

VIII . – Le groupe orthogonal en dimension 3

Dans ce chapitre (VIII) E est un espace euclidien (cf. V.2.6.) de dimension 3 dont on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire (cf. le point i de la définition V.2.6.) et $\| \cdot \|$ la norme (cf. la proposition V.2.7.)

VIII.1 . – Structure des isométries en dimension 3

Proposition VIII.1.1 (Sous-espaces stables) Soit $f \in \mathcal{O}(E)$ une isométrie.

i) Il existe une droite D de E f -stable si et seulement si il existe un plan P orthogonal à D f -stable.

Démonstration : (cf. la proposition VI.1.6 et le point i de la proposition V.3.7.)

ii) (**Droite stable**)

Étant donné un vecteur $\vec{u} \in E \setminus \{0\}$, si $\vec{u}$ et $f(\vec{u})$ sont liés $\text{Vect}\{\vec{u}\}$ est une droite stable sous f .

Démonstration : Si $\vec{u}$ et $f(\vec{u})$ sont liés, puisque $\vec{u} \neq 0$, il existe a tel que $f(\vec{u}) = a\vec{u}$ ⁵ Alors pour tout $\lambda\vec{u} \in \text{Vect}\{\vec{u}\}$

$$f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u}) = \lambda a\vec{u} \in \text{Vect}\{\vec{u}\}.$$

iii) (**Plan stable**)

Si $\vec{u} \in E$ est tel que $\vec{u} \neq 0$, $\vec{u}$ et $f(\vec{u})$ sont indépendants et $\vec{u}$ et $f^2(\vec{u})$ sont liés, le plan $\text{Vect}\{\vec{u}, f(\vec{u})\}$ est stable sous f .

Démonstration : Il existe encore, pour les mêmes raisons que précédemment, $a \in \mathbb{R}$, tel que $f^2(\vec{u}) = a\vec{u}$. Puisque $\vec{u}$ et $f(\vec{u})$ sont supposés indépendants, $\text{Vect}\{\vec{u}, f(\vec{u})\}$ est vraiment un plan.

Alors pour tout $\lambda\vec{u} + \mu f(\vec{u}) \in \text{Vect}\{\vec{u}, f(\vec{u})\}$,

$$f(\lambda\vec{u} + \mu f(\vec{u})) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f^2(\vec{u}) = a\mu\vec{u} + \lambda f(\vec{u}) \in \text{Vect}\{\vec{u}, f(\vec{u})\}.$$

Théorème VIII.1.2 (Droite et plan stables) Étant donnée une isométrie $f \in \mathcal{O}(E)$, il existe une droite D et un plan P orthogonaux l'un à l'autre et f -stables.

Démonstration : (cf. l'exercice VIII.3.1.)

Théorème VIII.1.3 (Structure des isométries) Soit $f \in \mathcal{O}(E)$ une isométrie.

i) Il existe une droite D et un plan P orthogonaux (i.e. $D \perp P$), tels que

$$f|_D = \pm \text{Id}_D \text{ et } f|_P \in \mathcal{SO}(P) \tag{VIII.1.3.1}$$

ou $\mathcal{SO}(P)$ est le groupe spécial orthogonal de P défini en VII.1.8.

ii) De plus si $f \neq \pm \text{Id}_E$, le couple (D, P) est unique.

iii) Enfin si $f|_D = \text{Id}_D$ et $f \neq \text{Id}_E$, D est la seule droite $\Delta \subset E$ telle que $f|_\Delta = \text{Id}_\Delta$.

5. On pourrait même affirmer (cf. VI.1.5.) que $a = \pm 1$; mais ce n'est d'aucune utilité ici.

Démonstration : (cf. l'exercice VIII.3.2.)

Définition VIII.1.4 (Rotation) Étant donnée une isométrie $f \in \mathcal{O}(E)$, différente de $\pm \text{Id}_E$, notons

$$E = D \oplus P$$

une décomposition comme en VIII.1.3.1.

i) Si $f|_D = \text{Id}_D$, on dira que f est une *rotation* ou une *isométrie directe* ou encore une *isométrie positive*.

ii) (**axe**)

Dans le cas du point i ci-dessus la droite D sera appelée *axe de la rotation* (cf. le point iii du théorème VIII.1.3.)

iii) On notera $\mathcal{SO}(E)$ l'ensemble dont les éléments sont les rotations de E et Id_E ; cette dernière étant également considérée comme une rotation dont l'axe ne peut être défini canoniquement.

iv) On notera

$$\mathcal{O}_-(E) := \mathcal{O}(E) \setminus \mathcal{SO}(E).$$

Un élément de $\mathcal{O}_-(E)$ sera appelé *isométrie négative* ou *isométrie indirecte* ou encore *isométrie rétrograde*.

