

Corrigé Des exercices III.7

III.7 . –Exercices

Exercice III.7.1 (Quelques résultats du cours (relations d'équivalence (cf. III.1)) 1) (Classes d'équivalence)

Faire la preuve du lemme III.1.2 .

Solution

III.1.2. a $\Rightarrow$ III.1.2. b Puisqu'une relation d'équivalence est réflexive, pour tout $x \in E$, $x \in \bar{x}$. Or si de plus $x \sim y$, $x \in \bar{y}$; si bien que

$$\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset.$$

On utilise le caractère symétrique de la relation d'équivalence qui autorise à écrire indifféremment $x \sim y$ ou $y \sim x$.

III.1.2. b $\Rightarrow$ III.1.2. c Soit $z \in \bar{x} \cap \bar{y}$. alors pour tout $w \in \bar{x}$, $w \sim x$ et $z \sim x$, i.e. par symétrie $x \sim z$ et par transitivité $w \sim z$. Comme de plus $z \in \bar{y}$, $z \sim y$; si bien que par transitivité, pour tout $w \in \bar{x}$, $w \sim y$; i.e. $w \in \bar{y}$; ce qui entraîne finalement

$$\bar{x} \subset \bar{y}.$$

III.1.2. c $\Rightarrow$ III.1.2. d Si $\bar{x} \subset \bar{y}$, en particulier $x \in \bar{y}$; si bien que $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$. Or pour tout $z \in \bar{y}$, $y \sim z$; ce qui entraîne, par transitivité, $x \sim z$; i.e. $z \in \bar{x}$. Il en résulte donc que $\bar{y} \subset \bar{x}$; ce qui, sous l'hypothèse que $\bar{x} \subset \bar{y}$, entraîne

$$\bar{x} = \bar{y}.$$

2) (Partitions)

Donner la preuve de la proposition III.1.4 .

Solution

i) (Preuve du point i de la proposition III.1.4)

Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\sim$ et

$$P := \{\bar{x}, x \in E\}$$

l'ensemble des classes d'équivalence selon $\sim$. Autrement dit, pour tout $x \in E$, $\bar{x} \in P$ est définie par

$$\bar{x} := \{y \in E; y \sim x\}.$$

— Pour tout $\bar{x} \in P$, $x \in \bar{x}$, en effet $x \sim x$ puisque $\sim$ est réflexive; si bien que $\bar{x} \neq \emptyset$; ce qui assure que l'axiome Part_1 de la définition III.1.3 est satisfait par P .

— Pour tout $(\bar{x}, \bar{y}) \in P \times P$, il découle du lemme III.1.2 que,

$$\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset \Rightarrow \bar{x} = \bar{y};$$

c'est-à-dire que l'axiome Part_2 de la définition III.1.3 est satisfait pour P .

— Enfin pour tout $x \in E$, $x \in \bar{x}$ (comme nous l'avons déjà dit, par réflexivité de $\sim$), si bien que

$$E \subset \bigcup_{\bar{x} \in P} \bar{x}.$$

Come par ailleurs $\forall x \in E$, $\bar{x} \subset E$,

$$\bigcup_{\bar{x} \in P} \bar{x} \subset E,$$

d'où finalement

$$E = \bigcup_{\bar{x} \in P} \bar{x}$$

ce qui assure que l'axiome Part_3 de la définition III.1.3 est satisfait par P .

L'ensemble P satisfaisant les axiomes de la définition III.1.3 c'est donc bien une partition de E .

ii) (Preuve du point ii de la proposition III.1.4)

Soit E un ensemble et P une partition de E . S'il existe une relation d'équivalence $\sim$ telle que les classes selon $\sim$ sont les éléments de P , alors pour tout $x \in E$, d'après l'axiome Part_3 de la définition III.1.3, il existe $A \in P$ tel que $x \in A$. De plus d'après l'axiome Part_2 de la définition III.1.3, s'il existe $B \in P$ tel que $x \in B$, alors $A \cap B \neq \emptyset$ et par conséquent $A = B$.

Pour tout $x \in E$, il existe donc un unique $A \in P$ tel que $x \in A$. Si A est la classe de x , pour tout $y \in E$,

$$y \sim x \Leftrightarrow y \in A.$$

La relation $\sim$ est alors caractérisée par le fait que $x \sim y$ si et seulement si il existe $A \in P$ tel que $x \in A$ et $y \in A$. L'unicité de $\sim$ est alors assurée.

