

Corrigé Des exercices II.5

II.5 . – Exercices

**Exercice II.5.1 (Unicité des éléments remarquables)** Soit  $(E, *)$  un ensemble muni d'une loi associative.

**Solution**

*Il s'agit en définitive d'un magma (cf. cours) associatif; et l'on pourra se borner ici à rappler les résultats et .*

1) (Élément neutre)

Montrer que si  $(E, *)$  possède un élément neutre  $e$  celui-ci est unique.

**Solution**

*(cf. .)*

2) (Symétrique)

Montrer que si  $(E, *)$  possède un élément neutre  $e$ , tout élément  $x \in E$  possède au plus un symétrique.

**Solution**

*(cf. .)*

**Exercice II.5.2 (Affaiblissement des axiomes de groupe)** Soit  $G$  un ensemble muni d'une loi associative notée  $(G, *)$ . On suppose qu'il existe un élément neutre à gauche  $e$  (c'est-à-dire que  $e * x = x$  pour tout  $x \in G$ ) et que tout élément admet un inverse à gauche (c'est-à-dire que pour tout  $x \in G$ , il existe  $y \in G$  tel que  $y * x = e$ ).

1) Montrer que l'inverse à gauche est aussi un inverse à droite *i.e.*

$$y * x = e \Rightarrow x * y = e .$$

**Indication :** On pourra considérer l'inverse à gauche  $z$  de  $y$  et calculer  $e * (x * y) = (z * y) * (x * y)$  .

**Solution**

*Pour tout  $x \in G$ , il existe  $y \in G$  tel que  $y * x = e$  et  $z \in G$  tel que  $z * y = e$ . Alors :*

$$\begin{aligned} x * y &= e * (x * y) \\ &= (z * y) * (x * y) \\ &= ((z * y) * x) * y \\ &= (z * (y * x)) * y \\ &= (z * e) * y \\ &= z * (e * y) \\ &= z * y \\ &= e . \end{aligned}$$

2) Montrer que  $e$  est aussi un élément neutre à droite *i.e.*

$$\forall x \in G, x * e = x .$$

**Solution**

Pour tout  $x \in G, \exists y \in G$ , tel que  $y * x = e$ ; mais (cf. la question 1), on a aussi  $x * y = e$ . Alors

$$x * e = x * (y * x) = (x * y) * x = e * x = x.$$

3) Montrer que  $(G, *)$  est un groupe.

**Solution**

Grâce à la question 2 et à la question 1, les axiomes sont satisfaits.

**Exercice II.5.3 (Morphismes de groupes) Soit**

$$f : (G, *, \epsilon_G) \rightarrow (H, \cdot, \epsilon_H)$$

un morphisme de groupes.

**Solution**

Cet exercice est évidemment à mettre en rapport avec et l'on va constater que l'hypothèse que l'on a des groupes et non plus simplement des magmas donnent des propriétés supplémentaires :

1) (Élément neutre)

Montrer que  $f(\epsilon_G) = \epsilon_H$ .

**Solution**

On a  $\epsilon_G * \epsilon_G = \epsilon_G$ ; ce qui entraîne, puisque  $f$  est un morphisme

$$f(\epsilon_G) \cdot f(\epsilon_G) = f(\epsilon_G * \epsilon_G) = f(\epsilon_G).$$

Or  $H$  est un groupe si bien que  $f(\epsilon_G)$  a un symétrique  $\eta \in H$ . L'égalité précédente entraîne alors :

$$\epsilon_H = \eta \cdot f(\epsilon_G) = \eta \cdot f(\epsilon_G) \cdot f(\epsilon_G) \cdot f(\epsilon_G) = f(\epsilon_G).$$

2) (Symétrique)

Montrer que pour tout  $x \in G$ , si  $y$  est son symétrique,  $f(y)$  est le symétrique de  $f(x)$ .

**Solution**

Si  $(x, y) \in G \times G$  sont symétriques l'un de l'autre

$$\begin{aligned} x * y = y * x &= \epsilon_G \\ \Rightarrow f(x * y) = f(y * x) &= f(\epsilon_G) \\ \Rightarrow f(x) \cdot f(y) = f(y) \cdot f(x) &= \epsilon_H; \end{aligned}$$

en utilisant bien entendu question 1.