Proposition VIII.1.5 (Conjugaison) Étant donné $(f, g) \in \mathcal{O}(E) \times \mathcal{O}(E)$,

$$f \in \mathcal{SO}(E) \text{ (resp. } f \in \mathcal{O}_-(E) \text{)}$$

si et seulement s'il en est de même de $g \circ f \circ g^{-1}$; autrement dit les parties $\mathcal{SO}(E)$ et $\mathcal{O}_-(E)$ de $\mathcal{O}(E)$ sont stables par conjugaison ; ce qui ne signifie cependant pas que chacun de leurs éléments sont fixes !

Démonstration : (cf. l'exercice VIII.3.3.)

Définition VIII.1.6 (Réflexion ou symétrie orthogonale) Étant donnée une isométrie

$$f \in \mathcal{O}(E), f \neq \pm \text{Id}_E,$$

et une décomposition $E = D \oplus P$ comme en VIII.1.3.1, si

$$f|_D = -\text{Id}_D \text{ et } f|_P = \text{Id}_P,$$

on dit que f est une *réflexion* par rapport au plan P ou encore une *symétrie orthogonale* par rapport au plan P . C'est une définition cohérente avec le point ii de la définition V.3.1 ; en particulier on a

$$f \circ f = \text{Id}_E.$$

Bien entendu les réflexions sont des éléments de $\mathcal{O}_-(E)$.

Proposition VIII.1.7 (Structure de $\mathcal{O}_-(E)$) Pour tout $f \in \mathcal{O}_-(E)$, il existe une rotation r et une réflexion s telles que

$$f = r \circ s = s \circ r.$$

Démonstration : (cf. l'exercice VIII.3.4.)

Remarque VIII.1.8 (Réflexions) Comme le montre la proposition VIII.1.7 ci-dessus et contrairement au cas de la dimension 2 (cf. la définition VII.3.3.) en dimension 3 les isométries négatives *i.e.* les éléments de $\mathcal{O}_-(E)$ ne sont pas toutes des réflexions. C'est en fait une situation tout à fait particulière à la dimension 2 et ne se retrouve en fait jamais en dimension supérieures.

VIII.2 . –Le groupe $\mathcal{SO}(E)$ en dimension 3

Le but de ce paragraphe (VIII.2) est de montrer que l'ensemble $\mathcal{SO}(E)$ introduit au point iii de la définition VIII.1.4 est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$. Une première étape au théorème VIII.2.1 consiste à montrer que la composée de deux rotations admet un point fixe *i.e.* un vecteur égal à son image. On en déduit ensuite le résultat au théorème VIII.2.2.

Théorème VIII.2.1 (Point fixe d'une composée) *Étant données des rotations $f \in \mathcal{SO}(E)$ et $g \in \mathcal{SO}(E)$,*

$$\text{il existe } \vec{w} \in E \text{ tel que } f \circ g(\vec{w}) = \vec{w}.$$

Démonstration : (cf. l'exercice VIII.3.5.)

Théorème VIII.2.2 (Le groupe $\mathcal{SO}(E)$) *L'ensemble $\mathcal{SO}(E)$ défini au point iii de la définition VIII.1.4 est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$.*

Démonstration : (cf. l'exercice VIII.3.6.)

VIII.3 . –Exercices

Exercice VIII.3.1 (Droite et plan stable d'une isométrie en dimension 3) **Le but de ce problème est de prouver le théorème VIII.1.2. Soit donc E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel euclidien de dimension 3. Pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in E \times E$, on note $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ leur produit scalaire et $\|\vec{x}\| := \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$ la norme euclidienne associée.**

Dans toute la suite on fixe $f \in \mathcal{O}(E)$ une isométrie de E .

