Université Orsay-Paris-Saclay — Année 2021–2022

LDD/S6 MDD354 — Structures algébriques

Corrigé Des exercices I.7

I.7 . −Exercices

Exercice I.7.1 (L'ensemble des parties) Est-il vrai que

$$\mathcal{P}(A \cap B) \;=\; \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \text{ et } \mathcal{P}(A \cup B) \;=\; \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)\ ?$$

Solution

$\cap$

$$\begin{array}{lrcl} \forall C\,, & C & \in & \mathcal{P}(A \cap B) \\ \Leftrightarrow & C & \subset & A \cap B \\ \Leftrightarrow & C \subset A & \wedge & C \subset B \\ \Leftrightarrow & C \,\in\, \mathcal{P}(A) & \wedge & C \,\in\, \mathcal{P}(B) \\ \Leftrightarrow & C & \in & \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)\,; \end{array}$$

d'où

$$\mathcal{P}(A \cap B) \;=\; \mathcal{P}(A) \;\cap\; \mathcal{P}(B)\,.$$

$\cup$ *En revanche* $\mathcal{P}(A \cup B)$ *est « plus gros » que* $\mathcal{P}(A) \;\cup\; \mathcal{P}(B)$*. En effet dès que* A *et* B *sont disjoints* $A \cup B \;\in\; \mathcal{P}(A \cup B)$ *; mais on n'a ni* $A \cup B \;\in\; \mathcal{P}(A)$*, ni* $A \cup B \;\in\; \mathcal{P}(B)$*.*
Dans le cas où A *et* B *sont des ensembles finis ayant respectivement* p *et* q *éléments on sait qu'alors* $\mathcal{P}(A)$ *et* $\mathcal{P}(B)$ *ont respectivement* 2^p *et* 2^q *éléments. Si on suppose* A *et* B *disjoints,* $A \cup B$ *a alors* $p+q$ *éléments ; et, par conséquent* $\mathcal{P}(A \cup B)$*,* 2^{p+q} *éléments. Or* $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ *aura au plus* $2^p + 2^q$ *éléments ; et même strictement moins en fait puisque* $\emptyset \;\in\; \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$*.*

Exercice I.7.2 Soient $A, B \subset E$. Résoudre les équations à l'inconnue $X \subset E$

1) $A \cup X = B$.

Solution

Puisque $A \;\subset\; A \;\cup\; X$*, l'existence d'un* X *tel que* $A \;\cup\; X \;=\; B$*, entraîne* $A \;\subset\; B$*. Si donc* $A \;\not\subset\; B$*, cette équation n'a pas de solution.*
Si $A \;\subset\; B$*,* $X_0 \;=\; B \;\setminus\; A$ *est la plus petite des solutions ; mais* $\forall C \in \mathcal{P}(B)$*,* $\;X_0 \;\cup\; C$ *est encore solution.*

2) $A \cap X = B$.

Solution

Comme on a toujours $A \cap X \;\subset\; A$*,* $A \;\cap\; X \;=\; B$ *entraîne* $B \;\subset\; A$*. Si donc* $B \;\not\subset\; A$*, l'équation n'a pas de solution.*
Si $B \;\subset\; A$*,* $X_0 \;=\; B$ *est la plus petite solution de l'équation. Si* A *est inclus dans un ensemble* E *et qu'on cherche* X *parmi les parties de* E*,* $\forall C \in \mathcal{P}(E \setminus\; A)$*,* $\;X_0 \;\cup\; C$ *est encore solution.*

Exercice I.7.3 (Fonctions caractéristiques) Soit A une partie de E, on appelle fonction caractéristique de A l'application f de E dans l'ensemble à deux éléments $\{0, 1\}$, telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Soit A et B deux parties de E, f et g leurs fonctions caractéristiques. Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :

$$1 - f\ ,\ fg\ ,\ \ ,\ f + g - fg\ .$$

Solution

$1-f$ *Si l'on note* $E \setminus A$ *le complémentaire de* A *dans* E, *i.e.*

$$x \in E \setminus A \Leftrightarrow x \notin A$$

il s'ensuit que

$$x \in E \setminus A \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - f(x) = 1$$

et

$$x \notin E \setminus A \Leftrightarrow x \in A \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow 1 - f(x) = 0\,;$$

ce qui définit bien $1-f$ *comme la fonction caractéristique de* $E \setminus A$.

fg

$$\begin{array}{lrcl} \forall x \in E, & fg(x) & = & 1 \\ \Leftrightarrow & f(x) = 1 & \wedge & g(x) = 1 \\ \Leftrightarrow & x \in A & \wedge & x \in B \\ \Leftrightarrow & x & \in & A \cap B\,. \end{array}$$

Comme la seule autre valeur possible que puisse prendre fg *est* 0, *c'est bien la fonction caractéristique de* $A \cap B$.

