dernier au paragraphe V.2.

Les corps de caracgtéristique 2 sont ceux qui contiennent $\mathbb{F}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ comme sous-corps. La présentation de ce paragraphe ne leur est pas adaptée et l'on doit procéder différemment.

Définition V.1.1 (Bilinéarité) Étant donnés des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (cf. V.0.4,) E, F, G :

i) **(Application bilinéaire)**

Une *application bilinéaire* de $E \times F$ dans G est une application

$$\begin{array}{lrcl} \phi : E \times F \to G \text{ telle que} & & & \\ \forall (x, y, z, t) \in E \times 3 \times F \times F,\ \forall (a, b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}, & \phi(ax + by, z) & = & a\phi(x, z) + b\phi(y, z) \\ \text{et} & \phi(x, az + bt) & = & a\phi(x, z) + b\phi(x, t)\ . \end{array}$$

On note $\mathbb{B}(E, F, G)$ l'ensemble des applications bilinéaires de $E \times F$ dans G, dont on constate presqu'immédiatement que c'est un sous-espaces vectoriel de l'ensemble $G^{E \times F}$ des applications de $E \times F$ dans G.

ii) **(Forme bilinéaire)**

Dans le cas où $G = \mathbb{K}$, on dit qu'un élément de $\mathbb{B}(E, F, \mathbb{K})$ est une *forme bilinéaire* sur $E \times F$.

Dans le cas (qui nous intéressera d'ailleurs dans la suite) où $E = F$, on parlera de *forme bilinéaire sur E*.

iii) **(Forme bilinéaire symétrique)**

Une forme bilinéaire ϕ sur E est *symétrique* (resp. *antisymétrique*,) si :

$$\forall (x, y) \in E \times E,\ \phi(x, y) = \phi(y, x)\ \text{(resp. } \phi(x, y) = -\phi(y, x) \text{ ;)} \qquad 1$$

Définition V.1.2 (Forme quadratique) Une *forme quadratique* sur E est une application

$$\chi : E \to \mathbb{K} \text{ telle qu'il existe une forme bilinéaire symétrique (cf. V.1.1.iii ,)}$$

$$\phi : E \times E \to \mathbb{K} \text{ telle que } \forall x \in E,\ \chi(x) = \phi(x, x)\ .$$

Proposition V.1.3 (Identités de polarisation) *Étant donnée une forme quadratique*

$$\chi : E \to \mathbb{K} \text{ sur } E$$

il existe une unique forme bilinéaire symétrique $\phi : E \times E \to \mathbb{K}$ telle que $\forall x \in E,\ \chi(x) = \phi(x, x)$. La forme ϕ est alors caractérisée

$$\text{par :} \quad \begin{array}{rcl} \phi(x, y) & = & \frac{1}{2}\left[\chi(x + y) - \chi(x) - \chi(y)\right] \\ & = & \frac{1}{4}\left[\chi(x + y) - \chi(x - y)\right]\ ; \end{array} \qquad V.1.3.1$$

***Démonstration** : (cf. l'exercice V.4.1.)*

Définition V.1.4 (Forme polaire) Pour une forme quadratique χ, la forme bilinéaire symétrique ϕ définie par la proposition V.1.3, est la *forme polaire associée à* χ.

Les égalités V.1.3.1 s'appellent *identité de polarisation*.

Définition V.1.5 (Espaces quadratiques) Étant donné un corp $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2 :

i) (**Espace quadratique**)
On dit que (E, χ) est un *espace quadratique* sur $\mathbb{K}$ ou un $\mathbb{K}$-*espace quadratique* ou simplement un *espace quadratique* si aucune confusion n'est à craindre si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et χ une forme quadratique sur E.

ii) (**Morphisme**)
Étant donnés des espaces quadratiques (E, χ) et (F, ρ) de formes polaires respectives ϕ et ψ, un *morphisme d'espaces quadratiques* de (E, χ) dans (F, ρ) est une application linéaire (un morphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels)

$$u : E \to F \text{ tel que } \forall x \in E,\ \chi(x) = \rho(u(x))\ ;$$

ou, ce qui revient au même, en vertu de V.1.3.1 , que

$$\forall (x, y) \in E \times E,\ \phi(x, y) = \psi(u(x), u(y))\ .$$

Si de plus u est bijective, c'est-à-dire un isomorphisme d'espaces vectoriels on dit alors que u est une *isométrie*. Sa réciproque u^{-1} est alors également une isométrie.

iii) On dira qu'un $\mathbb{K}$-espace quadratique (E, χ) est *de dimension finie* si E l'est.