3) (Image)

Montrer que  $\text{Im } f$  est un sous-groupe de  $(H, \cdot)$ .

**Solution**

Puisque  $G$  est un groupe il est non vide et par conséquent  $\text{Im } f = f(G)$  est non vide.

De plus pour tout  $(u, v) \in \text{Im } f \times \text{Im } f$ , il existe  $(x, y) \in G \times G$  tel que

$$u = f(x) \text{ et } v = f(y).$$

Or (cf. 2),  $u^{-1} = f(x^{-1})$ ; si bien que  $u^{-1}v = f(x^{-1} * y)$  qui appartient à  $\text{Im } f$ , qui est donc bien un sous-groupe de  $H$ .

4) (Noyau)

Montrer que  $\text{Ker } f$  est un sous-groupe de  $(G, *)$ .

**Solution**

Puisque (cf. 1.)  $f(\epsilon_G) = \epsilon_H, \epsilon_G \in \text{Ker } f$  ; si bien que  $\text{Ker } f \neq \emptyset$ .

De plus :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \text{Ker } f \times \text{Ker } f, \quad f(x^{-1} * y) &= f(x^{-1}) \cdot f(y) \\ &= f(x)^{-1} \cdot f(y) \\ &= \epsilon_H^{-1} \cdot \epsilon_H \\ &= \epsilon_H \\ \Rightarrow x^{-1} * y &\in \text{Ker } f. \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $\text{Ker } f$  est un sous-groupe de  $G$ .

**5) (Isomorphisme)**

Montrer que si  $f$  est bijective et que  $g$  est son applications réciproque, alors  $g$  est un morphisme de groupe.

**Solution**

Ici il n'est pas utile d'avoir affaire à des groupes puisque le résultat est déjà vrai pour des magmas associatifs (cf. .)

**Exercice II.5.4 (Le groupe des bijections d'un ensemble  $E$ )** Pour  $E$  un ensemble, on note  $\mathcal{S}(E)$  l'ensemble des bijections de  $E$  dans lui-même. On notera  $\circ$  de manière usuelle la composition des applications.

**1) (Le groupe  $(\mathcal{S}(E), \circ)$ )**

Soit  $E$  un ensemble.

a) Vérifier que  $\circ$  est une loi interne sur  $\mathcal{S}(E)$ .

**Solution**

La composée de deux bijections de  $E$  dans  $E$  est encore une bijection de  $E$  dans  $E$ .

b) Montrer qu'il existe un élément neutre pour la loi  $\circ$  dans  $\mathcal{S}(E)$  et le caractériser.

**Solution**

Il est immédiat de constater que

$$\forall f \in \mathcal{S}(E), \text{Id}_E \circ f = f \circ \text{Id}_E = f$$

c'est-à-dire que l'application  $\text{Id}_E : E \rightarrow E$  caractérisée par

$$\forall x \in E, \text{Id}_E(x) = x$$

est un élément neutre pour  $\circ$  dans  $\mathcal{S}(E)$ .

c) Montrer finalement que  $(\mathcal{S}(E), \circ)$  est un groupe.

**Solution**

On a vu au point a) que la loi  $\circ$  sur  $\mathcal{S}(E)$  est une loi interne. Elle est évidemment associative. Elle possède un élément neutre  $\text{Id}_E$  (cf. le point b. .)

De plus pour toute bijection  $f : E \rightarrow E$  il existe une bijection  $g : E \rightarrow E$  telle que

$$\forall x \in E, g[f(x)] = f[g(x)] = x$$

c'est-à-dire que  $f \circ g = g \circ f = \text{Id}_E$  (cf. .) donc que  $g$  est le symétrique de  $f$  pour  $\circ$  qu'on notera usuellement  $f^{-1}$ .

**2) (La bijection  $\mathcal{S}(E) \cong \mathcal{S}(F)$ )**

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles et  $u : E \rightarrow F$  une bijection de  $E$  dans  $F$  dont on notera  $v$  la bijection réciproque i.e.

$$v : F \rightarrow E : v \circ u = \text{Id}_E, u \circ v = \text{Id}_F.$$

Montrer que l'application

$$\phi_u : (\mathcal{S}(E), \circ) \rightarrow (\mathcal{S}(F), \circ), f \mapsto u \circ f \circ v$$

est un isomorphisme de groupes.