$f+g-fg$ *Il n'est pas difficile de montrer que* $f+g-fg$ *est la fonction caractéristique de* $A \cup B$.

Exercice I.7.4 (Différence symétrique) Soit un ensemble E et deux parties A et B de E. On désigne par $A \triangle B$ l'ensemble $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. ***Dans les questions ci-après il pourra être commode d'utiliser la notion de fonction caractéristique.***

1) Démontrer que

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\,.$$

Solution

$$A \setminus B \subset A \text{ et } A \setminus B \cap A \cap B \subset A \setminus B \cap B = \emptyset\,.$$

D'où

$$A \setminus B \subset A \triangle B$$

et de la même manière $B \setminus A \subset A \triangle B$. *Ainsi :*

$$A \setminus B \cup B \setminus A \subset A \triangle B\,.$$

Réciproquement

$$\forall x \in A \triangle B \subset A \cup B,\ x \in A \text{ ou } x \in B\,.$$

Or si $x \in A$, $x \notin A \cap B$ *donc* $x \notin B$ *donc*

$$x \in A \setminus B\,.$$

Le Raisonnement pour $x \in B$ *est le même et l'on conclut.*

2) Démontrer que pour toutes les parties A, B, C de E on a

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)\,.$$

Solution

$$\begin{aligned}
(A\triangle B)\triangle C &= \big((A\triangle B)\cup C\big)\setminus\big((A\triangle B)\cap C\big)\\
&= \big[\big((A\cup B)\setminus(A\cap B)\big)\cup C\big]\\
&\quad \setminus\big((A\triangle B)\cap C\big)\\
&= [(A\cup B\cup C)\setminus[(A\cap B)\setminus C]]\\
&\quad \setminus\big((A\triangle B)\cap C\big)\\
&= [(A\cup B\cup C)\setminus[(A\cap B)\setminus C]]\\
&\quad \setminus[[(A\cup B)\setminus(A\cap B)]\cap C]\\
&= [(A\cup B\cup C)\setminus[(A\cap B)\setminus C]]\\
&\quad \setminus[[(A\cup B)\cap C]\setminus(A\cap B)]\\
&= \big[[(A\cup B\cup C)\setminus[(A\cap B)\setminus C]]\setminus[(A\cup B)\cap C]\big]\\
&\quad \cup\big[[(A\cup B\cup C)\setminus[(A\cap B)\setminus C]]\cap(A\cap B)\big]\\
&= \big[(A\cup B\cup C)\setminus\big[[(A\cap B)\setminus C]\cup[(A\cup B)\cap C]\big]\big]\\
&\quad \cup\big[\big[[(A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B)]\cup[(A\cup B)\cap C]\big]\cap(A\cap B)\big]\\
&= [(A\cup B\cup C)\setminus[(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)]]\\
&\quad \cup\big[\big[[(A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B)]\cup[(A\cup B)\cap C]\big]\cap(A\cap B)\big]\\
&= (A\cup B\cup C)\setminus[(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)]
\end{aligned}$$

3) Démontrer qu'il existe une unique partie X de E telle que pour toute partie A de E,

$$A\triangle X = X\triangle A = A\,.$$

Solution

*i) (**Existence**)*
On a :

$$\begin{aligned}
A\triangle\emptyset &= (A\cup\emptyset)\setminus(A\cap\emptyset)\\
&= A\setminus\emptyset\\
&= A\,.
\end{aligned}$$

On n'a pas explicitement remarqué que

$$\forall A\,,\ \forall B\,,\ A\triangle B = B = \triangle A\,;$$

cependant c'est immédiat.

*ii) (**Unicité**)*
C'est un fait général que, dès qu'un ensemble est muni d'une loi associative (cf. la question 2 ,) s'il possède un élément neutre, celui-ci est unique. Redonnons l'argument pour mémoire : s'il existe ε et φ tels que pour tout A,

$$A\triangle\varepsilon = \varepsilon\triangle A = A\triangle\varphi = \varphi\triangle A = A,$$

en particulier

$$\varepsilon = \varepsilon\triangle\varphi = \varphi\,.$$

4) Démontrer que pour toute partie A de E, il existe une partie A' de E et une seule telle que

$$A\triangle A' = A'\triangle A = X\,.$$

Solution

*i) (**Existence**)*
On remarque que :

$$\begin{aligned} 1\triangle A &= (A \cup A) \setminus (A \cap A) \\ &= A \setminus A \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

ce qui assure que A est un symétrique de A pour la loi de composition $\triangle$.

