VII . $-$Le cas de la dimension 2

DAns ce chapitre (VII,) $(P, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace *euclidien* (cf. V.2.6,) de dimension 2 ; on parlera usuellement de *plan euclidien*. On notera $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire et $||\cdot||$ la norme euclidienne (cf. V.2.7,) définie par $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

VII.1 . $-$Écriture des isométries dans une base orthonormée fixée

Notation VII.1.1 i) On notera dans ce qui suit

$$\mathcal{S}_1 := \{(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \, ; \, a^2+b^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2 \, .$$

ii) Soit $\mathcal{B} := (u,v)$ une base orthonormée (cf. V.1.6.iii,) de P.

Proposition VII.1.2 *Pour toute isométrie $f \in \mathcal{O}(P)$ (cf. VI.1.2,) il existe un unique $(a,b,\varepsilon) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\{-1,1\}$ tel que la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ de f dans la base $\mathcal{B}$ soit*

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix} \text{ de plus on a } (a,b) \in \mathcal{S}_1 \, , \, i.e. a^2 + b^2 = 1 \, .$$

***Démonstration** : Puisque $\mathcal{B}$ est une base de E, il existe un unique*

$$(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } \begin{array}{rcl} f(u) & = & au+cv \\ f(v) & = & bu+dv \end{array} \text{ i.e. } M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

Puisque f est une isométrie et $\mathcal{B}$ une base orthonormée, $(f(u), f(v))$ est encore une base orthonormée ;

c'est-à-dire que :

$$\begin{aligned}
& \begin{Bmatrix} \langle f(u), f(u)\rangle &=& \langle u,u\rangle = 1 \\ \langle f(v), f(v)\rangle &=& \langle v,v\rangle = 1 \\ \langle f(u), f(v)\rangle &=& \langle u,v\rangle = 0 \end{Bmatrix} \\
\Leftrightarrow\quad & \begin{Bmatrix} a^2+c^2 &=& 1 \\ b^2+d^2 &=& 1 \\ ab+cd &=& 0 \end{Bmatrix} \\
\Rightarrow\quad & \begin{Bmatrix} a^2+c^2 &=& 1 \\ b^2+d^2 &=& 1 \\ a^2b^2+b^2c^2 &=& b^2 \\ a^2d^2+c^2d^2 &=& d^2b^2c^2+c^2d^2 &=& c^2 \\ a^2b^2+a^2d^2 &=& a^2 \\ ab+cd &=& 0 \end{Bmatrix} \\
\Rightarrow\quad & \begin{Bmatrix} a^2+c^2 &=& 1 \\ b^2+d^2 &=& 1 \\ a^2b^2-c^2d^2 &=& b^2-c^2 \\ a^2b^2-c^2d^2 &=& a^2-d^2 \\ ab+cd &=& 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{VII.1.2.1} \\
\Rightarrow\quad & \begin{Bmatrix} a^2+c^2 &=& 1 \\ b^2+d^2 &=& 1 \\ (ab+cd)(ab-cd) &=& b^2-c^2 \\ (ab+cd)(ab-cd) &=& a^2-d^2 \\ ab+cd &=& 0 \end{Bmatrix} \\
\Rightarrow\quad & \begin{Bmatrix} a^2+c^2 &=& 1 \\ a^2 &=& d^2 \\ c^2 &=& b^2 \\ ab+cd &=& 0 \end{Bmatrix} \\
\Rightarrow\ \exists(\varepsilon,\eta) \in MM\{-1,1\}\times\{-1,\},\quad & \begin{Bmatrix} d &=& \varepsilon a \\ c &=& \eta b \\ ab+ab\varepsilon\eta &=& 0 \end{Bmatrix}.
\end{aligned}$$

Proposition VII.1.3 *Réciproquement, pour tout* $(a, b, \varepsilon) \in \mathcal{S}_1 \times \{-1, 1\}$, *l'endomorphisme* f *dont la matrice* $M_{\mathcal{B}}(f)$ *dans la base* $\mathcal{B}$ *est* $\begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix}$, *est une isométrie. On dira alors parfois que c'est l'isométrie de paramètres* (a, b, ε) *dans la base* $\mathcal{B}$.

Proposition VII.1.4 *Pour* $f \in \mathcal{O}(E)$ *et* $g \in \mathcal{O}(E)$ *de paramètres respectifs* (a, b, ε) *et* (c, d, η) *dans la base* $\mathcal{B}$, $f \circ g$ *a pour paramètres* $(ac - \varepsilon bd, \varepsilon ad + bc, \varepsilon\eta)$.