Reste à montrer que $\sim$ ainsi définie est bien une relation d'équivalence : Or

- d'après l'axiome Part_3 de la définition III.1.3, pour tout $x \in E$, il existe $A \in P$ tel que $x \in A$, ce qui entraîne que $x \sim x$, c'est-à-dire que $\sim$ est réflexive ;
- la définition même de $\sim$ assure qu'elle est symétrique ;
- enfin pour tout $(x, y, z) \in E \times E \times E$, $x \sim y$ et $y \sim z$, entraîne qu'il existe $(A, B) \in P \times P$, tel que

$$x \in A, y \in A, y \in B, z \in B.$$

Il en résulte que $y \in A \cap B$ si bien que, d'après l'axiome Part_2 de la définition III.1.3, $A = B$, si bien que $z \in A$, c'est-à-dire que $x \sim z$. Il en résulte que $\sim$ est transitive.

3) (Applications surjectives)

Faire la preuve de la proposition III.1.6.

Solution

III.1.6. i traduit simplement le fait qu'une relation d'équivalence est réflexive i.e. $x \in \overline{x}$; ce qui assure que $\pi(x) = \overline{x}$. C'est encore un moyen de dire qu'aucune classe d'équivalence n'est vide.

III.1.6. ii Supposons qu'il existe une relation d'équivalence $\sim$ sur E et une bijection

$$\theta : E/\sim \rightarrow F, \overline{x} \mapsto \rho(x).$$

Notons $\pi : E \rightarrow E/\sim, x \mapsto \overline{x}$ la surjection canonique ; si bien que l'hypothèse équivaut à $\theta \circ \pi = \rho$; ce qu'on peut symboliser par le diagramme suivant, dont on dit qu'il est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E & & \\ \pi \downarrow & \searrow \rho & \\ E/\sim & \xrightarrow{\theta} & F. \end{array}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E \times E, & \quad x \sim y \\ \Leftrightarrow & \quad \overline{x} = \overline{y} \\ \Leftrightarrow & \quad \pi(x) = \pi(y) \\ \Leftrightarrow & \quad \theta[\pi(x)] = \theta[\pi(y)] \\ \Leftrightarrow & \quad \rho(x) = \rho(y) ; \end{aligned}$$

ce qui prouve l'unicité de $\sim$ si elle existe.

Reste donc à montrer que si l'on définit $\sim$ par $x \sim y$ si $\rho(x) = \rho(y)$, on définit bien une relation d'équivalence qui permet de construire la bijection θ .

Bien entendu $\rho(x) = \rho(x)$ i.e. $x \sim x$ i.e. $\sim$ est réflexive. Le fait qu'elle soit symétrique est presque tautologique. Si enfin $x \sim y$ et $y \sim z$, $\rho(x) = \rho(y)$ et $\rho(y) = \rho(z)$; si bien que $\rho(x) = \rho(z)$ i.e. $x \sim z$. La relation $\sim$ est donc bien transitive. C'est donc bien une relation d'équivalence.

Si θ est bien définie nécessairement

$$\forall x \in E, \theta[\pi(x)] = \rho(x).$$

C'est une bonne définition puisque

$$\pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow \rho(x) = \rho(y).$$

De plus, puisque ρ est surjective, θ vérifiant $\theta \circ \pi = \rho$ est surjective.

Enfin

$$\theta[\pi(x)] = \theta[\pi(y)] \Leftrightarrow \rho(x) = \rho(y) \Leftrightarrow \pi(x) = \pi(y) ;$$

i.e. θ est injective.

Exercice III.7.2 (Relation d'équivalence sur $\mathcal{S}(E)$) Dans la suite, on considère un ensemble E et $x \notin E$. On note $F := E \cup \{x\}$.

Le groupe $(\mathcal{S}(E), \circ)$ est celui considéré à l'exercice II.5.4 et au point c de l'exemple II.1.2.

On définit sur $\mathcal{S}(F)$ la relation $\sim_x$ par

$$\forall (f, g) \in \mathcal{S}(F) \times \mathcal{S}(F), f \sim_x g \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

1) ($\sim_x$)

Montrer que $\sim_x$ est une relation d'équivalence.