*ii) (**Unicité**)*
L'unicité du symétrique dans le cas d'une loi de composition associative (cf. la question 2 ,) est un fait général dont la preuve est la suivante. Si B et C sont deux symétriques pour A :

$$\begin{aligned} B &= B\triangle\emptyset \\ &= B\triangle(A\triangle C) \\ &= (B\triangle A)\triangle C \\ &= \emptyset\triangle C \\ &= C\,. \end{aligned}$$

Exercice I.7.5 (Propriétés de la différence symétrique) A **et** B **sont des parties d'un ensemble** E.

Montrer que :

1) $(A\triangle B = A \cap B) \Leftrightarrow (A = B = \emptyset)\,.$

Solution

Bien entendu, si $A = B = \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$, et $A \cup B = \emptyset$; d'où

$$(A\triangle B) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \emptyset \setminus \emptyset = \emptyset\,(A \cap B)\,.$$

(On pouvait aussi directement écrire $\emptyset\triangle\emptyset = \emptyset$ (cf. la question 3 de l'exercice I.7.4 .))
Réciproquement, puisque $A\triangle B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$, $(A\triangle B)\cap(A\cap B) = \emptyset$. Il s'ensuit que si $(A\triangle B) = (A\cap B)$, on a en particulier :

$$\begin{aligned} & \left\{\begin{array}{lcl} (A\triangle B)\cap(A\triangle B) & = & \emptyset \\ (A\cap B)\cap(A\cap B) & = & \emptyset \end{array}\right\} \\ \Rightarrow & \left\{\begin{array}{lcl} A\triangle B & = & \emptyset \\ A\cap B & = & \emptyset \end{array}\right\} \\ \Rightarrow & \left\{\begin{array}{lcl} A\cup B = A\triangle B & = & \emptyset \\ A\cap B & = & \emptyset \end{array}\right\} \\ \Rightarrow & \left\{\begin{array}{lcl} A & = & \emptyset \\ B & = & \emptyset\,. \end{array}\right\} \end{aligned}$$

2) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)\,.$

Solution

Immédiat.

3) $A\triangle B = B\triangle A\,.$

Solution

Immédiat.

4) $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)\,.$

Solution

(cf. la question 2 de l'exercice I.7.4 .)

5) $A\triangle B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$.

Solution

(cf. la question 4 de l'exercice I.7.4 .)

6) $A\triangle C = B\triangle C \Leftrightarrow A = B$.

Solution

Seul le sens direct demande un arguments :

$$\begin{array}{rrcl} & A\triangle C & = & B\triangle C \\ \Rightarrow & (A\triangle C)\triangle C & = & (B\triangle C)\triangle C \\ \Rightarrow & A\triangle(C\triangle C) & = & B\triangle(C\triangle C) \\ \Rightarrow & A & = & B \end{array}$$
(cf. la question 2 de l'exercice I.7.4 , exercice I.7.4, question 4 .)

Exercice I.7.6 (Injection) Étant donée une application $f : A \to B$,

1) démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes

i) f est injective ;

ii) il existe une application g de B dans A telle que $g \circ f = \mathrm{Id}A$.

Solution

ii $\Rightarrow$ *i*

$$\begin{array}{lrcl} \forall(x,y)\in A\times A, & f(x) & = & f(y) \\ \Rightarrow & g[f(x)] & = & g[f(y)] \\ \Rightarrow & x & = & y\,; \end{array}$$

ce qui prouve que f est injective.

i $\Rightarrow$ *ii Pour tout $y \in \mathrm{Im}\, f$ il existe[a] un unique $x \in A$ tel que $f(x) = y$. Posons donc $g(y) = x$; ce qui définit g sur $\mathrm{Im}\, f$. Pour tout $y \notin \mathrm{Im}\, f$ choisisssons un élément x arbitraire dans A[b] et posons $g(y) = x$. Alors, pour tout $x \in A$, $f(x) \in \mathrm{Im}\, f$; et par conséquent, $g[f(x)] = x$. Bien entendu on ne peut pas dire grand chose, a priori de $f[g(y)]$ pour $y \in B$; mais rien n'est exigé non plus !*

a. Pour peu toutefois que A ne soit pas l'ensemble vide.
b. Pour peu une fois encore qu'il ne soit pas vide et qu'on n'ait pas trop de répugnance à utiliser l'axiome du choix.