***Démonstration** : On a*

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix} \text{ et } M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} c & -\eta d \\ d & \eta c \end{pmatrix} \text{ d'où :}$$

$$\begin{aligned}
M_{\mathcal{B}}(f\circ g) &= M_{\mathcal{B}}(f)\cdot M_{\mathcal{B}}(g)\\
&= \begin{pmatrix} a & -\varepsilon b\\ b & \varepsilon a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c & -\eta d\\ d & \eta c\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} ac-\varepsilon bd & -\eta ad-\varepsilon\eta bc\\ bc+\varepsilon ad & -\eta bd+\varepsilon\eta ac\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} ac-\varepsilon bd & -\varepsilon\eta(\varepsilon ad+bc)\\ \varepsilon ad+bc & \varepsilon\eta(ac-\varepsilon bd)\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Proposition VII.1.5 *Si f est de paramètres $(a,b,\varepsilon)\in\mathcal{S}_1\times\{-1,1\}$, f^{-1} est de paramètres $(a,-\varepsilon b,\varepsilon)$.*

***Démonstration** : Si f a pour paramètres (a,b,ε) dans la base $\mathcal{B}$, $M_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix} a & -\varepsilon b\\ b & \varepsilon a\end{pmatrix}$. Il en résulte alors, puisque $\mathcal{B}$ est orthonormée (cf. VI.2.6,)*

$$M_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = M_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^t M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & b\\ -\varepsilon b & \varepsilon a\end{pmatrix};$$

qui est l'isométrie de paramètres $(a,-\varepsilon b,\varepsilon)$.

Proposition VII.1.6 *Pour $f\in\mathcal{O}(E)$ et $g\in\mathcal{O}(E)$ de matrices respectives $M_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix} a & -\varepsilon b\\ b & \varepsilon a\end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}}(g)=\begin{pmatrix} c & -\eta d\\ d & \eta c\end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$, on a :*

$$\begin{aligned}
M_{\mathcal{B}}(f\circ g\circ f^{-1}) &= \begin{pmatrix} a & -\varepsilon b\\ b & \varepsilon a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c & -\eta d\\ d & \eta c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b\\ -\varepsilon b & \varepsilon a\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} ac-\varepsilon bd & -\eta ad-\varepsilon\eta bc\\ bc+\varepsilon ad & -\eta bd+\varepsilon\eta ac\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ -\varepsilon b & \varepsilon a\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} b^2c\varepsilon^2\eta+abd\varepsilon\eta-abd\varepsilon+a^2c & -abc\varepsilon^2\eta-a^2d\varepsilon\eta-b^2d\varepsilon+abc\\ -abc\varepsilon^2\eta+b^2d\varepsilon\eta+a^2d\varepsilon+abc & a^2c\varepsilon^2\eta-abd\varepsilon\eta+abd\varepsilon+b^2c\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} b^2c\eta+abd\varepsilon\eta-abd\varepsilon+a^2c & -abc\eta-a^2d\varepsilon\eta-b^2d\varepsilon+abc\\ -abc\eta+b^2d\varepsilon\eta+a^2d\varepsilon+abc & a^2c\eta-abd\varepsilon\eta+abd\varepsilon+b^2c\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Corollaire VII.1.7 (Le groupe $\mathcal{SO}(P)$) *L'ensemble des isométries de paramètres $(a,b,1)\in\mathcal{S}_1\times\{-1,1\}$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}(P)$ isomorphe au groupe $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ (cf. l'exercice II.5.8 et l'exercice II.5.9 ;) et qu'on notera $\mathcal{SO}(P)$. Ce dernier est donc en particulier abélien.*

Définition VII.1.8 (Groupe spécial orthogonal) Le groupe $\mathcal{SO}(P)$ caractérisé ci-dessus est appelé *groupe spécial orthogonal.*

VII.2 . –Propriétés intrinsèquent des isométries

Une base $\mathcal{B}:=(u,v)$ est toujours fixée dans ce paragraphe (VII.2.) On cherche désormais, grâce à l'écriture des isométries dans cette base, à déterminer des propriétés caractéristiques indépendantes de la base, comme l'existence de vecteurs et valeurs propres par exemple. Cela conduira aux caractérisations intrinsèques données au paragraphe VII.3.

Proposition VII.2.1 (Vecteurs propres d'une isométrie) *Un élément $f \in \mathcal{SO}(P)$ possède un vecteur propre si et seulement si $f = \mathrm{Id}_P$ ou $f = -\mathrm{Id}_P$.*