Définition V.1.6 (Orthogonalité) Étant donnés un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $\phi : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme une forme bilinéaire symétrique , on note χ la forme quadratique associée à ϕ ; si bien que (E, χ) est un espace quadratique.

i) (**Éléments orthogonaux**)
On dit que deux éléments x et y de E sont ϕ-*orthogonaux* ou χ-*orthogonaux*, (ou même simplement *orthogonaux* s'il n'y a pas d'ambigûité) et l'on note $x \perp^\phi y$ ou $x \perp^\chi y$ ou simplement $x \perp y$ si $\phi(x, y) = 0$.

Ceci équivaut bien évidemment à $\phi(y, x) = 0$; si bien que

$$x \perp^\chi y \Leftrightarrow y \perp^\chi x\ .$$

ii) (**Base orthogonale**)
Une base $(e_1, \ldots, e_d)$ de E est ϕ-*orthogonale* ou χ-*orthogonale* (ou même simplement orthogonale) si $\phi(e_i, e_j) = 0$, pour tout $1 \le i \le d$, tout $1 \le j \le d$, $i \ne j$.

Plus généralement on pourrait dire d'une partie $S \subset E$, qu'elle est *orthogonale* si

$$\forall (x, y) \in S \times S,\ x \ne y \Rightarrow \phi(x, y) = 0\ .$$

iii) (**Base orthonormale**)

Étant donné un espace quadratique (E, χ) de forme polaire ϕ on appelle *base χ-orthonormale* ou *base ϕ-orthonormale* (ou même *base orthonormale*) de E une base

$$(e_1, \ldots, e_d) \text{ telle que } :$$

$$\begin{array}{lrcl} \forall 1 \leq i \leq d,\ \forall 1 \leq j \leq d, & & & \\ i \neq j \Rightarrow & \phi(e_i, e_j) & = & 0 \\ \text{et} & \phi(e_i, e_i) & = & 1\,. \end{array}$$

On écrit parfois à l'aide du *symbol de* KRONECKER

$$\forall 1 \leq i \leq d,\ \forall 1 \leq j \leq d,\ \phi(e_i, e_j) = \delta_{i,j}\,.$$

On pourrait également généraliser la définition à une partie quelconque $S \subset E$ dont on dira qu'elle est *orthonormale* si :

$$\begin{array}{c} \forall (s,t) \in S \times S, \quad s \neq t \Rightarrow \phi(s,t) = 0 \\ \phi(s,s) = 1\,. \end{array}$$

iv) (**Orthogonal d'une partie**)

pour toute partie $S \subset E$, on appelle *orthogonal de S pour ϕ* ou encore *ϕ-orthogonal* de S ou encore *χ-orthogonal* de S (ou même simplement orthogonal de S,) et l'on note

$$S^{\perp,\chi} = S^{\perp,\phi} := \{x \in E\,;\ \phi(s,x) = 0\,,\ \forall s \in S,\ \} = \{x \in E\,;\ s \perp^{\chi} x \forall s \in S,\ \} \qquad 1$$

On notera $S^{\perp}$ pour $S^{\perp,\phi}$ si aucune confusion ne peut en résulter.

De même pour tout $x \in E$, on notera abusivement $x^{\perp}$ pour $\{x\}^{\perp}$.

v) (**Sous-espaces orthogonaux**)

Deux sous-espaces F et G d'un espace quadratique (E, χ) sont *χ-orthogonaux* (ou simplement *orthogonaux*,) si

$$\forall (x,y) \in F \times G,\ q(x,y) = 0\,.$$

On écrira $F \perp^{\chi} G$ (ou $F \perp^{\phi} G$ si ϕ est la forme polaire de χ) ou même simplement $F \perp G$.

À noter que F et $F^{\perp,\chi}$ sont orthogonaux et même que

$$F \perp G \Leftrightarrow G \subset F^{\perp} \Leftrightarrow F \subset G^{\perp}\,.$$

vi) (**Noyau**)

On appelle *noyau* de χ ou de ϕ et on note

$$\operatorname{Ker} \chi = \operatorname{Ker} \phi := E^{\perp,\phi} = E^{\perp,\chi}$$

l'ortogonal de E ou encore

$$\operatorname{Ker} \phi = \{x \in E\,;\ \phi(x,y) = 0\,,\ \forall y \in E,\ \}\,.$$

Proposition V.1.7 (Propriétés de l'orthogonalité) *Soit (E, χ) un espace quadratique de forme polaire ϕ.*

i) Pour tout $S \subset E$, $S \subset \left(S^{\perp,\phi}\right)^{\perp,\phi}$.

ii) Pour tous $S \subset T \subset E, T^{\perp,\phi} \subset S^{\perp,\phi}$.