On dit alors que g est une *rétraction* de f.

2) Une telle rétraction est elle unique ? Étudier le cas de $A = B = \mathbb{N},\ f(n) = 2n$.

Solution

Pour tout entier pair $m = 2n$, nécessairement $g(m) = n$. En revanche pour tout entier impair $m = 2n+1$, on peut choisir arbitrairement son image par g. On peut donc ainsi construire un grand nombre (pour ne pas dire une infinité) de rétractions g à l'injection f.

Exercice I.7.7 (Surjection) Étant donnée une application $f : A \to B$,

1) démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes

i) f est surjective ;

ii) il existe une application g de B dans A telle que $f \circ g = \mathrm{Id}B$.

Solution

ii $\Rightarrow$ *i* *Pour tout* $y \in B$, $f[g(y)] = y$, *c'est-à-dire que* $g(y)$ *est un antécédent pour* y ; *ce qui assure que* f *est surjective.*
i $\Rightarrow$ *ii* *Si* f *est surjective, pour tout* $y \in B$, *l'ensemble* $f^{-1}(\{y\})$ *est non vide et l'on peut donc choisir l'un de ses éléments qu'on notera* $g(y)$. *Il est clair qu'alors, pour tout* $y \in B$, $f[g(y)] = y$. *Ici encore, on ne peut pas dire grand chose a priori de* $g[f(x)]$ *pour* $x \in A$.

On dit alors que g est une *section* de f.

2) Une telle section est elle unique ?

Solution

On peut construire de nombreuses sections par exemple à l'application surjective $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *qui à un entier* a *associe sa classe modulo* n. *Construire une telle section équivaut en fait à choisir un représentant pour chaque classe ; ce qui laisse beaucoups de choix.*
On prendra cependant garde qu'aucune des sections de π *ne sera jamais compatible aux structures (de groupe ou d'anneau) sur* $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; *autrement dit il n'existe aucune section qui soit un morphisme.*

3) Démontrer que si deux sections ont même image elles coïncident.

Solution

Soient donc g et $h : B \to A$ *vérifiant*

$$f \circ g = f \circ h = \mathrm{Id} B \text{ et } \mathrm{Im}\, g = \mathrm{Im}\, h\,.$$

$$\begin{array}{lrcl}
\forall z \in B, & g(z) \in \mathrm{Im}\, g = \mathrm{Im}\, h & \wedge & h(z) \in \mathrm{Im}\, h = \mathrm{Im}\, g \\
\Rightarrow\ \exists (x,y) \in B \times B, & g(z) = h(x) & \wedge & h(z) = g(y) \\
\Rightarrow & f[g(z)] = f[h(x)] & \wedge & f[h(z)] = f[g(y)] \\
\Rightarrow & z = x & = & z = y \\
\Rightarrow & g(z) = g(y) & = & h(z)\,;
\end{array}$$

ce qui prouve que $g = h$.

Exercice I.7.8 (Bijection) **1)** Pour des ensembles E et F, montrer que $f : E \to F$ est une bijection de E sur F si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_E \text{ et } f \circ g = \mathrm{Id}_F\,. \qquad 1$$

Solution

— *Si* f *et* g *vérifient les égalités* 1 *ci-dessus,* $f \circ g = \mathrm{Id}_E$, *assure que* g *est une section de* f *au sens de l'exercice I.7.7 ; ce qui assure que* f *est surjective. De manière analogue (ou plutôt duale serait-on tenté de dire,)* $g \circ f = \mathrm{Id}_F$ *signifie que* g *est une rétraction de* f *au sens de l'exercice I.7.6 ; ce qui entraîne que* f *est injective. L'application* f *est donc bijective.*
— *Réciproquement si* f *est bijective, il résulte de l'exercice I.7.6 (resp. I.7.7 ,) que* f *possède une rétraction* $r : F \to E$ *telle que* $r \circ f = \mathrm{Id}_E$, *(resp. une section* $s : F \to E$ *telle que* $f \circ s = \mathrm{Id}_F$. *On a alors :*

$$\begin{aligned} s &= \mathrm{Id}_E \circ s \\ &= r \circ f \circ s \\ &= r \circ \mathrm{Id}_F \\ &= r\,. \end{aligned}$$

2) Il existe au plus une application $g : F \to E$ vérifiant 1. 1 .