***Démonstration** :*
Supposons que $w \in P$ soit un vecteur propre de f associé à une valeur propre λ. On a alors

$$\begin{array}{rrcl} & f(w) & = & \lambda w \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} a & -b \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{Bmatrix} ax + -by & = & \lambda x \\ bx + ay & = & \lambda y \end{Bmatrix} & & \\ \Leftrightarrow & \begin{Bmatrix} (a-\lambda)x - by & = & 0 \\ bx + (a-\lambda)y & = & 0 \end{Bmatrix} & & \\ \Leftrightarrow & \begin{Bmatrix} [(a-\lambda)^2 + b^2]x & = & 0 \\ [(a-\lambda)^2 + b^2]y & = & 0 \end{Bmatrix} & & \\ \Leftrightarrow & \begin{Bmatrix} (a^2 + b^2 + 1 - 2a\lambda)x & = & 0 \\ (a^2 + b^2 + 1 - 2a\lambda)y & = & 0 \end{Bmatrix} & & \\ \Leftrightarrow & \begin{Bmatrix} (1 - a\lambda)x & = & 0 \\ (1 - a\lambda)y & = & 0 \end{Bmatrix} & & \end{array}$$

Si $|a| < 1$, comme $|\lambda| = 1$, le système ci-dessus équivaut à $x = y = 0$; c'est-à-dire que f n'a pas de vecteur propre.

Dans le cas où $a = \pm 1$, $b = 0$, et l'on a bien

$$f = \pm\mathrm{Id}_P .$$

On note

$\mathcal{O}_-(P)$ l'ensemble des isométries de paramètres $(, a, b-1) \in \mathcal{S}_1 \times \{-1, 1\}$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

En particulier

$$\mathcal{O}_-(P) = \mathcal{O}(P) \setminus \mathcal{SO}(P)$$

qui n'est donc sûrement pas un groupe puisque $\mathrm{Id}_P \notin \mathcal{O}_-(P)$.

Proposition VII.2.2 *Tout endomorphisme*

$f \in \mathcal{O}_-(P)$ *admet une base orthonormée de vecteurs propres*

associés respectivement aux valeurs propres 1 et -1 .

***Démonstration** : Si $a = \pm 1$, $b = 0$, et la base $\mathcal{B}$ répond à la question.*
Sinon, si (w, λ) est un couple vecteur propre valeur propre pour f, on rappelle que (cf. VI.1.5,) $\lambda^2 = 1$.

Alors :

$$
\begin{array}{rl}
& f(w) = \lambda w \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} ax + by & = & \lambda x \\ bx - ay & = & \lambda y \end{array}\right\} \\
\Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} (a-\lambda)x + by & = & 0 \\ bx - (a+\lambda)y & = & 0 \end{array}\right\} \\
\Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} (a-\lambda)x + by & = & 0 \\ [(a-\lambda)(a+\lambda) + b^2]x & = & 0 \end{array}\right\} \\
\Leftrightarrow & \left\{(a-\lambda)x + by \;=\; 0\,.\right\}
\end{array}
$$

Il en résulte que

$$z \;:=\; \begin{pmatrix} -b \\ a-1 \end{pmatrix} \text{ et } w \;:=\; \begin{pmatrix} -b \\ a+1 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propre de f respectivements associés aux valeurs propres 1 et -1. De plus

$$\langle z, w\rangle \;=\; b^2 + (a-1)(a+1) \;=\; a^2 + b^2 - 1 \;=\; 0\,.$$

Proposition VII.2.3 *Il existe donc une base dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.*

Proposition VII.2.4 (Conjugaison) *Soit $(f, g) \in \mathcal{O}(P) \times \mathcal{O}(P)$. Alors*

$$g \in \mathcal{SO}(P) \text{ (resp. } \mathcal{O}_-(P)\text{) } \Leftrightarrow f \circ g \circ f^{-1} \in \mathcal{SO}(P) \text{ (resp. } \mathcal{O}_-(P)\text{ .)}$$

Démonstration : *Il suffit de démontrer l'implication dans l'équivalence ci-dessus puisque*

$$g \;=\; (f^{-1}) \circ f \circ g \circ f^{-1} \circ (f^{-1})^{-1}\,.$$

Puisque $\mathcal{O}_-(P) \;=\; \mathcal{O}(P) \;\setminus\; \mathcal{SO}(P)$, il suffit même de montrer que

$$g \;\in\; \mathcal{O}_-(P) \;\Rightarrow\; f \circ g \circ f^{-1} \;\in\; \mathcal{O}_-(P)\,.$$

Or les éléments de $\mathcal{O}_-(P)$ (cf. VII.2.2,) sont caractérisé par le fait qu'ils possèdent $(z, 1)$ et $(w, -1)$ en tant que paires de vecteurs propres, valeurs propres. Si donc c'est le cas pour g, c'est encore le cas (cf. V.0.8.ii,) pour $f * g * f^{-1}$.

VII.3 . −Caractérisation des isométries, orientation

On donne, dans le théorème VII.3.1 qui suit une caractérisation intrinsèque du groupe $\mathcal{SO}(P)$ (cf. VII.1.7,) ainsi que de l'ensemble $\mathcal{O}_-(P)$ (cf. ,) dont les définitions pouvaient sembler subbordonnées à la donnée de la base $\mathcal{B}$.

