VI . −Groupes orthogonaux

Dans toute cette section, (E, ϕ) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien (cf. V.2.6) de dimension finie d.

VI.1 . −Isométries

L'espace euclidien (E, ϕ) est en particulier un *espace quadratique* (cf. le point i de la définition V.1.5.) Dans le cadre des espaces euclidiens, il est usuel de désigner sous les termes d'*endomorphisme orthogonal* (cf. la définition VI.1.1,) ou d'*isométrie* (cf. la définition VI.1.2,) les morphismes d'espaces quadratiques introduits au point ii de la définition V.1.5.

Définition VI.1.1 (Endomorphisme orthogonal) On dit qu'un endomorphisme u de E est ϕ-*orthogonal* (ou simplements *orthogonal* si aucune confusion n'est à craindre,) si pour tout $(x, y) \in E \times E$,

$$\phi(u(x), u(y)) = \phi(x, y) .$$

Définition VI.1.2 (Isométrie) Puisqu'un endomorphisme orthogonal u est en particulier caractérisé par le fait que

$$\forall x \in E,\ ||x|| = ||u(x)|| \text{ (cf. la proposition V.1.3 ,)}$$

de telles applications sont aussi usuellement appelées *isométries*.

Proposition VI.1.3 (Groupe orthogonal) *Soit (E, χ) un espace euclidien de forme polaire ϕ.*

i) L'ensemble $\mathcal{O}_\chi(E)$ (qu'on notera également $\mathcal{O}_\phi(E)$ ou même $\mathcal{O}(E)$) constitué des endomorphismes de l'espace quadratique (E, χ) (cf. V.1.5.ii,) est un sous-groupe du groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ des automorphisme de l'espace vectoriel E appelé groupe orthogonal de (E, χ).

Un élément de $\mathcal{O}_\chi(E)$ est un endomorphisme χ-orthogonal (ou ϕ-orthogonal ou orthogonal)

***Démonstration** : En effet soit $u \in \mathcal{O}_\chi(E)$(resp. $\mathcal{U}_\chi(E)$),*

$$\begin{array}{lrcl} \forall x \in E, & u(x) & = & 0 \\ \Rightarrow & \chi[u(x)] & = & 0 \\ \Rightarrow & \chi(x) & = & 0 \\ \Rightarrow & x & = & 0\ ; \end{array}$$

ce qui entraîne que u est injectif.

Or puisque E est de dimension fini également bijectif i.e. un élément de $\mathrm{GL}(E)$.

Reste à montrer que $\mathcal{O}_\chi(E)$ est stable par composition et passage à l'inverse ; ce qui est une vérification facile laissée en exercice.

ii) Un endomorphisme u de E est ϕ-orthogonal si et seulement si il existe une base orthonormale de (E, χ) (cf. V.1.6.iii,) dont l'image par u est une base orthonormale ; si et seuelement si l'image par u de toute base ϕ-orthonormale est une base ϕ-orthonormale .

iii) Un morphisme u est ϕ-orthogonal si et seulement si sa matrice M dans toute base ϕ-orthonormée vérifie

$$M^{-1} = {}^t M \ .$$

On dira alors que M est une matrice orthogonale .

Définition VI.1.4 Une matrice carrée $d * d$ à coefficients réels est dite *orthogonale* si les vecteurs associés à ses colonnes dans $\mathbb{R}^d$ euclidien (cf. V.2.9) forment une base orthonormée.

Ainsi une matrice $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si $M * {}^t M = {}^t M * M$ est la matrice identité.