Solution

Si g *et* h *sont deux applications vérifiant* 1. 1 *, en particulier*

$$g = \mathrm{Id}_E \circ g = h \circ f \circ g = h \circ \mathrm{Id}_F = h\,.$$

3) Si g vérifie 1. 1 , g est elle-même une bijection qu'on appelle du fait de l'unicité établie à la question 2 , la *bijection réciproque* de f.

Solution

Le fait que g est une bijection résulte du fait que f et g jouent des rôles symétriques dans 1. 1 et de l'équivalence établie à la question 1 .

Exercice I.7.9 (Propriétés des applications) Soit $f : E \to F$ une application.

1) **a)** Montrer que

$$\forall A \in \mathcal{P}(F),\ f(f^{-1}(A)) \subset A\,.$$

Solution

Pour tout $y \in f(f^{-1}(A))$ il existe, par définition, $x \in f^{-1}(A)$ tel que $y = f(x)$. Or, par définition encore, $x \in f^{-1}(A) \Leftrightarrow f(x) \in A$ donc $y \in A$. Il s'ensuit que $f(f^{-1}(A)) \subset A$.

b) Montrer que f est surjective si et seulement si

$$\forall A \in \mathcal{P}(F),\ A = f(f^{-1}(A))\,.$$

Solution

On a vu (cf. a ,) que $f(f^{-1}(A)) \subset A$ indépendamment de toute hypothèse sur f.
Supposons que f est surjective. Alors pour tout $y \in A$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Donc $f(x) \in A$ c'est-à-dire que $x \in f^{-1}(A)$. Il s'ensuit que $y = f(x) \in f(f^{-1}(A))$ ce qui entraîne que $A \subset f(f(^{-1}(A))$.
Réciproquement supposons que pour tout $A \subset F$, $A = f(f^{-1}(A))$. Alors pour tout $y \in f$, $\{y\} = f(f^{-1}(\{y\}))$ ce qui entraîne en particulier que $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$. Ceci signifie exactement que f est surjective.

2) (**Injectivité (facultatif)**)

a) Montrer que

$$\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A \subset f^{-1}(f(A))\,.$$

Solution

En effet $\forall x \in A,\ f(x) \in f(A)$ c'est-à-dire $x \in f^{-1}(A)$.

b) Montrer que f est injective si et seulement si

$$\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A = f^{-1}(f(A))\,.$$

Solution

On a vu (cf. a ,) que $A \subset f^{-1}(f(A))$ indépendamment de toute hypothèse sur f.
Supposons que f est injective. Pour tout $x \in f^{-1}(f(A))$, $f(x) \in f(A)$ par définition. Il existe donc $y \in A$, tel que $f(x) = f(y)$. Puisque f est injective, $x = y$ ce qui entraîne $x \in A$: d'où $f^{-1}(f(A)) \subset A$.
Réciproquement supposons que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f^{-1}(f(A = A$. Alors pour tout $(x, y) \in E \times E$, $f(x) = f(y)$ entraîne que $f(y) \in f(\{x\})$ donc $y \in f^{-1}(f(\{x\}))$. Or $f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$ d'où $y \in \{x\}$ c'est-à-dire que $x = y$ ce qui entraîne que f est injective.

Exercice I.7.10 (Image directe/réciproque) 1) Soient X et Y deux ensembles et f une application de X dans Y.

Si A et B sont deux sous-ensembles de X (respectivement de Y), quel est le lien entre $f(A \cup B)$ et $f(A) \cup f(B)$, $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$, $f^{-1}(f(A))$ et A (respectivement $f^{-1}(A \cup B)$ et $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, $f^{-1}(A \cap B)$ et $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, $f(f^{-1}(A))$ et A).

Pour toute inclusion fausse, donner un exemple et éventuellement une propriété supplémentaire de f qui la rend juste.

Solution

"

— $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. *Par contre, l'inclusion inverse n'est pas toujours vraie :* $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, $f(x_3) = y_1$. *Si on prend* $A = \{x_1, x_2\}$ *et* $B = \{x_2, x_3\}$, *on a* $f(A \cap B) = \{y_2\}$ *et* $f(A) \cap f(B) = \{y_1, y_2\}$ *Si* f *est injective, on a l'égalité* $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ *: soit* $y \in f(A) \cap f(B)$, $y = f(a) = f(b)$ *avec* $a \in A$, $b \in B$. *Par injectivité,* $a = b$ *donc* $y \in f(A \cap B)$.