Solution

Il est immédiat de constater que, pour tout $f \in \mathcal{S}(F)$, $f \sim_x f$, c'est-à-dire que $\sim_x$ est réflexive. De même

$$\forall (f, g) \in \mathcal{S}(F) \times \mathcal{S}(F), f \sim_x g \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow g(x) = f(x) \Rightarrow g \sim_x f$$

c'est-à-dire que $\sim_x$ est symétrique.

Enfin

$$\begin{aligned} \forall (f, g, h) \in \mathcal{S}(F) \times \mathcal{S}(F) \times \mathcal{S}(F), & \quad f \sim_x g \quad \text{et} \quad g \sim_x h \\ \Rightarrow & \quad f(x) = g(x) \quad \text{et} \quad g(x) = h(x) \\ \Rightarrow & \quad f(x) = h(x) \\ \Rightarrow & \quad f \sim_x h \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\sim_x$ est transitive.

Puisque $\sim_x$ est réflexive, symétrique et transitive, c'est, par définition, une relation d'équivalence.

Dans la suite on notera, pour tout $f \in \mathcal{S}(F)$, $\bar{f}_x$ sa classe d'équivalence pour la relation $\sim_x$ et $\mathcal{S}(F)/\sim_x$ l'ensemble des classes d'équivalence dans $\mathcal{S}(F)$ pour la relation $\sim_x$.

2) (Partition)

Justifier que

$$\mathcal{S}(f) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{S}(F)/\sim_x} \alpha.$$

Solution

On sait que l'ensemble des classes pour une relation d'équivalence forme une partition ce qui assure le résultat ci-dessus.

3) (La bijection $\bar{f}_x \cong \mathcal{S}(E)$)

a) Pour tout $f \in \mathcal{S}(F)$, tout $(g, h) \in \bar{f}_x \times \bar{f}_x$, montrer que :

i)

$$g^{-1} \circ h(E) \subset E$$

ii) et que la restriction $g^{-1} \circ h|_E$ de $g^{-1} \circ h$ à E est un élément de $\mathcal{S}(E)$.

Solution

i)

$$(g, h) \in \bar{f}_x \times \bar{f}_x \Rightarrow g(x) = h(x) \Rightarrow g^{-1} \circ h(x) = x \Rightarrow \forall y \in E, g^{-1} \circ h(y) \neq x \Rightarrow g^{-1} \circ h(y) \in E.$$

ii) On remarque que

$$(g, h) \in \bar{f}_x \times \bar{f}_x \Rightarrow g^{-1} \circ h(x) = x \text{ et } h^{-1} \circ g(x) = x.$$

Or

$$(h^{-1} \circ g) \circ (g^{-1} \circ h) = \text{Id}_F.$$

Il s'ensuit que $g^{-1} \circ h|_E$ est une bijection de E dans lui-même de bijection réciproque $h^{-1} \circ g|_E$ i.e. un élément de $\mathcal{S}(E)$.

b) Dédurre de ce qui précède, que pour tout $f \in \mathcal{S}(F)$, l'application

$$\psi_f : \bar{f}_x \rightarrow \mathcal{S}(E), g \mapsto f^{-1} \circ g|_E$$

est une bijection.

Solution

On a vu au point a) que

$$g \in \overline{f}_x \Rightarrow f^{-1} \circ g|_E \in \mathcal{S}(E).$$

L'application ψ_f est donc bien définie. De plus pour tout $g \in \mathcal{S}(E)$ on peut prolonger g en une bijection $\tilde{g}$ de F dans lui-même en posant $\tilde{g}|_E = g$, et $\tilde{g}(x) = x$. On a alors

$$f \circ \tilde{g}(x) = f(x) \Rightarrow f \circ \tilde{g} \in \overline{f}_x.$$

On construit donc ainsi une application $\chi_f : \mathcal{S}(E) \rightarrow \overline{f}_x$. Il est presque immédiat de vérifier que

$$\psi_f \circ \chi_f = \text{Id}_{\mathcal{S}(E)} \text{ et } \chi_f \circ \psi_f = \text{Id}_{\overline{f}_x}$$

ce qui assure que ψ_f est une bijection.