iii) Pour tout $S \subset E$,

$$\operatorname{Ker}\phi \subset S^{\perp,\phi} .$$

iv) Pour tout $S \subset E$, $S^{\perp,\phi}$ *est un sous-espace vectoriel de* E *et*

$$S^{\perp,\phi} = \operatorname{Vect}\{S\}^{\perp,\phi} .$$

v) Pour tous $S \subset E$ *et* $T \subset E$, $(S \cup T)^{\perp,\phi} = S^{\perp,\phi} \cap T^{\perp,\phi}$ *; en particulier si* F *et* G *sont deux sous-espaces vectoriels de* E,

$$(F+G)^{\perp,\phi} = F^{\perp,\phi} \cap G^{\perp,\phi} .$$

Démonstration : *(cf. l'exercice V.4.2.)*

V.2 . −Forme quadratiques définies, définies positivs

Dans la suite on particularise la situation au cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ est le corps des nombres réels.

Définition V.2.1 (Forme positive) Étant donné un espace quadratique (E, χ) on dit que χ est une *forme positive* (ou que ϕ est une forme positive) si

$$\forall x \in E,\ \chi(x) \geq 0 .$$

Définition V.2.2 (Forme définie) On dit que χ (ou sa forme polaire associée) est *définie* si

$$\forall x \in E,\ \chi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 .$$

Théorème V.2.3 (Inégalité de CAUCHY–SCHWARZ) *i) Si* ϕ *est une forme positive*

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ \|\phi(x,y)\| \leq \chi(x)\chi(y) ;$$

ii) Si de plus ϕ *est définie (cf. V.2.2,) l'inégalité ci-dessus et une égalité si et seulement si* x *et* y *sont liés.*

Démonstration : *Puisque* χ *est positive par hypothèse,*

$$\begin{array}{lrcl} \forall \lambda \in \mathbb{R}, & \chi(\lambda x + y) & \geq & 0 \\ \Leftrightarrow & \phi(\lambda x + y, \lambda x + y) & \geq & 0 \\ & \lambda\overline{\lambda}\phi(x,x) + \overline{\lambda}\phi(x,y) + \lambda(\phi(y,x) + \phi(y,y) & \geq & 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda^2\chi(x) + 2\lambda(\phi(x,y) + \chi(y) & \geq & 0 . \end{array}$$

— *Si* $\chi(x) = 0$, *on a*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ 2\lambda\phi(x,y) + \chi(y) \geq 0 ;$$

ce qui entraîne $\phi(x,y) = 0$ *et prouve le point i.*

— *Sinon on a un polynôme de degré* 2 *à coefficients réels qui a au plus une racine double ; ce qu'i entraîne que*

$$\phi(x,y)^2 - \chi(x)\chi(y) \leq 0 ;$$

qui prouve le point i.

Supposons χ *définie et égalité dans le point i. Si* $x \neq 0, \chi(x) \neq 0$, *et le discriminant* $\phi(x,y)^2 - \chi(x)\chi(y)$ *du polynôme* $\chi(x)\lambda^2 + 2\lambda\phi(x,y) + \chi(y)$ *est nul ; c'est-à-dire que ce dernier possède une racine* λ_0. *Il existe donc*

$$\lambda_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \chi(\lambda_0 x + y) = 0 ;$$

ce qui entraîne, puisque χ *est définie* $\lambda_0 x + y = 0$ *et prouve donc le point ii.*

Corollaire V.2.4 (Inégalité de MINKOWSKI) *Si χ est positive,*

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ \chi(x+y)^{\frac{1}{2}} \ \leq\ \chi(x)^{\frac{1}{2}}\ +\ \chi(y)^{\frac{1}{2}}\ .$$

***Démonstration** :*

$$\begin{array}{lll}\forall (x,y) \in E \times E, \quad \chi(x+y) & = & \phi(x+y, x+y) \\ & = & \chi(x) + \chi(y) + \phi(x,y) + \overline{\phi(x,y)} \\ & = & \chi(x) + \chi(y) + 2\mathrm{Re}(\phi(x,y)) \\ & \leq & \chi(x) + \chi(y) + 2\|\phi(x,y)\| \\ & \leq & \chi(x) + \chi(y) + 2\chi(x)\chi(y) \\ & \leq & \left(\chi(x)^{\frac{1}{2}} + \chi(y)^{\frac{1}{2}}\right)^2\ . \end{array}$$

Définition V.2.5 (Forme définie positive) Si χ (ou de manière équivalente ϕ) est définie (cf. V.2.2,) et positive (cf. V.2.1,) on dit usuellement qu'elle est *définie positive*. Si $\forall x \in E,\ \chi(x) \leq 0$, on dira que χ est négative. Si elle est de plus définie on parlera parfois de forme *définie négative*.