**Solution**

**i) (Application)**

On constate d'abord que, pour tout  $f \in \mathcal{S}(E)$ ,  $\phi_u(f) = u \circ f \circ v$  est bien une application de  $F$  dans lui-même qui est de plus, une bijection comme composée de trois bijections. C'est donc bien un élément de  $\mathcal{S}(F)$ .

**ii) (Morphisme)**

De plus,

$$\begin{aligned} \forall (f, g) \in \mathcal{S}(E) \times \mathcal{S}(E), \quad \phi_u(f \circ g) &= u \circ f \circ g \circ v \\ &= u \circ f \circ v \circ u \circ g \circ v \\ &= \phi_u(f) \circ \phi_u(g); \end{aligned}$$

c'est-à-dire que  $\phi_u$  est bien un morphisme de groupes.

**iii) (Isomorphisme)**

Notons

$$\phi_v : (\mathcal{S}(F), \circ) \rightarrow (\mathcal{S}(E), \circ), f \mapsto v \circ f \circ u$$

Alors :

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{S}(E), \quad \phi_v[\phi_u(f)] &= v \circ \phi_u(f) \circ u \\ &= v \circ u \circ f \circ v \circ u \\ &= f \\ \Rightarrow \quad \phi_v \circ \phi_u &= \text{Id}_{\mathcal{S}(E)}; \end{aligned}$$

et de plus :

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{S}(F), \quad \phi_u[\phi_v(f)] &= u \circ \phi_v(f) \circ v \\ &= u \circ v \circ f \circ u \circ v \\ &= f \\ \Rightarrow \quad \phi_u \circ \phi_v &= \text{Id}_{\mathcal{S}(F)}. \end{aligned}$$

Ceci prouve que  $\phi_u$  est un isomorphisme, d'isomorphisme réciproque  $\phi_v$ .

**Exercice II.5.5 (Sous-groupes) 1) (Caractérisation des sous-groupes)**

Étant donné un groupe  $(G, *)$ , montrer qu'une partie  $H \subset G$  de  $G$  est un sous-groupe (cf. cours) de  $G$  si et seulement si,  $H \neq \emptyset$  et

$$\forall x \in H, \forall y \in H, x * y^{-1} \in H.$$

**Solution**

(cf. .)

**2) (Groupe des automorphismes)**

Complétez la construction.

**Solution**

Étant donné un groupe  $G$ ,

- on constate d'abord que  $\text{Aut}(G) \neq \emptyset$ , puisqu'on a remarqué (cf. .) que  $\text{Id}_G \in \text{Aut}(G)$ .
- De plus pour tout  $\phi \in \text{Aut}(G)$ , puisque  $\phi \in \mathcal{S}(G)$ , il exist  $\psi \in \mathcal{S}(G)$  tel que

$$\phi \circ \psi = \psi \circ \phi = \text{Id}_G.$$

Il résulte alors que  $\psi$  est également un morphisme et donc un automorphisme i.e.  $\psi \in \text{Aut}(G)$ .

- Enfin  $\forall (\phi, \psi) \in \text{Aut}(G) \times \text{Aut}(G)$ ,  $\phi \circ \psi \in \mathcal{S}(G)$ , puisqu'on sait déjà que  $\mathcal{S}(G)$  est un groupe. De plus  $\phi \circ \psi$  est un morphisme d'après .

Il résulte alors des vérifications ci-dessus et que  $(\text{Aut}(G), \circ)$  est un sous-groupe de  $(\mathcal{S}(G), \circ)$ .

**3) (Union de deux sous-groupes)**

Étant donnés des sous-groupes  $H$  et  $K$  d'un groupe commutatif  $(G, +)$ , montrer que  $H \cup K$  est un sous-groupe de  $(G, +)$  si et seulement si  $H \subset K$  ou  $K \subset H$ .

**Indication :** Montrer qu'il revient au même de démontrer que  $[H \not\subset K \text{ et } H \cup K \text{ sous-groupe entraîne } K \subset H]$  puis prouver cette dernière assertion.