4) (Quotient)

Pour tout $f \in \mathcal{S}(F)$ on pose $\lambda(f) := f(x)$ et pour tout $y \in F$, on définit $t_y : F \rightarrow F$ par :

$$t_y(x) = y, t_y(y) = x, \forall z \in F, z \neq x \text{ et } z \neq y \Rightarrow t_y(z) = z.$$

a) Montrer que

$$\forall y \in F, t_y \in \mathcal{S}(F).$$

Solution

Tout d'abord il est clair sur la définition que t_y est une application de F dans lui-même. De plus il est immédiat de remarquer que $t_y \circ t_y = \text{Id}_F$ si bien que t_y est une bijection et est sa propre bijection réciproque. On parle dans ce cas d'involution.

b) Calculer $\lambda(t_y)$.

Solution

On a

$$\forall y \in F, \lambda(t_y) = t_y(x) = y.$$

c) En déduire que λ est surjective.

Solution

Le point précédent assure que pour tout $y \in F$ il existe $t_y \in \mathcal{S}(F)$ tel que $\lambda(t_y) = y$ ce qui signifie précisément que λ est surjective.

5) (Factorisation : application quotient)

L'application λ étant définie comme à la question 4, on définit

$$\overline{\lambda} : \mathcal{S}(F)/\sim_x \rightarrow F, \alpha \mapsto \lambda(f) \forall f \in \alpha.$$

a) Montrer que $\overline{\lambda}$ est bien définie.

Solution

Pour tout $\alpha \in \mathcal{S}(F)/\sim_x$, il existe $f \in \mathcal{S}(F)$ tel que $\alpha = \overline{f}_x$. Pour tout $g \in \alpha = \overline{f}_x$,

$$g \sim_x f \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow \lambda(f) = \lambda(g).$$

On peut donc définir $\overline{\lambda}(\alpha)$ par $\lambda(g)$ pour n'importe quel élément g de α .

b) Montrer que $\overline{\lambda}$ est surjective.

Solution

On a montré au point c de la question 4 que λ est surjective. Donc pour tout $y \in F$, il existe $f \in \mathcal{S}(F)$ (on a même explicitement trouvé t_y comme antécédent de y ,) tel que $\lambda(f) = y$. Par définition on a alors $\bar{\lambda}(\bar{f}_x) = y$ ce qui assure que $\bar{\lambda}$ est surjective.

c) Montrer finalement que $\bar{\lambda}$ est bijective.

Solution

Il reste seulement à montrer que $\bar{\lambda}$ est injective. Or

$$\begin{aligned} \forall (\alpha, \beta) \in \mathcal{S}(F)/\sim_x \times \mathcal{S}(F)/\sim_x, \bar{\lambda}(\alpha) &= \bar{\lambda}(\beta) \\ \Rightarrow \forall (f, g) \in \alpha \times \beta, \lambda(f) &= \lambda(g) \\ \Rightarrow f(x) &= g(x) \\ \Rightarrow \bar{f} &\sim_x g \\ \Rightarrow \bar{f}_x &= \bar{g}_x \\ \Rightarrow \alpha &= \beta \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\bar{\lambda}$ est injective.

6) (Calcul du nombre d'éléments de $\mathcal{S}(E)$)

On suppose dans cette question que E est un ensemble fini.

a) Montrer que si l'on suppose que $\mathcal{S}(E)$ est fini alors $\mathcal{S}(F)$ est fini et donner, dans ce cas, une relation entre $\#(\mathcal{S}(E))$, $\#(F)$, et $\#(\mathcal{S}(F))$.

Indication : On pourra utiliser la question 2, le point b de la question 3 et le point c de la question 5.

Solution

D'après la question 2,

$$\mathcal{S}(F) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{S}(F)/\sim_x} \alpha.$$

Or d'après le point b de la question 3, pour tout $\alpha \in \mathcal{S}(F)/\sim_x$, il existe une bijection $\alpha \cong \mathcal{S}(E)$ si bien que α est fini dès que $\mathcal{S}(E)$ l'est et qu'on a

$$\#(\alpha) = \#(\mathcal{S}(E)).$$

En outre il découle du point c de la question 5 que $\mathcal{S}(F)/\sim_x$ est en bijection avec F . Or si E est fini, $F = E \cup \{x\}$ est fini. Il en résulte que $\mathcal{S}(F)$ est une union finie d'ensembles finis donc est fini.