Définition V.2.6 (Espaces euclidiens) Soit (E, χ) un espace quadratique.

i) (**Produit scalaire**)
Si χ est définie positive χ est appelée *produit scalaire euclidien* .

ii) (**Espace préhilbertien**)
si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec χ définie positive on dit que E est un *espace préhilbertien réel* .

iii) (**Espace euclidien**)
Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie muni d'un produit scalaire autrement dit un espace préhilbertien réel de dimension finie est dit *euclidien* ou *muni d'une structure euclidienne.*

iv) Pour $(x,y)\ \in\ E \times E$, on note usuellement

$$\langle x, y\rangle\ :=\ \phi(x,y)\ ,\ .$$

Proposition V.2.7 (Norme euclidienne) *Si (E, χ) est un espace préhilbertien réel ,*

*i) (**Norme**)*
l'application

$$E\ \rightarrow\ \mathbb{R}^+\ ,\ x\ \mapsto\ ||x||_\chi\ :=\ \chi(x)^{\frac{1}{2}}$$

(quon notera le plus souvent simplement $||x||$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la structure considérée,) est une norme, au sens où elle vérifie les propriétés Nor_1 à Nor_4. On l'apelle norme euclidienne .

$$\forall (x,y,\lambda) \in E \times E \times \mathbb{K},$$

Nor_1)

$$||x||\ \in\ \mathbb{R}^+\ ;$$

*Nor$_2$) **(Homogénéité)***

$$||\lambda x|| \;=\; \|\lambda\|||x||\;;$$

*Nor$_3$) **(Séparation)***
$||x|| \;=\; 0$ *si et seulement si* $x \;=\; 0$;

*Nor$_4$) **(Inégalité triangulaire)***

$$||x+y|| \;\leq\; ||x||+||y||\;;$$

***Démonstration** : Seul l'axiome Nor$_4$ nécessite une justification qui n'est autre que l'inégalité* de MINKOWSKI *(cf. V.2.4.)*

*ii) **(Distance)***
L'application

$$d\;:\;E\times E\;\rightarrow\;\mathbb{R}^+\;,\;(x,y)\;\mapsto\;||x-y||$$

est une distance au sens où elle vérifie les axiomes Dist$_1$ à Dist$_4$. On l'appelle distance euclidienne.

$$\forall(x,y)\in E\times E,$$

Dist$_1$)

$$d(x,y)\;\in\;\mathbb{R}^+\;;$$

*Dist$_2$) **(Séparation)***
$d(x,y) \;=\; 0$ *si et seulement si* $x \;=\; y$;

*Dist$_3$) **(Symétrie)***
$d(x,y) \;=\; d(y,x)$;

Dist$_4$)

$$d(x,z)\;\leq\;d(x,y)\;+\;d(y,z)\;\textit{(inégalité triangulaire.)}$$

Remarque V.2.8 (Orthonormale/orthonormée) On remarque que la définition de *base orthonormale* ou de partie orthonormale donnée au point iii de la définition V.1.6, l'a été indépendamment de toute notion de norme. Cependant à la lumière de la proposition V.2.7 ci-dessus on pourrait la reformuler en disant que, dans un espace préhilbertien réelle (E,χ) une partie $S\;\subset\;E$ est orthonormale si et seulement si :

$$\begin{array}{lrcl}\forall(s,t)\in S\times S, & s\neq t & \Rightarrow & s\perp t\\ \text{et} & ||s|| & = & 1\,.\end{array}$$

Dans ce contexte le terme d'*orthonormée* est parfois utilisé en lieu et place d'*orthonormale*.

Remarque V.2.9 ($\mathbb{R}^d$ euclidien) Étant donné un entier $d \geq 1$, l'ensemble $\mathbb{R}^d$ des d-uplets d'éléments de $\mathbb{R}$ possède une structure canonique de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Pour cette structure, il existe une base canonique

$$e_{i\,,\,1\,\leq\,i\,\leq\,d} \;:=\; (0,0,\dots,1,\dots,0)$$

où l'élément 1 est placé en $i^{\text{ième}}$ position. Alors il existe un unique produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ pour lequel la base canonique est orthonormée.