— $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

— $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. *En effet, si 'l'on note* $\vee$ *le connecteur logique* ***ou*** *:*

$$\begin{array}{lrcl} \forall x \in X, & x & \in & f^{-1}(A \cup B) \\ \Leftrightarrow & f(x) & \in & A \cup B \\ \Leftrightarrow & f(x) \in A & \vee & f()x \in B \\ \Leftrightarrow & x \in f^{-1}(A) & \vee & x \in f^{-1}(B) \\ \Leftrightarrow & x & \in & f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) . \end{array}$$

— $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. *Se démontre sur le même modèle que l'identité ci-dessus. En remplaçant* $\cup$ *par* $\cap$ *et* $\vee$ *par* $\wedge$ *(qui signifie* ***et****,) on obtient une formule formellement correct et logiquement vraie.*

— $A \subset f^{-1}(f(A))$. *Prenons po0 ur* f *une application constante et* A *un sous-ensemble strict de* X. *Alors,* $f^{-1}(f(A)) = X \not\subset A$*On a égalité si* f *est injective.*

— $f(f^{-1}(B)) \subset B$. *Si* $f(a) = b_0$ *pour tout* $a \in X$, *on a* $Y \not\subset f(f^{-1}(Y)) = \{a\}$. *On a égalité si* f *est surjective. En effet pour tout* $y \in B$, *si* f *est surjective, il existe* $x \in$ *tel que* $f(x) = y$. *Il s'ensuit que* $x \in f^{-1}(B)$ *et donc que*

$$y \in f(f^{-1}(b)) .$$

2) Pour $f : E \to F$ une application entre deux ensembles, les applications :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(F) \\ A & \mapsto & f(A) \\ & \text{et} & \\ \mathcal{P}(F) & \to & \mathcal{P}(E) \\ B & \mapsto & f^{-1}(B) \end{array}$$

sont-elles (strictement) croissantes ? décroissantes ? par rapport à $\subset$?

Exercice I.7.11 Faire la preuve .

Solution

est presqu'immédiat puisque $\forall (x, y) \in a \times b,\ , (x, y)$ *est un antécédent de* x *(resp.* y*) par* p *(resp.* q*.)*
Pour , s'il existe $h : c \to a \times b$ *vérifiant*

$$p \circ h = f \text{ et } q \circ h = g,$$

alors nécessairement

$$\forall x \in c,\ h(x) = \big(f(x), g(x)\big) ;$$

ce qui assure l'unicité de h.
Reste à voir que cette formule définit bien h *; ce qui est pour ainsi dire immédiat.*

Exercice I.7.12 (Produit cartésien et applications) Soient A, B, C trois ensembles.

Étant donnée une application $f : A \times B \to C$,

pour tout $x \in A$, on définit $g(x) \in C^B$ une application de B dans C par

$$g(x)(y) := f\big((x, y)\big) .$$

Montrer que l'application

$$\phi : C^{A \times B} \to (C^B)^A , f \mapsto g$$

est une bijection,
Indication : *on pourra donner sa bijection réciproque.*

Solution

Soit $g : A \to C^B$*. définisson* $f : A \times B \to C$ *par*

$$f\big((x,y)\big) := g(x)(y)\ \forall (x,y) \in A \times B, \ .$$

On définit ainsi une application

$$\psi : (C^B)^A \to C^{A\times B} .$$

On a alors :

$$\forall f \in C^{A\times B},\ \forall (x,y) \in A\times B,\ \phi(f)(x)(y) = f(x,y) \qquad \text{I.7.12.1}$$

et

$$\forall g (C^B)^A \forall (x,y) \in A\times B,\ \psi(g)(x,y) = g(x)(y) . \qquad \text{I.7.12.2}$$

Pour tout $f \in C^{A\times B}$*, calculons* $\psi(\phi(f))$*. Comme* $\psi(\phi(f))$ *est une applications de* $A\times B$ *dans* C*, on doit évaluer* $\psi(\phi(f))$ *sur tous les couples* $(x,y) \in A\times B$*. or d'après I.7.12.2 ,*

$$\forall (x,y) \in A\times B,\ \psi(\phi(f))(x,y) = \phi(f)(x,y)$$

qui vaut $f(x,y)$ *d'après I.7.12.1 . Il s'ensuit que*

$$\forall f \in C^{A\times B},\ \psi(\phi(f)) = f \text{ i.e. } \psi \circ \phi = \mathrm{Id} C^{A\times B} .$$