(Terminologie)

Pour $F \subset E$ un sous-espace de E , on dira que F est f -stable ; ce qui signifie que F est stable sous (ou par f .) *i.e.* $f(F) \subset F$.

1) Étant donné un vecteur $\vec{u} \in E \setminus \{0\}$, établir le résultat dans les situations suivantes :

- a) $\vec{u}$ et $f(\vec{u})$ sont liés ;**
- b) $\vec{u}$ et $f(\vec{u})$ sont indépendants ; mais $\vec{u}$, $f(\vec{u})$ et $f^2(\vec{u})$ sont liés.**

2) Étant donné un vecteur $\vec{u} \in E \setminus \{0\}$, établir le résultat dans les situations suivantes :

- a) $f^2(\vec{u}) - \vec{u} = 0$;
on suppose, dans la suite de la question 2 que $f^2(\vec{u}) - \vec{u} \neq 0$;**
- b) $f^2(\vec{u}) - \vec{u}$ et $f^3(\vec{u}) - f(\vec{u})$ sont liés ;**

- c) $f^2(\vec{u}) - \vec{u}$ et $f^4(\vec{u}) - f^2(\vec{u})$ sont liés ;
 d) $f^3(\vec{u}) - f(\vec{u})$ et $f^4(\vec{u}) - f^2(\vec{u})$ sont liés.

On suppose donné, dans toutes la suite du problème un vecteur $\vec{u} \in E \setminus \{0\}$ vérifiant les hypothèses suivantes :

H₁) L'ensemble $\{\vec{u}, f(\vec{u}), f^2(\vec{u})\}$ est une partie libre de E .

H₂) Les éléments $f^2(\vec{u}) - \vec{u}$, $f^3(\vec{u}) - f(\vec{u})$ et $f^4(\vec{u}) - f^2(\vec{u})$ sont deux à deux indépendants.

Pour tout couple $(\vec{x}, \vec{y}) \in E \times E$, on note :

$$P_{\vec{x}, \vec{y}} := \{\vec{z} \in E ; \|\vec{z} - \vec{x}\| = \|\vec{z} - \vec{y}\|\} \text{ (cf. la proposition V.3.8,)}$$

le plan médiateur de $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

3) (Plan médiateur)

Soit $(\vec{x}, \vec{y}) \in E \times E$.

a) (Le losange)

Montrer que

$$\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| \Leftrightarrow \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} - \vec{y} \rangle = 0 \text{ i.e. } \vec{x} + \vec{y} \perp \vec{x} - \vec{y}.$$

- b) Montrer que pour $\vec{x} \neq \vec{y}$ et $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$ $P_{\vec{x}, \vec{y}} = \vec{x} - \vec{y}^\perp$ est un plan qui contient en particulier $\vec{x} + \vec{y}$.

Dans la suite on abrègera la notation : pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si $f^k(\vec{u}) \neq f^\ell(\vec{u})$, on notera

$$P_{k, \ell} := P_{f^k(\vec{u}), f^\ell(\vec{u})} = \{\vec{v} \in E ; \|\vec{v} - f^k(\vec{u})\| = \|\vec{v} - f^\ell(\vec{u})\|\} = f^k(\vec{u}) - f^\ell(\vec{u})^\perp.$$

4) (Image des plans médiateurs)

Montrer que pour tout $(k, \ell, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ pour peu que $P_{k, \ell}$ soit défini alors $P_{k+m, \ell+m}$ l'est aussi et l'on a

$$P_{k+m, \ell+m} = f^m(P_{k, \ell}).$$

5) (Les plans médiateurs)

Montrer que les plans $P_{0,2}$, $P_{2,4}$ et $P_{0,4}$ sont bien définis et deux à deux distincts.

6) (La droite D)

Montrer que

$$\begin{aligned} P_{0,2} \cap P_{2,4} &= P_{0,2} \cap P_{0,4} \\ &= P_{2,4} \cap P_{0,4} \\ &= P_{0,2} \cap P_{2,4} \cap P_{0,4} \end{aligned}$$

est une droite qu'on notera D dans la suite.

7) Montrer que :

$$P_{1,3} = \text{Vect}\{f^2(\vec{u}), f(\vec{u}) + f^3(\vec{u})\}.$$

8) Montrer que :

$$P_{1,3} = P_{0,4} .$$

9) (D est stable)

Montrer que la droite D définie à la question 6, est f -stable.