Proposition VI.1.5 (Valeurs propres) *Étant donnée, une isométrie $\gamma \in \mathcal{O}_\phi(E)$, si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de γ, alors*

$$|\lambda| = 1 .$$

En effet, si x est un vecteur propre associé à λ, on a :

$$\begin{aligned} ||x|| = & \quad ||\gamma(x)|| \\ = & \quad ||\lambda x|| \\ \underset{\text{(cf. V.2.7.i.Nor}_2)}{=} & \quad |\lambda|||x|| . \end{aligned}$$

Proposition VI.1.6 (Sous-espaces stables) *Pour toute isométrie $f \in \mathcal{O}(E)$, et tout sous-espace $F \subset E$, F est stable sous f si et seulement si $F^\perp$ est stable.*

***Démonstration** : Il suffit (cf. V.3.7.ii,) de démontrer l'implication.*

Remarquons d'abord que si f est une isométrie f est en particulier injective si bien que sa restriction $f_{|F}$, à F est encore injective et à valeurs dans F si F est stable. On an déduit que

$$\dim F = \dim f(F) \leq \dim F ;$$

si bien que $f(F) = F$.

Pour tout $y \in F^\perp$ et tout $z \in F$ il existe $x \in F$ tel que $z\ f(x)$. Ainsi

$$\phi\,(f(y), z) = \phi\,(f(y), f(x)) = \phi(x, y) = 0 ;$$

si bien que $f(y) \in F^\perp$.

VI.2 . $-$Adjonction

On introduit à présent la notion d'*adjoint* d'un endomorphisme de E dont on va constater qu'elle permet d'interpréter certaine des propriétés des isométries (cf. VI.2.6.) Ces dernières restent néanmoins le sujet principal de notre étude.

Définition VI.2.1 (Adjoint d'un endomorphisme) Étant donné un endomorphisme $u \in \mathrm{End}(E)$ de E *i.e.* une application linéaire de E dans lui-même, on dit qu'un endomorphisme $v \in \mathrm{End}(E)$ est *ϕ-adjoint* ou *χ-adjoint* (ou même simplement *adjoint*, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la forme χ,) si

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ \phi(u(x), y) = \phi(x, v(y)) . \qquad \text{VI.2.1.1}$$

Proposition VI.2.2 (Propriétés de l'adjoint) *Soient*

$$(u, v) \in \mathrm{End}(E) \times \mathrm{End}(E) \ \text{ tel que } v \text{ est adjoint de} u .$$

i) Alors u est adjoint de v et on dira simplement que u et v sont adjoints l'un de l'autre.

***Démonstration** : Si v est adjoint de u, (cf. VI.2.1.1 :)*

$$\begin{array}{lrcl} \forall (x,y) \in E \times E, & \phi(u(x), y) & = & \phi(x, v(y)) \\ \Leftrightarrow & \sigma[\phi(u(x), y)] & = & \sigma[\phi(x, v(y))] \\ \Leftrightarrow & \phi(y, u(x)) & = & \phi(v(y), x) . \end{array} \qquad 1$$

ii) Si w est un adjoint de u, alors $v = w$. Ainsi sur un espace euclidien un endomorphisme u possède au plus un adjoint.

Démonstration *:*

$$\begin{array}{lrcl}
\forall (x,y) \in E \times E, & \phi(x, v(y) - w(y)) & = & \phi(x, v(y)) - \phi(x, w(y)) \\
 & & = & \phi(u(x), y) - \phi(u(x), y) \\
 & & = & 0 \\
\Rightarrow & \phi(w(y) - v(y), x) & = & 0 \\
\Rightarrow \forall y \in E, & v(y) & = & w(y) \\
\Rightarrow & v & = & w \ .
\end{array}$$

Proposition VI.2.3 (Existence et unicité de l'adjoint) *Si (E, ϕ) est un espace euclidien, tout endomorphisme u admet un unique adjoint v.*

Démonstration *: L'unicité est déjà établie au point ii de la proposition VI.2.2 indépendamment de l'hypothèse sur la dimension.*

Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ une base orthonormée de E (dont l'existence est assurée par le procédé d'orthonormalisation de GRAM–SCHMIDT *(cf. V.3.3.)) Si un adjoint v de u existe, il est caractérisé, comme tout endomorphisme dans une base orhtonormé par*

$$\forall 1 \leq j \leq d, \ v(e_j) \ = \ \sum_{i=1}^{d} \phi(v(e_j), e_i) e_i \ .$$

On a donc

$$\forall 1 \leq h \leq d, \ v_j \ = \ \sum_{i=1}^{d} \phi(e_j, u(e_i)) e_i \ .$$

Ceci détermine complètement v.