Ainsi, lorsqu'on parlera de $\mathbb{R}^d$ euclidien sans autre précision ce sera toujours en référence à cette structure canonique. Il se peut même parfois, qu'en parlant simplement de $\mathbb{R}^d$, (resp. $\mathbb{C}^d$) on suppose implicitement qu'il est muni de sa structure euclidienne

Proposition V.2.10 (Propriétés des normes euclidiennes) *Soit (E,χ) un espace préhilbertien et $x \mapsto ||x||$ la norme associée.*

*i) (**Théorème de PYTHAGORE**)*
Pour tout $(x,y) \in E \times E$ si $x \perp^{\chi} y$,

$$||x+y|| \;=\; ||x|| \;+\; ||y|| \;;$$

la réciproque étant vraie dans le cas des espaces préhilbertiens réels.

*ii) (**Théorème du parallélogramme**)*

$$\forall (x,y) \in E\times E,\; 2\big(||x||^2+||y||^2\big) \;=\; ||x+y||^2+||x-y||^2\,.$$ *(cf. la question 2 de la question 1 de l'exercice V.4.3 .)*

*iii) (**Égalité de la médiane**)*

$$\forall (x,y,z) \in E \times E \times E,\quad \left\|x - \frac{y+z}{2}\right\|^2 \;=\; \tfrac{1}{2}\Big(||x-y||^2 + ||x-z||^2\Big) - \tfrac{1}{4}||y-z||^2$$ *(cf. le point b de la question 2 de l'exercice V.4.3 .)*

V.3 . —Bases orthonormées, projections, distance à un sous-espace

Dans ce paragraphe (V.3,) (E,χ) est un espace préhilbertien réel (cf. V.2.6.ii.)

Définition V.3.1 (Projecteurs et symétries) Soit (E,χ) un espace préhilbertien.

i) (**Projecteur orthogonal**)
Un *projecteur orthogonal* de E dans lui-même est un endomorphisme p, qui est un projecteur *i.e.*

$$p \,\circ\, p \;=\; p \text{ et tel que de plus } \operatorname{Ker} p \perp^{\chi} \operatorname{Im} p\;;$$

si bien qu'alors

$$E \;=\; \operatorname{Ker} p \;\oplus^{\perp_\chi}\; \operatorname{Im} p\,.$$

ii) (**Symétrie orthogonale**)
Une *symétrie orthogonale* de E dans lui-même est un endomorphisme s qui est une symétrie *i.e.*

$$s \circ s = \mathrm{Id}_E \text{ et tel que de plus } \mathrm{Ker}\, s - \mathrm{Id}_E \perp^{\chi} \mathrm{Ker}\, s + \mathrm{Id}_E \ ;$$

si bien que

$$E = \mathrm{Ker}\, s - \mathrm{Id}_E \oplus^{\perp_\chi} \mathrm{Ker}\, s + \mathrm{Id}_E \ .$$

On verra des caractérisations équivalentes des symétries orthogonales à l'exercice VI.4.5

Lemme V.3.2 (Existence d'une projection orthogonale) *Si F possède une base orthonormée, il existe un unique projecteur orthogonal*

$$p \,:\, E \to E \ \text{tel que}\ \mathrm{Im}\, p = F \text{ et } \mathrm{Ker}\, p = F^{\perp} \ .$$

De plus, pour toute base orthonormée $(f_j)_{1 \le j \le \dim_{\mathbb{K}} F}$ de F,

$$\forall x \in E,\ p(x) = \sum_{j=1}^{\dim_{\mathbb{K}} F} \phi(f_j, x) f_j \ .$$

Démonstration :
Étant donnée une base orthonormée $(f_j)_{1 \le j \le d}$ de F, considérons l'application

$$q \,:\, E \to F \,,\ x \mapsto \sum_{j=1}^{d} \phi(f_j, x) f_j \ .$$

L'application q est manifestement linéaire. De plus

$$\begin{aligned}
\forall x \in E, \quad q[q(x)] &= q\left(\sum_{j=1}^{d} \phi(f_j, x) f_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{d} \phi(f_j, x) q(f_j) \\
&= \sum_{j=1}^{d} \phi(f_j, x) \sum_{k=1}^{d} \phi(f_k, f_j) f_k \\
&= \sum_{j=1}^{d} \phi(f_j, x) f_j \\
&= q(x) \ .
\end{aligned}$$

L'endomorphisme q est donc un projecteur dont on constate immédiatement ou presque que $\mathrm{Im}\, q = F$ et $\mathrm{Ker}\, q = F^{\perp}$.