Exercice VIII.3.2 (Structure des isométries) Prouver le théorème VIII.1.3.

Exercice VIII.3.3 (Conjugaison) Faire la preuve de la proposition VIII.1.5.

Exercice VIII.3.4 (Structure de $\mathcal{O}_-(E)$) Faire la preuve de la proposition VIII.1.7.

Exercice VIII.3.5 (Point fixe d'une composée) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel euclidien de dimension 3. On notera $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire.

Soient $(f, g) \in \mathcal{SO}(E) \times \mathcal{SO}(E)$ un couple de rotation et $\vec{u}$ (resp. $\vec{v}$) un vecteur directeur unitaire de l'axe de f (resp. g .)

1) ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont liés)

Montrer que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont liés, il existe

$$\vec{w} \in E \text{ tel que } f \circ g(\vec{w}) = \vec{w} .$$

Montrer qu'alors

$$f \circ g \in \mathcal{SO}(E) .$$

Dans la suite on suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont indépendants.

2) Montrer que pour $\vec{w} \in E$,

$$f \circ g(\vec{w}) = \vec{w} \Rightarrow \vec{w} \in P_{\vec{v}, f(\vec{v})} \cap P_{\vec{u}, g^{-1}(\vec{u})} .$$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont indépendants, $\vec{u}^\perp \neq \vec{v}^\perp$ et $\vec{u}^\perp \cap \vec{v}^\perp$ est une droite. Soit

$$\vec{r} \in \vec{u}^\perp \cap \vec{v}^\perp , \|\vec{r}\| = 1 . \quad \text{VIII.3.5.1}$$

Il s'ensuit que $\text{Vect}\{\vec{u}, \vec{r}\}$ et $\text{Vect}\{\vec{v}, \vec{r}\}$ sont des plans. En particulier $\text{Vect}\{\vec{u}, \vec{r}\}^\perp$ est une droite et l'on choisit :

$$\vec{s} \in \text{Vect}\{\vec{u}, \vec{r}\}^\perp , \|\vec{s}\| = 1^6 . \quad \text{VIII.3.5.2}$$

Il en résulte, par constructions que :

$$(\vec{u}, \vec{r}, \vec{s}) \text{ est une base orthonormée} . \quad \text{VIII.3.5.3}$$

6. '1 noter ici qu'il y a deux façons de choisir $\vec{s}$ mais que ce choix s'avère indifférent pour la suite; si ce n'est que changer $\vec{s}$ en son opposé changerait les paramètres (a, b) définis VIII.3.5.7

Notons :

$$\alpha := \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \text{ et } \beta := \langle \vec{v}, \vec{s} \rangle ; \text{ si bien que } \vec{v} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{s} \text{ et } \alpha^2 + \beta^2 = 1 . \quad \text{VIII.3.5.4}$$

Définissons encore :

$$\vec{t} := -\beta \vec{u} + \alpha \vec{s} . \quad \text{VIII.3.5.5}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \vec{t} &\in \vec{r}^\perp = \text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\} = \text{Vect}\{\vec{u}, \vec{s}\} \\ \text{et} \quad \langle \vec{v}, \vec{t} \rangle &= \langle \alpha \vec{u} + \beta \vec{s}, -\beta \vec{u} + \alpha \vec{s} \rangle \\ &= -\alpha \beta \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \alpha \beta \langle \vec{s}, \vec{s} \rangle + (\alpha^2 - \beta^2) \langle \vec{u}, \vec{s} \rangle \\ &= 0 \\ \text{de plus} \quad \|\vec{t}\| &= \langle -\beta \vec{u} + \alpha \vec{s}, -\beta \vec{u} + \alpha \vec{s} \rangle \\ &= \alpha^2 + \beta^2 \\ &= 1 \\ \text{si bien que} \quad (\vec{v}, \vec{r}, \vec{t}) &\text{ est une base orthonormée.} \end{aligned} \quad \text{VIII.3.5.6}$$

Il s'ensuit qu'il existe :

$$(a, b) \in \mathcal{S}_1 \text{ tel que } M_{(\vec{u}, \vec{r}, \vec{s})}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \quad \text{VIII.3.5.7}$$

et

$$(c, d) \in \mathcal{S}_1 \text{ tel que } M_{(\vec{v}, \vec{r}, \vec{t})}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -d \\ 0 & d & c \end{pmatrix} . \quad \text{VIII.3.5.8}$$