Notation VI.2.4 Si (E, ϕ) est un espace euclidien, tout endomorphisme $u \in \mathrm{End}(E)$ de E possède un unique ϕ-adjoint (simplement appelé adjoint si cela n'entraîne aucune confusion) noté u^{*_ϕ} ou bien entendu simplement u^* s'il ne peut en résulter aucune confusion.

Il découle immédiatement de la construction donnée à la proposition VI.2.3 que dans une base orthonormée la matrice de u^* est la transposée de la matrice de u.

Proposition VI.2.5 (Fonctorialité de l'adjoint) *Soit (E, ϕ) un espace euclidien.*

*i) **(Composition)***
Pour $(u, v) \in \mathrm{End}(E) \times \mathrm{End}(E)$,

$$(u + v)^* \ = \ u^* \ + \ v^* \ ;$$

$$(u \circ v)^* \ = \ v^* \ \circ \ u^* \ .$$

*ii) **(Inverse)***
Pour tout $u \in \mathrm{End}(E)$,

$$(u^{-1})^* \ = \ (u^*)^{-1} \ .$$

Démonstration : *Ces propriétés reposent en fait toutes sur la propriété d'unicité de l'adjoint (cf. VI.2.3.) En effet par exemple :*

$$\begin{aligned}\forall (x,y)\in E\times E,\quad \phi\left(x, v^*[u^*(y)]\right) &= \phi\left(v(x), u^*(y)\right)\\ &= \phi\left(v[u(x)], y\right)\\ &= \phi\left(u\circ v(x), y\right)\ ;\end{aligned}$$

la propriété ci-dessus étant également sattisfaite par $(u\circ v)^*$, ces deux endomorphismes sont égaux par unicité.

Proposition VI.2.6 (Adjoint et isométries) *Soit (E,ϕ) un espace euclidien et $u\in \mathrm{End}(E)$, un endomorphisme de E. Alors u est une isométrie si et seulement si u est inversible et son inverse est son adjoint i.e.*

$$u^{-1} = u^*\ .$$

Démonstration : *On pourrait bien entendu déduire ce résultat des diverses observations qu'on a faites sur les matrices dans une base orthonormée.*

Néanmoins ce résultat se montre de manière purement intrinsèque : Supposons en effet que u soit une isométrie alors u est inversible et :

$$\begin{aligned}\forall (x,y)\in E\times E,\quad \phi\left(u(x), y\right) &= \phi\left(u(x), u[u^{-1}(y)]\right)\\ &= \phi\left(x, u^{-1}(y)\right)\end{aligned}$$

ce qui identifie, une fois de plus grâce à l'énoncé d'unicité (cf. VI.2.3,) u^{-1} et u^*.

Réciproquement si $u\in\mathrm{End}(u)$ est inversible d'inverse $u^{-1} = u^*$,

$$\begin{aligned}\forall (x,y)\in E\times E,\quad \phi(x,y) &= \phi\left(x, u^{-1}[u(y)]\right)\\ &= \phi\left(x, u^*[u(y)]\right)\\ &= \phi\left(u(x), u(y)\right)\ ;\end{aligned}$$

ce qui prouve précisément que u est une isométrie.

Proposition VI.2.7 *Étant donné un endomorphisme u de E, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) L'endomorphisme u est ϕ-orthogonal (cf. VI.1.1.)

b) Pour tout $x\in E$,

$$||u(x)|| = ||x||\ .$$

c) Il existe une base ϕ-orthonormée (cf. V.1.6.iii) dont l'image par u est une base ϕ-orthonormée.

d) L'image par u de toute base orthonormée est une base orthonormée.

e) Dans toute base ϕ-orthonormée $\mathcal{B}$ la matrice $M_{\mathcal{B}}(u)$ ainsi que sa transposée ${}^t M_{\mathcal{B}}(u)$ sont orthogonales au sens de la définition VI.1.4.

f) Le ϕ-adjoint u^* (cf. VI.2.1) de u est l'inverse de u :

$$u^*\circ u = u\circ u^* = \mathrm{Id}\ .$$

***Démonstration** : À ce stade, cette proposition est une synthèse d'un certain nombre de résultats précédents et n'apporte pas grand-chose de nouveau. Nous nous bornerons donc à indiquer à quels résultats antérieurs il faut faire appel (ou même lesquels simplement appliquer directement) pour la démonstration.*

a ⇔ b est une conséquence immédiate de l'une (au choix) des identités de polarisation V.1.3.1.

a ⇔ c est un exercice facile qui n'utilise que l'écriture d'un vecteur dans une base et la bilinéarité du produit scalaire.