De même $\forall g \in (C^B)^A, \ ,$ *calculons* $\phi(\psi(g))$*. pour tout* $x \in A$*,* $\phi(\psi(g))(x)$ *est une application de* C *dans* B*, si bien qu'il faut l'évaluer sur touts les éléments* $y \in B$*. Or d'après I.7.12.1 ,*

$$\forall (x,y) \in A\times B,\ \phi(\psi(g))(x)(y) = \psi(g)(x,y)$$

qui vaut $g(x)(y)$ *d'après I.7.12.2 . Il s'ensuit que*

$$\forall g \in (C^B)^A,\ \phi(\psi(g)) = g \text{ i.e. } \phi \circ \psi = \mathrm{Id}(C^B)^A .$$

Exercice I.7.13 Faire les détails de la preuve .

Solution

Si ϵ *et* ϵ' *sont neutres, alors*

$$\epsilon = \epsilon * \epsilon' = \epsilon' .$$

Si y *et* z *sont des symétriques de* x *pour* $*$,

$$x*y = y*x = x*z = z*x = \epsilon .$$

Il s'ensuit que

$$y = y*\epsilon = y*(x*z) = (y*x)*z = \epsilon * z = z .$$

Exercice I.7.14 Étant doné un morphisme $f : M \to N$, (de magmas associatifs,) montrer que :

1) si ϵ est l'élément neutre de M son image $f(\epsilon)$ n'est pas nécessairement l'élément neutre de N ;

Solution

C'est un contre exemple qui n'est pas particulièrement immédiat à construire parce que cette propriété est en fait souvent vraie. Nous ne connaissons pas nécessairement beaucoup d'exemples de magmas qui ne soient pas des groupes ; et dans le cas des groupes l'image de l'élément neutre est l'élément neutre.
Même quand un magma n'est pas un groupe l'ensemble $\mathbb{N}$ *pour l'addition par exemple, il s'injecte naturellement dans un groupe* $\mathbb{Z}$ *et les morphismes de magma vont naturellement s'étendre en morphismes de groupes, envoyant neutre sur neutre ; et interdisant du même coup de construire un contre exemple.*
Le fait de pouvoir se plonger dans un groupe correspond, pour un magma, ou à tout le moins pour un monoïde, à la propriété d'être intègre. Si l'on y déroge, on peut espérer construire un contre exemple.
Soit $M = \mathbb{R}$ *muni de la multiplication (ou tout autre anneau bien sûr) et* $N = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *muni de la multiplication* $(x,y)*(z,t) = (x*z, y*t)$*. Pour cette dernière loi l'élément neutre est* $(1,1)$*.*
Considérons enfin l'application

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R} ,\ x \mapsto (x,0) .$$

On a bien entendu

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ \phi(x*y) = (x*y, 0) = (x,0)*(y,0) = \phi(x)*\phi(y)$$

ce qui assure que ϕ est un morphisme de magma. Cependant

$$\phi(1) = (1,0) \neq (1,1) .$$

2) si y est le symétrique de x dans M, $f(y)$ n'est pas nécessairement le symétrique de $f(x)$ dans N.

Solution

Cette propriété est fortement liée à la précédente. En reprenant les notations ci-dessus, pour $x \neq 0$, $\frac{1}{x}$ est le symétrique de x dans M. Or $\phi(x) = (x,0)$ n'a tout simplement pas de symétrique dans N, ce ne peut donc, a fortiori être $\phi(\frac{1}{x})$.

Exercice I.7.15 Donner la preuve .

Solution

Ceci revient à dire que $f *_{M^E} g$ est une application bien définie de E dans M

$$\forall (f,g) \in M^E \times M^E, \ ;$$

ce qui est clair.
Si on veut que $f \mapsto f(x)$ soit un morphisme, nécessairement

$$\forall (f,g) \in M^E \times M^E, \ (f *_{M^E} g)(x) = f(x) * g(x) \ ;$$

ce qui définit bien $*_{M^E}$ de manière unique.

$$\begin{array}{lcl}
\forall (f,g,h) \in M^E \times M^E \times M^E, \forall x \in E, \quad \big((f *_{M^E} g) *_{M^E} h\big)(x) & = & \big(f *_{M^E} g\big)(x) * h(x) \\
 & = & (f(x) * g(x)) * h(x) \\
\text{associativité dans } M & = & f(x) * (g(x) * h(x)) \\
 & = & f(x) * \big(g *_{M^E} h\big)(x) \\
 & = & \big(f *_{M^E} (g *_{M^E} h)\big)(x) \ ;
\end{array}$$

c'est-à-dire que $(f *_{M^E} g) *_{M^E} h = f *_{M^E} (g *_{M^E} h)$ i.e. $*_{M^E}$ est associative.