Si $\vec{w} \in E$ vérifie $f \circ g(\vec{w}) = \vec{w}$, en particulier on a nécessairement :

$$g(\vec{w}) = f^{-1}(\vec{w}) . \quad \text{VIII.3.5.9}$$

3) Calculer

$$g(\vec{u}) \text{ et } f^{-1}(\vec{v}) .$$

4) Montrer que si $\vec{w} = f \circ g(\vec{w})$,

$$\langle g(\vec{w}), \vec{r} \rangle = -\langle \vec{w}, \vec{r} \rangle = \langle f^{-1}(\vec{w}), \vec{r} \rangle .$$

Remarquons que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{r})$ est une famille libre de E et donc une base de E . Prenons garde qu'elle n'est pas orthonormée. Notons alors : $\vec{w} := x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{r}$.

5) Calculer $g(\vec{w})$.

6) Calculer $f^{-1}(\vec{w})$.

7) Montrer que pour tout $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{r} \in E$, $g(\vec{w}) = f^{-1}(\vec{w})$ entraîne :

$$\begin{cases} (1+c)z + \beta dx = 0 \\ (1+a)z + \beta by = 0 \end{cases} . \quad 1$$

8) Montrer que sous les hypothèses 7.1, on a :

$$(1+c)(1+a) (g(\vec{w}) - f^{-1}(\vec{w})) = 0 .$$

9) Montrer finalement que :

$$\vec{w} := -d(1-a)\vec{u} - b(1-c)\vec{v} + \beta(1-a)(1-c)\vec{r} \text{ vérifie } f \circ g(\vec{w}) = \vec{w} .$$

Exercice VIII.3.6 (Le groupe $\mathcal{SO}(E)$) Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel euclidien de dimension 3.

Soit $(f, g) \in \mathcal{SO}(E) \times \mathcal{SO}(E)$ un couple de rotations.

1) Montrer que $f^{-1} \in \mathcal{SO}(E)$.

2) Montrer que si f et g ont même axe (cf. le point ii de la définition VIII.1.4,) $f \circ g \in \mathcal{SO}(E)$.

On suppose désormais que les axes de f et g sont distincts; et on note $\vec{u}$ (resp. $\vec{v}$.) un vecteur unitaire (i.e. de norme 1,) de l'axe de f (resp. g .) Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants et $\text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est un plan.

On rappelle (cf. la question 2 de l'exercice VIII.3.5,) que pour $\vec{w} \in E$,

$$f \circ g(\vec{w}) = \vec{w} \Rightarrow \vec{w} \in D := P_{\vec{v}, f(\vec{v})} \cap P_{\vec{u}, g^{-1}(\vec{u})} .$$

3) Montrer que si D est une droite, $f \circ g$ est une rotation.

4) Montrer que si D est un plan alors

$$P_{\vec{v}, f(\vec{v})} = P_{\vec{u}, g^{-1}(\vec{u})} = \text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\} .$$

5) Discuter alors la situation en utilisant la formule

$$\vec{w} = -d(1-a)\vec{u} - b(1-c)\vec{v} + \beta(1-a)(1-c)\vec{r}$$

établie à la question 9 de l'exercice VIII.3.5.

6) Conclure.

Exercice VIII.3.7 (Conjugaison, projections, symétries) Soient u et v deux endomorphismes de V avec v inversible. On pose $t := vuv^{-1}$. Pour $a \in K$, on note U_a le noyau de $u - a\text{Id}_V$ et T_a le noyau de $t - a\text{Id}_V$.

1) Calculer T_a en fonction de U_a et v .

- 2) a) Si u est un projecteur de noyau N et d'image I , que dire de t ?
- b) Même question si u est une symétrie.
- 3) Si V est un espace euclidien de dimension 2 ou 3 u une rotation de V et v un endomorphisme orthogonal de V , que dire de t ?

Exercice VIII.3.8 (Centre de $\mathcal{O}(E)$) Soit E un espace euclidien de dimension n . Soit $f \in \mathcal{O}(E)$, et s une réflexion par rapport à un hyperplan H . Soit $\vec{u} \in H^\perp$, $\vec{u} \neq 0$.