VI.3 . −Endomorphismes autoadjoints ou symétriques

Définition VI.3.1 (Endomorphisme autoadjoint) Un endomorphisme u de E est *ϕ-autoadjoint* (qu'on abrègera en *autoadjoint* s'il n'en résulte aucune confusion) si il est égal à son ϕ-adjoint.

Cela signifie encore que

$$\forall(x,y)\in E\times E,\ \phi(u(x),y)\ =\ \phi(x,u(y))\ .$$

On dira encore que u est *ϕ-antiautoadjoint* si $u\ =\ -u^{*_\phi}$ ou encore si

$$\forall(x,y)\in E\times E,\ \phi(u(x),y)\ =\ -\phi(x,u(y))\ .$$

Proposition VI.3.2 (Caractérisation matricielle des endomorphismes) *Étant donné un espace euclidien (E,ϕ), un endomorphisme u de E est ϕ-autoadjoint (resp. ϕ-antiautoadjoint) si et seulement si la matrice $\mathcal{M}_M or \mathcal{B}\mathcal{B} u$ de u dans une base $\mathcal{B}$ ϕ-orthonormale (cf. V.1.6.iii) est symétrique (resp. antisymétrique) i.e.*

$${}^t M(u)\ =\ M(u)\ .$$

On dira donc parfois, par abus de langage, que u est symétrique (resp. antisymétrique.)

***Démonstration** : (cf. VI.2.3.)*

Proposition VI.3.3 (Décomposition autoadjoint ⊕ antiautoadjoint) *Soit (E,ϕ) un espace euclidien.*

i) Les ensembles

$$\mathcal{S}_E\ :=\ \{u\ \in\ \mathrm{End}(E)\ ;\ u\ =\ u^*\}\ \text{et}\ \mathcal{A}_E\ :=\ \{u\ \in\ \mathrm{End}(E)\ ;\ u\ =\ -u^*\}$$

sont des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{End}(E)$.

ii) Les applications

$$\begin{array}{rrcl} \sigma: & \mathrm{End}(E) & \longrightarrow & \mathcal{S}_E \\ & u & \longmapsto & \frac{1}{2}(u+u^*) \\ \text{et } \alpha: & \mathrm{End}(E) & \longrightarrow & \mathcal{A}_E \\ & u & \longmapsto & \frac{1}{2}(u-u^*) \end{array}$$

sont des projecteurs i.e.

$$\sigma\ \circ\ \sigma\ =\ \alpha\ \circ\ \alpha\ =\ \mathrm{IdEnd}(E)\ .$$

iii) De plus

$$\sigma\ +\ \alpha\ =\ \mathrm{IdEnd}(E)\ ;$$

si bien que

$$\mathrm{End}(E)\ =\ \mathcal{S}_E\ \oplus\ \mathcal{A}_E\ .$$

***Démonstration** : (cf. l'exercice VI.4.1.)*

VI.4 . −Exercices

Exercice VI.4.1 (Décomposition symétrique $\oplus$ antisymétrique) Rappler pourquoi, pour tout endomorphisme φ de $\mathbb{R}^3$, il existe un unique endomorphisme σ_φ symétrique et un unique endomorphisme α_φ de $\mathbb{R}^3$ tels que

$$\varphi \;=\; \sigma_\varphi \;+\; \alpha_\varphi\,.$$

Donner les expressions de σ_φ et α_φ en fonction de φ.

VI.4.2 . −Adjonction

Exercice VI.4.2.1 Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, u un endomorphisme de E et u^* son adjoint.