Théorème VII.3.1 (Structure de $\mathcal{SO}(P)$ et $\mathcal{O}_-(P)$.) *i) ($\mathcal{SO}(P)$)*
Une base $\mathcal{B}$ étant fixée, et le groupe $\mathcal{SO}(P)$ étant défini relativement à cette base comme en , i.e.

$$\mathcal{SO}(P) = \{f \in \mathcal{O}(P) \,;\, \exists (a,b) \in \mathcal{S},\, M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\},$$

pour toute base orthonormée $\mathcal{C}$, notons g l'unique isométrie telle que $g(\mathcal{B}) = \mathcal{C}$. Alors pour toute isométrie $f \in \mathcal{SO}(P)$, de matrice $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$: $f \in \mathcal{SO}(P)$

— *Si $g \in \mathcal{SO}(P)$, $M_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$,*

— *Si $g \in \mathcal{O}_-(P)$, $M_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ - & b \end{pmatrix} a.$*

***Démonstration** : Soit $f \in \mathcal{O}(E)$ une isométrie. S'il existe $(a,b) \in \mathcal{S}_1$ tel que pour toute base orthonormée $\mathcal{C}$, $M_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, c'est en particulier le cas pour la base $\mathcal{B} = (u,v)$; c'est-à-dire que $f \in \mathcal{SO}(E)$.*

Réciproquement, soit $f \in \mathcal{SO}(E)$. Il existe $(a,b) \in \mathcal{S}_1$ tel que

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & -b \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Le résultat est alors une conséquence de la proposition VII.1.6.

ii) Pour toute isométrie $f \in \mathcal{O}(P)$, $f \in \mathcal{O}_-(P)$ si et seulement si il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

***Démonstration** : (cf. .)*

Définition VII.3.2 (Rotation) On appellera *rotation* ou *isométrie positive* un élément de $\mathcal{SO}(P)$.

Définition VII.3.3 (Symétrie orthogonale) La proposition VII.2.2 conduit à appeler *symétrie orthogonale* ou *réflexion orthogonale* un élément $s \in \mathcal{O}_-(P)$.

Théorème VII.3.4 *Étant donné un couple (u,v) de vecteurs unitaires, il existe un unique élément $f \in \mathcal{SO}_\phi E$, (resp. $s \in \mathcal{O}_-(P)$,) tel que $v = f(u)$, (resp. $v = s(u)$.)*

***Démonstration** :*

Définition VII.3.5 (Orientation) Soit $\mathbb{B}$ l'ensemble des bases orthonormées de P (cf. V.1.6.iii.) Si

$$\big(\mathcal{B}_1 := (u_1, v_1)\,,\, \mathcal{B}_2 := (u_2, v_2)\big)\,,$$

est un couple d'élément s de $\mathbb{B}$, il existe un unique $f \in \mathcal{O}(P)$ tel que

$$f(u_1) = u_2 \text{ et } f(v_1) = v_2\,.$$

i) — Si $f \in \mathcal{SO}(P)$, on dit que $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ *ont même orientation* ;
— si $f \in \mathcal{O}_-(P)$ on dit que $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ *sont d'orientations contraires*.

ii) C'est un exercice de montrer que la relation *avoir même orientation* est une relation d'équivalence ; ce qui découle du fait que $\mathcal{SO}(P)$ et un groupe.

iii) Une base $\mathcal{B}$ de référence étant fixée on dit qu'on a *fixé une orientation* sur P; ou encore que P est un *plan euclidien orienté*. On dira alors de toute base qui a même orientation que $\mathcal{B}$ que c'est une *base directe* et sinon que c'est une *base rétrograde*. L'ensemble des bases directes n'est autre que l'orbite de $\mathcal{B}$ sous laction du groupe $\mathcal{SO}(P)$ (cf. III.3.2.i.).

VII.4 . –Exercices

Exercice VII.4.1 Étant donnée une rotation f (cf. la définition VII.3.2,) montrer que si f admet des valeurs propres, alors $f = \mathrm{Id}$ ou $f = -\mathrm{Id}$.

Exercice VII.4.2 Montrer que si $\gamma \in \mathcal{O}_{2,-}\mathbb{R}$, γ possède nécessairement1 et -1 comme valeurs propres ; et est donc diagonalisable dans une base orthonormée .

Exercice VII.4.3 a) Étudier la composée de deux symétries orthogonales *i.e.* de deux élément s de $\mathcal{O}_{2,-}\mathbb{R}$.

b) En déduire, un élément s de $\mathcal{O}_{2,-}\mathbb{R}$ étant fixé, que pour tout $\gamma \in \mathcal{O}_{2,-}\mathbb{R}$, il existe un unique $f \in \mathcal{SO}_2\mathbb{R}$ tel que

$$\gamma = fs.$$

c) Déterminer les élément s caractéristiques de γ en fonction de ceux de s et de ceux de f.