- 1) Montrer que $f \circ s \circ f^{-1}$ est aussi une symétrie et en donner la base.
- 2) En déduire que f et s commutent si et seulement si $\vec{u}$ est vecteur propre de f .

3) (Vecteurs propre et homothétie)

Soit E un espace vectoriel non nul. Soit g un endomorphisme de E tel que pour tout vecteur x de E la famille $(x, g(x))$ soit liée.

Montrer que g est une homothétie.

- 4) Quel est le centre de $\mathcal{O}(E)$?

Exercice VIII.3.9 (Conjuguée d'une rotation) Soient $f \in \mathcal{SO}(E)$ une rotation d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel euclidien E de dimension 3 et $g \in \mathcal{O}(E)$.

- 1) Reconnaître $g \circ f \circ g^{-1}$.
- 2) Application : Déterminer le centre de $\mathcal{SO}(E)$.

Exercice VIII.3.10 Soit

$$P \subset \mathbb{R}^3 \text{ et } G := \{g \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R}) ; g(P) = P\}.$$

Montrer que G est un sous-groupe de $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.

Exercice VIII.3.11 (Sous-groupes finis de $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$) Il n'est absolument pas nécessaire, pour résoudre cet exercice, de savoir ce qu'est l'équation caractéristique d'un sous-groupe de $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$, et encore moins d'en connaître la forme.

Dans la suite E est un espace euclidien de dimension 3 et G un sous-groupe de $\mathcal{SO}(E)$.

- 1) Montrer que G a 2 (resp. 3) éléments si et seulement si il existe

$$r_G \in \mathcal{SO}(E) \text{ tel que } r_G^2 = \text{Id}_E \text{ et } G = \{r_G, \text{Id}_E\} \text{ (resp. } r_G^3 = \text{Id}_E \text{ et } G = \{\text{Id}_E, r_G, r_G^2\} \text{.)}$$

- 2) Pour G un sous-groupe à 2 (resp. 3) éléments de $\mathcal{SO}(E)$, montrer qu'il existe une droite D_G et un plan P_G orthogonaux tels que

$$\forall f \in G, f|_{D_G} = \text{Id}_{D_G}, f|_{P_G} \in \mathcal{SO}(P_G) \text{ et } f|_{P_G}^2 = \text{Id}_E \text{ (resp. } f|_{P_G}^3 = \text{Id}_E \text{.)}$$

3) Étant donné un sous-groupe G de $\mathcal{SO}(E)$, de cardinale 2 ou 3, déterminer $r_{G|P_G}$.

4) Soient G et H deux sous-groupes de $\mathcal{SO}(E)$ de même cardinal 2 ou 3. Montrer qu'il existe

$$f \in \mathcal{SO}(E) \text{ tel que } H = f \circ G \circ f^{-1}.$$

Indication : On pourrait utiliser l'exercice VIII.3.13, question 4.

5) Que peut-on dire de l'action par conjugaison de $\mathcal{SO}(E)$ sur l'ensemble de ses sous groupes de cardinal 2 (resp. 3 ?)

Exercice VIII.3.12 (Sphère unité) L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ étant muni de son produit scalaire canonique, on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des vecteurs de norme 1 (la *sphère unité*.)

1) Montrer que les groupes $\mathcal{O}_3\mathbb{R}$ et $\mathcal{SO}_3\mathbb{R}$ agissent sur $\mathcal{S}$.

2) L'action de $\mathcal{O}_3\mathbb{R}$ (resp. $\mathcal{SO}_3\mathbb{R}$) sur $\mathcal{S}$ est-elle transitive ?

Exercice VIII.3.13 (Existence d'isométries et transitivité de l'action) Soit E un espace euclidien.

1) Soit

$$(\vec{u}, \vec{v}) \in E \times E \text{ tel que } \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|.$$

a) Rappeler brièvement pourquoi $E = \text{Vect}\{\vec{v} - \vec{u}\} \oplus (\vec{v} - \vec{u})^\perp$.