**Solution**

Étant donné un groupe commutatif  $(G, +)$ ,  $H$  et  $K$  des sous-groupes, si  $H \subset K$  (resp.  $K \subset H$ ),  $H \cup K = K$  (resp.  $H$ ) qui est bien évidemment un sous-groupe.

Si  $H \cup K$  est un sous-groupe de  $(G, +)$  supposons que  $H$  n'est pas inclus dans  $K$ . Il existe alors  $x \in H$  tel que  $x \notin K$ . Alors pour tout  $y \in K$ ,  $x$  et  $y$  sont des éléments de  $H \cup K$  et par conséquent  $x + y \in H \cup K$  c'est-à-dire que  $x + y \in K$  ou  $x + y \in H$ . Si  $x + y \in K$ , comme  $y \in K$ ,  $x + y - y \in K$  c'est-à-dire que  $x \in K$  ce qui est contraire à l'hypothèse. Il s'ensuit que nécessairement  $x + y \in H$ . Comme  $x \in H$ ,  $x + y - x \in H$  c'est-à-dire que  $y \in H$ . Nous avons donc démontré que tout élément  $y \in K$  est dans  $H$  c'est-à-dire que  $K \subset H$ .

**4) (Intersection de deux sous-groupes)**

Pour deux sous-groupes  $H$  et  $K$  d'un groupe  $G$ ,  $H \cap K$  est un sous-groupe de  $G$ .

**Solution**

Puisque  $H$  et  $K$  sont des sous-groupes  $\epsilon \in H$  et  $\epsilon \in K$ ; si bien que  $\epsilon \in H \cap K$  qui est donc non vide.

De plus  $\forall (x, y) \in (H \cap K) \times (H \cap K)$ ,

$$x^{-1} * y \in H \text{ et } x^{-1} * y \in K$$

puisque  $H$  et  $K$  sont des sous-groupes. Par conséquent  $x^{-1} * y \in H \cap K$  qui est donc un sous-groupe.

5) Soit  $S$  une partie de  $G$  et  $H$  une autre partie de  $G$ . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- L'ensemble  $H$  est l'intersection de tous les sous-groupes de  $G$  contenant  $S$ .
- L'ensemble  $H$  est un sous-groupe de  $G$  contenant  $S$  et tel que, pour tout sous-groupe  $K$  de  $G$  contenant  $S$ ,  $H \subset K$ .
- $H$  est constitué des éléments  $s_1 s_2 \dots s_r$  avec  $r \geq 1$  où un élément  $s_i$  est dans  $S$  ou a son inverse dans  $S$ .

**Solution**

$a \Rightarrow b$  L'intersection d'une famille (non nécessairement finie) de sous-groupes est encore un sous-groupe. Si chaque élément de la famille contient  $S$ , l'intersection contient encore  $S$ . Enfin si  $K$  est un sous-groupe contenant  $S$ , c'est précisément un élément de la famille et il contient donc l'intersection  $H$ .

$b \Rightarrow a$  Soit  $\mathcal{H}$  l'ensemble de tous les sous-groupes de  $G$  contenant  $S$ . Alors par hypothèse  $H \in \mathcal{H}$ . Si  $L = \bigcap_{K \in \mathcal{H}} K$ ,  $L \subset H$ . Mais, par hypothèse,  $\forall K \in \mathcal{H}$ ,  $H \subset K$ , donc  $H \subset L$ , donc  $H = L$ .

$b \Leftrightarrow c$  Notons  $L$  l'ensemble des produit  $s_1 \dots s_r$  avec

$$\forall 1 \leq i \leq r, s_i \in S \text{ ou } s_i^{-1} \in T.$$

Vérifions d'abord que  $L$  est un sous-groupe : Si  $S = \emptyset$ ,  $L = \{\epsilon\}$  où  $\epsilon$  est l'élément neutre de  $G$ ; et  $L$  est donc bien un sous-groupe de  $G$ . Sinon  $L \subset S$ , de manière presque immédiate; ce qui entraîne  $L \neq \emptyset$ .