Théorème V.3.3 (Orthonormalisation de GRAM–SCHMIDT) *Étant donnés un espace préhilbertien réel (E, χ) de forme polaire ϕ, pour toute famille libre $(e_1, \ldots, e_d)$ de E, il existe une famille orthonormale (cf. V.1.6.iii,) $(f_1, \ldots, f_d)$ de E telle que*

GS$_1$) *pour tout* $1 \le j \le d$

$$\mathrm{Vect}\{f_1, \ldots, f_j\} = \mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_j\} \ ;$$

si de plus

GS$_2$) pour tout $1 \leq j \leq d$ $\phi(e_j, f_j) \in \mathbb{R}^+$,
la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq d}$ *est unique.*

***Démonstration** : La preuve de ce résultat se fait par récurrence sur l'entier* d.

i) $(d = 1)$
Si $\{e_1\}$, *est une partie libre de* E, $\chi(e_1) \neq 0$. *Ainsi puisque* χ *est définie positive,* $\chi(e_1) > 0$. *Si on veut que* f_1 *satisfasse GS$_1$, nécessairement il existe* $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $f_1 = ae_1$. *Alors :*

$$\begin{array}{rrcl} & \chi(f_1) & = & 1 \\ \Leftrightarrow & \chi(ae_1) & = & 1 \\ \Leftrightarrow & \|a^2\|\chi(e_1) & = & 1\,. \end{array}$$

Il s'ensuit que $a = \pm\sqrt{\chi(e_1)}$.
Si de plus on impose la condition GS$_2$,

$$\begin{array}{rrcl} & \phi(e_1, f_1) & \in & \mathbb{R}^+ \\ \Leftrightarrow & a\chi(e_1) & \in & \mathbb{R}^+ \\ \Leftrightarrow & a & = & \sqrt{\chi(e_1)}\,. \end{array}$$

Ainsi
$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{\chi(e_1)}} e_1 \text{ est l'unique élément de } E \text{ de norme } 1 \text{ satisfaisant GS}_1 \text{ et GS}_2.$$

ii) Pour $d \in \mathbb{N}^*$, *soit* $(e_j)_{1 \leq j \leq d+1}$ *une famille libre* E. *Bien entendu* $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ *reste libre. On peut faire l'hypothèse de récurrence qu'il existe une famille orthonormale* $(f_j)_{1 \leq j \leq d}$ *vérifiant GS$_1$ et même que celle-ci est unique si on suppose GS$_2$.*

Notons alors $F := \mathrm{Vect}\{(f_j)_{1 \leq j \leq d}\}$ *qui est un sous-espace de* E *de dimension finie dont* $(f_j)_{1 \leq j \leq d}$ *est une base orthonormée. On sait alors (cf. V.3.2,) que* $E = F \oplus^{\perp} F^{\perp}$ *et que le projecteur orthogonal* p *de* E *sur* F *est donné par* $x \mapsto \sum_{j=1}^{d} \phi(f_j, x) f_j$.

S'il existe f_{d+1} *tel que* $(f_j)_{1 \leq j \leq d+1}$ *satisfait GS$_1$,*

$$f_{d+1} \in \mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_{d+1}\} = \mathrm{Vect}\{f_1, \ldots, f_d, e_{d+1}\}\,.$$

Il en résulte qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ *et* $v \in F$ *tels que* $f_{d+1} = v + ae_{d+1}$.
La condition d'orthogonalité sur la famille $(f_j)_{1 \leq j \leq d+1}$ *entraîne que*

$$\begin{array}{lrcl} \forall 1 \leq j \leq d, & \phi(f_j, f_{d+1}) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & p(f_{d+1}) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & p(v + ae_{d+1}) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & v + ap(e_{d+1}) & = & 0\,. \end{array}$$ *1*

La condition $||f_{d+1}|| = 1$ *équivaut à :*

$$\begin{array}{rrcl} & \chi(v + ae_{d+1}) & = & 1 \\ \Leftrightarrow & \phi(v + ae_{d+1}, v + ae_{d+1}) & = & 1 \\ \Leftrightarrow & \chi(v) + 2\phi(v, ae_{d+1}) + \chi(ae_{d+1}) & = & 1\,; \end{array}$$

ce qui, grâce au point 1 équivaut encore à :

$$\begin{array}{rrcl}
 & \chi(ae_{d+1}) + \chi[p(ae_{d+1})] + 2\phi[-p(ae_{d+1}), ae_{d+1}] & = & 1 \\
\Leftrightarrow & \chi(ae_{d+1}) + \chi[p(ae_{d+1})] + 2\phi[-p(ae_{d+1}), p(ae_{d+1})] & = & 1 \\
\Leftrightarrow & \chi(ae_{d+1}) + \chi[p(ae_{d+1})] - 2\chi[p(ae_{d+1})] & = & 1 \\
\Leftrightarrow & \chi(ae_{d+1}) - \chi[p(ae_{d+1})] & = & 1 \\
\Leftrightarrow & \|a\|^2 \left(\chi(e_{d+1}) - \chi[p(e_{d+1})]\right) & = & 1 \\
\Leftrightarrow & \|a\|^2 \chi\left(e_{d+1}) - p(e_{d+1})\right) & = & 1
\end{array}$$ 2