On définit $i_{\vec{u}, \vec{v}}$ par

$$i_{\vec{u}, \vec{v}}|_{\text{Vect}\{\vec{v} - \vec{u}\}} := -\text{Id}_{\text{Vect}\{\vec{v} - \vec{u}\}} \text{ et } i_{\vec{u}, \vec{v}}|_{(\vec{v} - \vec{u})^\perp} = \text{Id}_{(\vec{v} - \vec{u})^\perp}.$$

b) Montrer que l'on définit bien ainsi un unique endomorphisme $i_{\vec{u}, \vec{v}} \in \text{End}(E)$ i.e. une unique application linéaire $i_{\vec{u}, \vec{v}} : E \rightarrow E$.

c) Montrer que $i_{\vec{u}, \vec{v}}$ est une isométrie.

d) Montrer que

$$i_{\vec{u}, \vec{v}}(\vec{u}) = \vec{v} \text{ et } i_{\vec{u}, \vec{v}}(\vec{v}) = \vec{u}.$$

2) Dédurre des questions précédentes que $\mathcal{O}(E)$ agit transitivement sur l'ensemble

$$\mathcal{S} := \{\vec{x} \in E ; \|\vec{x}\| = 1\}.$$

3) (Le cas de la dimension 2)

Soit P un espace euclidien de dimension 2, et

$$(\vec{u}, \vec{v}) \in P \times P \text{ tel que } \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \neq 0.$$

Montrer qu'il existe une unique rotation $r_{\vec{u}, \vec{v}}$ i.e. un unique élément

$$r_{\vec{u}, \vec{v}} \in \mathcal{SO}(P) \text{ tel que } r_{\vec{u}, \vec{v}}(\vec{u}) = \vec{v}.$$

4) (Le cas de la dimension 3)

Soient E un espace euclidien de dimension 3 et

$$(\vec{u}, \vec{v}) \in E \times E \text{ tel que } \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|.$$

Montrer qu'il existe

$$f \in \mathcal{SO}(E) \text{ tel que } f(\vec{u}) = \vec{v}.$$

5) Dédurre de ce qui précède que si E est un espace euclidien de dimension 2 ou 3,⁷ que $\mathcal{SO}(E)$ agit transitivement sur l'ensemble $\mathcal{S} := \{\vec{x} \in E; \|\vec{x}\| = 1\}$.

Exercice VIII.3.14 (Action sur la sphère unité en dimension 3) Soit S la sphère de rayon 1 dans $\mathbb{R}^3$.

1) Soient x et y deux points de S . Montrer qu'il existe une rotation r telle que $r(x) = y$.

2) Soient x, x', y, y' quatre points de S . Montrer qu'il existe une rotation ρ telle que $\rho(x) = x'$ et $\rho(y) = y'$ si et seulement si $\|x - x'\| = \|y - y'\|$.

Exercice VIII.3.15 (Décomposition des rotations) On pourra dans cette exercice utiliser les résultats de la question 3 de l'exercice VIII.3.13 et de la question 4 de l'exercice VIII.3.13 même si on ne les a pas établis.

Soient

- E un espace euclidien de dimension 3 ;
- $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de E ;
- $f \in \mathcal{SO}(E)$ une rotation.

1) Montrer que $f(\vec{j}) \perp \vec{i}$ si et seulement s'il existe des rotations $r_{\vec{i}}$ et $r_{\vec{j}}$ d'axes respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$,

$$(i.e. \text{ vérifiant } r_{\vec{i}}(\vec{i}) = \vec{i} \text{ et } r_{\vec{j}}(\vec{j}) = \vec{j},)$$

et telles que :

$$f = r_{\vec{i}} \circ r_{\vec{j}};$$

et que dans ce cas $r_{\vec{i}}$ et $r_{\vec{j}}$ sont uniques.

2) En déduire que tout $f \in \mathcal{SO}(E)$ se décompose sous la forme :

$$f = r'_{\vec{j}} \circ r_{\vec{i}} \circ r_{\vec{j}}$$

où $r_{\vec{j}}$ et $r'_{\vec{j}}$ sont des rotations d'axe $\vec{j}$ et $r_{\vec{i}}$ est une rotation d'axe $\vec{i}$.

3) Décomposer $(x, y, z) \mapsto (y, x, z)$ et $(x, y, z) \mapsto (x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha, z)$.

7. Le résultat vaut en fait en toute dimension mais nous n'avons pas fourni les arguments permettant de l'établir.