De plus, pour tout  $s_1, \dots, s_r \in L$ ,

$$(s_1 \dots s_r)^{-1} = s_r^{-1} \dots s_1^{-1} \in L.$$

Enfin pour

$$(s_1 \dots s_r, s'_1 \dots s'_{r'}) \in L \times L, s_1 \dots s_r \cdot s'_1 \dots s'_{r'} \in L;$$

ce qui achève de prouver que  $L$  est un sous-groupe de  $G$  contenant  $S$ .

Or l'équivalence  $a \Leftrightarrow b$  assure qu'un tel sous-groupe est unique et que c'est donc bien  $H$  défini en  $b$ .

**Exercice II.5.6 (Famille filtrante)** Faire la preuve.**Solution**

Notons  $K := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$ .  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $H_n$  est un sous-groupe de  $G$  par hypothèse; et  $H_n$  est donc non vide; si bien que

$K \neq \emptyset$ .

Par ailleurs pour tout  $(x, y) \in K \times K$ , il existe  $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  tel que  $x \in H_p$  et  $y \in H_q$ .

Or il existe, par hypothèse,  $r \in \mathbb{N}$  tel que  $H_p \subset H_r$  et  $H_q \subset H_r$ ; si bien que

$$x \in H_r \text{ et } y \in H_r.$$

Or  $H_r$  étant un sous-groupe de  $G$ ,  $x^{-1} * y \in H_r$  ; comme  $H_r \subset K$ ,  $x^{-1} * y \in K$  ; ce qui achève de prouver que  $K$  est un sous-groupe de  $G$ .

**Exercice II.5.7 (Groupe de matrices triangulaires)** On rappelle que  $GL_2(\mathbb{R})$  désigne l'ensemble des matrices  $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$  avec  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$  et qui sont inversibles, i.e.

$$\forall A \in GL_2(\mathbb{R}), \exists B \in GL_2(\mathbb{R}), A * B = B * A = I,$$

où l'on désignera par  $I$  la matrice  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**1) (Le groupe  $(GL_2(\mathbb{R}), *)$ )**

Rappeler pourquoi  $GL_2(\mathbb{R})$  est un groupe pour la loi  $*$ .

**Solution**

- Il est bien connu que la multiplication des matrices est associative.
- Montrons que c'est bien une loi interne sur  $GL_2(\mathbb{R})$ . En effet pour  $A, b, c, D \in GL_2(\mathbb{R})$ , telles que

$$A * B = B * A = C * D = D * C = I,$$

$$A * C * D * B = A * I * B = A * B = I \text{ et } D * B * A * C = D * I * C = D * C = I.$$

- $I$  est évidemment un élément neutre pour cette loi ; puisque

$$\forall A \in GL_2(\mathbb{R}), A * I = I * A = A.$$

- Enfin par définition tout  $A \in GL_2(\mathbb{R})$  possède un inverse. Le couple  $(GL_2(\mathbb{R}), *)$  satisfait donc bien aux axiomes.

**2) (Un sous-groupe de  $GL_2(\mathbb{R})$ )**

Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on note

$$\mu(a) := \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , calculer  $\mu(a) * \mu(b)$ .

**Solution**

$$\begin{aligned} \mu(a) * \mu(b) &= \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mu(a+b). \end{aligned}$$

b) Montrer que pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\mu(a) \in GL_2(\mathbb{R})$ .

**Solution**

On a vu au point a, que

$$\mu(a) * \mu(-a) = \mu(a - a) = \mu(0) = I ;$$

ce qui prouve que  $\mu(a) \in GL_2(\mathbb{R})$ .

c) Montrer que  $\mu : \mathbb{R} \rightarrow GL_2(\mathbb{R})$  est un morphisme du groupe  $(\mathbb{R}, +)$  dans le groupe  $(GL_2(\mathbb{R}), *)$ .

**Solution**

On a vu au point b, que  $\mu$  est bien à valeurs dans  $GL_2(\mathbb{R})$ . De plus (cf. le point a),

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \mu(a+b) = \mu(a) * \mu(b) ;$$

ce qui correspond .

d) Le groupe  $(GL_2(\mathbb{R}), *)$  est-il abélien ? Le sous-ensemble  $\text{Im } \mu$  de  $GL_2(\mathbb{R})$  est-il un sous-groupe abélien de  $GL_2(\mathbb{R})$  ?