Or la famille $(e_j)_{1 \,\leq\, j \,\leq\, d+1}$ est libre ; si bien que

$$e_{d+1} \notin F = \mathrm{Vect}\big\{(f_j)_{1 \,\leq\, j \,\leq\, d}\big\} = \mathrm{Vect}\big\{(e_j)_{1 \,\leq\, j \,\leq\, d}\big\} .$$

Il s'ensuit que $e_{d+1} \neq p(e_{d+1})$ ce qui entraîne

$$0 \neq \chi(e_{d+1} - p(e_{d+1}) = \chi(e_{d+1}) - \chi[p(e_{d+1})] .$$

On a même, (cf. le point i de la proposition V.2.10,) $\chi(e_{d+1}) - \chi[p(e_{d+1})] > 0$, d'où il résulte que $a = \pm\sqrt{\chi(e_{d+1}) - \chi[p(e_{d+1})]}$. La condition GS$_2$ détermine alors a de manière unique.

Corollaire V.3.4 (Caractérisation des formes définies positives) *Une forme ϕ bilinéaire symétrique sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie est définie positive si et seulement si il existe une base ϕ-orthonormée de E.*

Démonstration : *Le sens réciproque est un exercice tandis que le sens direct n'est autre que le théorème V.3.3.*

Corollaire V.3.5 (Existence de projections orthogonales) *Le résultat du lemme V.3.2 est désormais vrai sans qu'il soit nécessaire de supposer a priori que le sous-espace F possède une base orthonormée.*

Démonstration : *C'est en effet une conséquence du théorème V.3.3 qui établit l'existence de telles bases.*

Corollaire V.3.6 (Distance au sous-espace F) *Pour tout $x \in E$, en posant*

$$d(x, F) := \inf_{y \,\in\, F} d(x, y) = \inf_{y \,\in\, F} ||x - y||$$

et si p désigne le projecteur orthogonal défini au lemme V.3.2,

$$d(x, F) = ||x - p(x)|| .$$

Proposition V.3.7 (Supplémentaire orthogonal) *Dans un espace euclidien (E, ϕ), pour tout sous-espace $F \subset E$,*

i) $E = F \oplus^{\perp_\phi} F^{\perp,\phi}$.

ii) De plus $F = F^{\perp^\perp}$.

Proposition V.3.8 (Hyperplan médiateur) *Soient* $(x, y) \in E \times E$.

i) ***(Le losange)***
$||x|| = ||y|| \Leftrightarrow \phi(x+y, x-y) = 0$ *i.e.* $x + y \perp x - y$.

Démonstration :

$$\begin{array}{rrcl} & ||x|| &=& ||y|| \\ \Leftrightarrow & ||x||^2 &=& ||y||^2 \\ \Leftrightarrow & \phi(x,x) &=& \phi(,y,y) \\ \Leftrightarrow & \phi(x,x)-\phi(y,y) &=& 0 \\ \Leftrightarrow & \phi(x,x)-\phi(x,y)+\phi(x,y)-\phi(y,y) &=& 0 \\ \Leftrightarrow & \phi(x,x-y)+\phi(x-y,y) &=& 0 \\ \Leftrightarrow & \phi(x-y,x+y) &=& 0\ . \end{array}$$

ii) *Pour* $x \neq y$, $||x|| = ||y||$,

$$H := \{z \in E\ ;\ ||z-x|| = ||z-y||\} = (x-y)^{\perp}$$

est un hyperplan de E *i.e.* $\dim_E = \dim_H + 1$.

Démonstration :

$$\begin{array}{lrcl} \forall z \in E, & ||z-x|| &=& ||z-y|| \\ \Leftrightarrow & ||z-x||^2 &=& ||z-y||^2 \\ \Leftrightarrow & \phi(z-z,x-z) &=& \phi(z-y-,z-y) \\ \Leftrightarrow & \phi\left(z-x+z-y, z-x-(z-y)\right) &=& 0 \\ \Leftrightarrow & \phi\left(2z-(x+y), x-y\right) &=& 0 \\ \Leftrightarrow & \phi(2z,x-y)-\phi(x+y,x-y) &=& 0\ ; \end{array}$$

cette dernière égalité équivaut (cf. i,) à

$$\phi(2z, x-y) = 0\ .$$

Il s'ensuit que $H = x - y^{\perp}$. *Or* $x - y \neq 0$, *par hypothèse si bien que* $\mathrm{Vect}\{x-y\}$ *est une droite. Le sous-espace* H *(cf. V.3.7.i,) est le supplémentaire orthogonal de* $\mathrm{Vect}\{x-y\}$; *ce qui assure que c'est un hyperplan.*

V.4 . −Exercices

Exercice V.4.1 (Forme polaire associée) Faire la preuve de la proposition V.1.3.