$$\begin{array}{lcl}
\forall (f,g) \in M^E \times M^E, \forall x \in E, \quad (f *_{M^E} g)(x) & = & f(x) * g(x) \\
\text{commutativité de } M & = & g(x) * f(x) \\
 & = & (g *_{M^E} g)(x) \ .
\end{array}$$

c'est-à-dire que $f *_{M^E} g = g *_{M^E} f$; i.e. $*_{M^E}$ est commutative.

$$\begin{array}{lcl}
\forall f \in M^E, \forall x \in E, \quad (f *_{M^E} \epsilon_{M^E})(x) & = & f(x) * \epsilon \\
 & = & f(x) \ ;
\end{array}$$

i.e. $f *_{M^E} \epsilon_{M^E} = f$. On montrerait de même que $\epsilon_{M^E} *_{M^E} f = f$; si bien que ϵ_{M^E} est bien un élément neutre pour $*_{M^E}$.

Exercice I.7.16 **1)** Compléter la preuve .

2) **a)** Si ϵ est un élément neutre de M est-il encore un élément neutre d'un sous-magma N ?

Solution

Il se pourrait très bien que ϵ n'appartienne même pas N (cf. la question 1 de l'exercice I.7.14 .)

b) Si N possède un élément neutre η celui-ci est-il nécessairement celui de M ?

Solution

Non ! (cf. la question 1 de l'exercice I.7.14 .)

c) Si $x \in N$ possède un symétrique dans M celui-ci est-il aussi son symétrique dans N ?

Solution

On peut considérer $(\mathbb{N},+)$ *comme un sous-magma de* $(\mathbb{Z},+)$*. Or dans* $\mathbb{Z}$ *tout élément a un opposé tandis que dans* $\mathbb{N}$*, seul* 0 *en a un.*

d) Si $x \in N$ possède un symétrique dans N est-il aussi son symétrique dans M ?

Solution

Non ! (cf. la question 1 de l'exercice I.7.14 .)

Solution

Remarque 2.5 Le fait qu'on ait fréquemment recours à l'exercice I.7.14 pour trouver ici des contre exemple vient de ce qu'être un sous-magma signifie que $\mathrm{Id}M_{|N} : N \to M$ est un morphisme. Il est certes injectif ce qui pourrait aranger certaines choses ; mais de fait à l'exercice I.7.14 nous avions déjà construit des contre exemples avec un morphisme injectif …

Exercice I.7.17 Soit $(M,*)$ un magma associatif, d'élément neutre ϵ et N un sous-magma tel que $\epsilon \in N$. Montrer que :

1) ϵ est l'élément neutre de N.

Solution

On ajoute ici l'hypothèse que $\epsilon \in N$ *dont on va voir qu'elle n'est pas anodine : En effet pour tout* $x \in N$, $x *_N \epsilon = x *_M \epsilon$ *puisque* N *est un sous-magma. Donc* $x *_N \epsilon = x$*. De même*

$$\epsilon *_N x = \epsilon *_M x = x .$$

2) si $x \in N$ a un inverse y dans N, c'est aussi son inverse dans M.

Solution

Puisque N *est un sous-magma*

$$y *_M x = y *_N x = \epsilon = x *_N y = x *_M y .$$

Exercice I.7.18 Faire la preuve .

Solution

Si p *est un morphisme*

$$\forall\big((x,y),(z,t)\big) \in \big(M \times N\big) \times \big(M \times N\big), \quad \begin{aligned} p\big((x,y) \dagger (z,t)\big) &= p(x,y) * p(z,t) \\ &= x * z ; \end{aligned}$$

le même raisonement pour q *prouve que* $\dagger$ *est bien définie de manière unique.*

— *On a déjà vu dans ce contexte (cf. l'exercice I.7.11 et ,) qu'il existe une unique application*

$$h : P \to M \times N , \ x \mapsto \big(f(x), g(x)\big)$$

répondant à la question. Reste donc à voir que cette dernière est bien un morphisme or :

$$\forall (x,y) \in P, \quad \begin{aligned} h(x\sharp y) &= \big(f(x\sharp y), g(x\sharp y)\big) \\ &= \big(f(x) * f(y), g(x) \cdot g(y)\big) \\ &= \big(f(x), g(x)\big) \dagger \big(f(y), g(y)\big) \\ &= h(x) \dagger h(y) . \end{aligned}$$