**Solution**

On a

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} :$$

la composée d'une rotation et d'une symétrie dépend de l'ordre dans lequel on les compose. Ainsi  $GL_2(\mathbb{R})$  n'est pas abélien.

En revanche pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , d'après le point a ,

$$\mu(a) * \mu(b) = \mu(a + b) = \mu(b + a) = \mu(b) * \mu(a) .$$

Le groupe  $(\mathbb{R}, +)$  étant abélien son image par un morphisme de groupes l'est encore.

**Exercice II.5.8 (Le groupe  $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ ) Soit**

$$\mathcal{SO}_2\mathbb{R} := \left\{ \rho(\theta) := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\} .$$

Montrer que  $(\mathcal{SO}_2\mathbb{R}, \times)$  est un groupe abélien, et que l'application

$$\begin{aligned} \rho : (\mathbb{R}, +) &\longrightarrow \mathcal{SO}_2\mathbb{R} \\ \theta &\longmapsto \rho(\theta) \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes.

**Solution**

$$\begin{aligned} \forall (\theta, \phi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \rho(\theta) \times \rho(\phi) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi & -\cos \theta \sin \phi - \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \phi) & -\sin(\theta + \phi) \\ \sin(\theta + \phi) & \cos(\theta + \phi) \end{pmatrix} \\ &= \rho(\theta + \phi) . \end{aligned}$$

On remarque que  $\rho(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  qui est l'élément neutre du groupe  $(GL_2(\mathbb{R}), \times)$  des matrices inversibles  $2 \times 2$ . De plus, il découle de la formule  $\rho(\theta + \phi) = \rho(\theta) \times \rho(\phi)$  établie ci-dessus que

$$\rho(-\theta) \times \rho(\theta) = \rho(\theta) \times \rho(-\theta) = \rho(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ;$$

ce qui assure que  $\rho(-\theta)$  est l'inverse de  $\rho(\theta)$  dans  $GL_2(\mathbb{R})$  ; si bien que  $\rho$  est une application à valeurs dans  $GL_2(\mathbb{R})$ .

La formule  $\rho(\theta + \phi) = \rho(\theta) \times \rho(\phi)$  assure que  $\rho$  est un morphisme de groupes.

L'ensemble  $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$  est alors l'image du groupe  $(\mathbb{R}, +)$  par  $\rho$  dans  $GL_2(\mathbb{R})$ . Or  $(\mathbb{R}, +)$  étant un groupe abélien il en est de même de  $\text{Im } \rho$ .

**Exercice II.5.9 (Le groupe  $S_1$ ) Soit**

$$S_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2, a^2 + b^2 = 1 \right\} .$$

1) Montrer que  $S_1$  est un sous-groupe du groupe  $GL_2(\mathbb{R})$  des matrices inversibles  $2 \times 2$  à coefficients réels.

**Solution**

— On constate d'abord que  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in S_1$ , ce qui assure que  $S_1 \neq \emptyset$ .

— De plus, pour tout

$$\left[ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right] \in S_1 \times S_1 \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix}.$$

Comme

$$\begin{aligned} (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 &= a^2c^2 + b^2d^2 - 2acbd + a^2d^2 + b^2c^2 + 2adbc \\ &= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 \\ &= a^2(d^2 + c^2) + b^2(c^2 + d^2) \\ &= a^2 + b^2 \\ &= 1; \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix} \in S_1.$$

— Il résulte encore du calcul ci-dessus que

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dès que  $a^2 + b^2 = 1$ . Les éléments de  $S_1$ , possèdent donc un inverse pour la loi  $\times$  ; ce qui achève de prouver que  $S_1$  est un sous-groupe de  $GL_2(\mathbb{R})$ .

2) Construire un isomorphisme de groupes

$$S_1 \cong \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$$

où  $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$  est le groupe défini à l'exercice II.5.8 .

**Solution**

Pour tout couple  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , vérifiant  $a^2 + b^2 = 1$ , c'est un résultat connu qu'il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $a = \cos \theta$  et  $b = \sin \theta$ . La matrice  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ , est alors la matrice  $\rho(\theta)$ . Il est alors clair que  $S_1$  et  $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$  sont le même sous-ensemble de  $GL_2(\mathbb{R})$ .