1) Montrer que

$$\operatorname{Ker} u^* \;=\; \operatorname{Im} u^\perp \text{ et } \operatorname{Im} u^* \;=\; \operatorname{Ker} u^\perp\,.$$

2) Montrer que

a) $\operatorname{Ker} u \circ u^* \;=\; \operatorname{Ker} u^*$;

b) $\operatorname{Im} u \circ u^* \;=\; \operatorname{Im} u$.

3) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

Exercice VI.4.2.2 Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien.

1) Soit p un projecteur sur un sous-espace F, parallèlement à un sous-espace G. Montrer que l'adjoint p^* est un projecteur et le décrire.

2) Soit $p \in \operatorname{End}(E)$ un projecteur. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) p est un projecteur orthogonal.

ii) p est auto-adjoint.

iii) $\forall x \in E,\ ||p(x)|| \;\leq\; ||x||$.

Exercice VI.4.3 (Projecteur, adjoint) Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, a et b deux vecteurs de E de norme 1 et non orthogonaux.

On désigne par $D := \operatorname{Vect}\{a\}$ et par $H := (\operatorname{Vect}\{b\})^\perp$.

1) Montrer que $E \;=\; D \oplus H$.

2) On désigne par $p : E \to E$ **définie par** $p(x) := \dfrac{\langle b, x\rangle}{\langle b, a\rangle} a$.

a) Montrer que p est la projection sur D parallèlement à H.

b) Montrer que l'adjoint p^* de p est défini par :

$$\forall y \in E, \quad p^*(y) = \frac{\langle a, y\rangle}{\langle a, b\rangle} b \, .$$

c) Caractériser géométriquement p^*.

3) Déterminer $p^* \circ p$. Montrer que c'est un endomorphisme diagonalisable.

4) Déterminer le noyau de $p^* \circ p$, puis les valeurs propres de $p^* \circ p$.

Exercice VI.4.4 (Caractérisation des symétries) Soit E **un** $\mathbb{K}$**-espace vectoriel et** $s \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ **un endomorphismes.**

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $s \circ s = \mathrm{Id}$.

ii) $p^+ := \frac{1}{2}(\mathrm{Id} + s)$ est un projecteur.

iii) $p^- := frac12(\mathrm{Id} - s)$ et un projecteur.

iv) $E = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} + s) \oplus \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - s)$.

On dit alors que s et une *symétrie* ou une *involution linéaire*.

Exercice VI.4.5 (Caractérisation des symétries orthogonales) Soit E **un** $\mathbb{R}$**-espace vectoriel espace euclidien (ou même simplement préhilbertien réel (cf. le point ii de la définition V.2.6,),) et** $s \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ **une symétrie (cf. l'exercice VI.4.4.)**

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $s \in \mathcal{O}(E)$.

ii) $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} + s) \perp \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - s)$.

iii) Le projecteur $p^+ := \frac{1}{2}(\mathrm{Id} + s)$ est un projecteur orthogonal.

iv) Le projecteur $p^- := \frac{1}{2}(\mathrm{Id} - s)$ est un projecteur orthogonal.

v) $s = s^*$. On rappelle qu'on dit alors que s et *autoadjoint* (cf. la définition VI.3.1.)

On dit dans ce cas que la symétrie est la *symétrie orthogonale* par rapport à $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - s)$. On dira aussi *réflexion* par rapport à $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - s)$.

Exercice VI.4.6 (Projection et symétrie) Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2. Soient x et $y \in E$. Montrer que :

1) Si $||x|| = ||y||$, alors il existe un hyperplan H de E tel que $y = s(x)$ où s est la symétrie orthogonale par rapport à H.

2) Si $\langle x, y\rangle = ||y||^2$, alors il existe un hyperplan H de E tel que $y = p(x)$ où p est la projection orthogonale sur H.

Exercice VI.4.7 (Composition de symétries orthogonales) Soit E un espace euclidien de dimension n. Soient F, G deux sous-espaces de E tels que $F \perp G$. On note s_F et s_G les symétries orthogonales par rapport à F et G.

Montrer que

$$s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{(F \oplus G)^\perp}\,.$$