Exercice V.4.2 (Propriétés de l'orthogonal) Faire la preuve de la proposition V.1.7.

Exercice V.4.3 (Identité du parallélogramme)

Le but de cet exercice est de montrer que l'*égalité du parallélogramme* 1.2 est caractéristique des *normes euclidienne* ; autrement dit q'uune norme $||\cdot||$ **donnée satisfait cette égalité si et seulement s'il existe un produit scalaire** $\langle\cdot,\cdot\rangle$ **tel que**

$$\forall x\ ,\ ||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}\ .$$

On pourrait aisément s'assurer ainsi que les normes $||\cdot||_1$ **et** $||\cdot||_\infty$ **ne sont pas euclidiennes.**

On vérifie au point a de la question 2 qu'une norme euclidienne vérifie l'égalité du parallélogramme ; ce qui est un calcul assez élémentaire. À la question 1, on montre que la réciproque est vraie ; à savoir que si une norme $||\cdot||$ vérifie l'égalité du parallélogramme, on peut construire un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (qui sera d'ailleurs unique) tel que $||\cdot|| \;=\; \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$.

1) Soit $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

a) Montrer que si la norme $||\cdot||$ est euclidienne la forme bilinéaire symétrique définissant la structure euclidienne est caractérisée par

$$\forall (x,y) \in E\times E,\ p(x,y) \;=\; \frac{1}{2}\big(||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2\big) \;=\; \frac{1}{4}\big(||x+y||^2 - ||x-y||^2\big)\ ;$$

assurant ainsi que si $||\cdot||$ provient d'une structure euclidienne, celle-ci est unique.

On suppose que la norme de E vérifie la relation

$$\forall (x,y) \in E, \times E,\ 2\big(||x||^2 + ||y||^2\big) \;=\; ||x+y||^2 + ||x-y||^2\ . \qquad \mathbf{2}$$

On définit

$$p\ :\ E\ \times E\ \to\ \mathbb{R}\ ,\ (x,y)\ \mapsto\ \frac{1}{2}\big(||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2\big)\ .$$

b) (**Symétrie**)
Montrer que p est symétrique *i.e.*

$$\forall (x,y) \in E\times E,\ p(x,y) \;=\; p(y,x)\ .$$

c) (**Définie positive**)
Montrer que p est définie positive, *i.e.*

$$\forall x \in E,\ p(x,x)\ \geq\ 0 \text{ et } p(x,x)\ =\ 0\ \Rightarrow\ x\ =\ 0\ .$$

d) (**Additivité à droite**)
Montrer que

$$\forall (x,y,z) \in E\times E\times E,\ p(x,y+z) \;=\; p(x,y)\ +\ p(x,z)\ .$$

e) (**$\mathbb{Z}$-linéarité**)
Montrer que

$$\forall (x,y,n) \in E\times E\times \mathbb{Z},\ p(x,ny) \;=\; np(x,y)\ .$$

f) (**$\mathbb{Q}$-linéarité**)
Montrer que

$$\forall (x,y,q) \in E\times E\times \mathbb{Q},\ p(x,qy) \;=\; qp(x,y)\ .$$

g) (**$\mathbb{R}$-linéarité**)
Montrer que

$$\forall (x,y,a) \in E\times E\times \mathbb{R},\ p(x,ay) \;=\; ap(x,y)\ .$$

h) (**Conclusion**)
Déduire finalement de ce qui précède que p est un produit scalaire sur E.

2) Réciproquement, si E est un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle x, y\rangle$:

a) Montrer que la norme euclidienne (définie par $||x|| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$) vérifie (1.2), et que $\langle x, y\rangle = p(x, y)$.

b) Démontrer l'égalité de la médiane :

$$\forall (x, y, z) \in E \times E \times E, \ \left\| x - \frac{y+z}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}\left(||x-y||^2 + ||x-z||^2 \right) - \frac{1}{4}||y-z||^2 .$$

3) Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, pour quelles valeurs de $q \geq 1$ les normes $\|\cdot\|_q$ vérifient-elles 1.2 ?

Exercice V.4.4 (Projection orthogonale) Soit E une partie de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ et soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \ f(v) \in E \text{ et } v - f(v) \in E^{\perp} .$$

1) Montrer que pour tout $v \in E$, on a $v = f(v)$.

2) Montrer que $E = \operatorname{Im} f$.

3) En déduire que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et montrer que f est la projection orthogonale sur E.