Enfin puisque $\mathcal{S}(F)/\sim_x$ est un ensemble de classes d'équivalence, $\mathcal{S}(F)$ est une union disjointe. On a donc

$$\begin{aligned} \#(\mathcal{S}(F)) &= \# \left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{S}(F)/\sim_x} \alpha \right) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{S}(F)/\sim_x} \#(\alpha) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{S}(F)/\sim_x} \#(\mathcal{S}(E)) \\ &= \#(F) \cdot \#(\mathcal{S}(E)). \end{aligned}$$

b) Montrer finalement que si E est un ensemble fini, $\mathcal{S}(E)$ est fini et donner $\#(\mathcal{S}(E))$ en fonction de $\#(E)$.

Solution

i) Si $E = \emptyset$, il existe une unique bijection de E dans lui-même à savoir Id_E . Pour ceux à qui cette considération pourrait paraître obscure, on peut tout à fait considérer le cas où $\#(E) = 1$, c'est-à-dire où $E = \{y\}$ est un singleton. La seule bijection de E dans lui-même est alors encore l'identité Id_E caractérisée par $\text{Id}_E(y) = y$. Cela permet de toute façon d'« amorcer » (d'« initialiser ») un raisonnement par récurrence.

ii) Faisons en effet l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ (ou $n \in \mathbb{N}^*$,) que pour tout ensemble E de cardinal n $\mathcal{S}(E)$ est un ensemble fini dont le cardinal ne dépend que de n . On a suivant les cas vérifié cette hypothèse pour $n = 0$, ou $n = 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit donc un ensemble F fini de cardinal $n + 1$. L'ensemble F n'est alors pas vide ; choisissons donc un élément $x \in F$ et notons $E := F \setminus \{x\}$ si bien qu'on a

$$F = E \cup \{x\} \text{ et } \#(E) = n .$$

On peut alors grâce à l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_n$ appliquée à E utiliser le point a qui assure que $\mathcal{S}(F)$ est fini et que

$$\#(\mathcal{S}(F)) = \#(F) \cdot \#(\mathcal{S}(E)) = (n + 1) \cdot \#(\mathcal{S}(E)) .$$

Ceci assure

$$\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1} .$$

Il en résulte que pour tout ensemble E fini,

$$\#(\mathcal{S}(E)) = \#(E)! .$$

Exercice III.7.3 Quelques résultats du cours à propos des actions de groupe (cf. III.2)

1) Faire la preuve du lemme III.3.4

Solution

III.3.4. a $\Rightarrow$ III.3.4. b Notons $O_G(x)$ l'unique orbite. Pour tout $y \in E$, $y \in O_G(y)$. Or par hypothèse, $O_G(x) = O_G(y)$ donc $y \in O_G(x)$; si bien que $E \subset O_G(x)$. Comme tautologiquement $O_G(x) \subset E$,

$$E = O_G(x) = O_G(y) \forall y \in E, .$$

III.3.4. b $\Rightarrow$ III.3.4. c On sait qu'il existe $x \in E$ tel que $O_G(x) = E$. (On a en fait même montré que pour tout $x \in E$ $E = O_G(x)$.) Pour tout $(y, z) \in E \times E$,

$$y \in O_G(x) \text{ et } z \in O_G(x) ;$$

i.e.

$$\exists (a, b) \in G \times G, y = a \cdot x \text{ et } z = b \cdot x$$

d'où il résulte $y = (a * b^{-1}) \cdot z$.

III.3.4. c $\Rightarrow$ III.3.4. a Est immédiat.

2) Faire la preuve de la proposition III.4.1 .

Solution

Bien entendu si ϵ désigne l'élément neutre de G , pour tout $x \in E$, et par définition d'une action $\epsilon \cdot x = x$; si bien que $\epsilon \in \text{Stab}_G(x)$. Ainsi $\text{Stab}_G(x) \neq \emptyset$.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \forall (a, b) \in \text{Stab}_G(x) \times \text{Stab}_G(x), & \quad a \cdot x = x \quad \wedge \quad b \cdot x = x \\ \Rightarrow & \quad a \cdot x = x \quad \wedge \quad x = b^{-1} \cdot x \\ \Rightarrow & \quad a \cdot (b^{-1} \cdot x) = x \\ \Rightarrow & \quad (a * b^{-1}) \cdot x = x \\ \Rightarrow & \quad a * b^{-1} \in \text{Stab}_G(x) ; \end{aligned}$$

ce qui achève de prouver que $\text{Stab}_G(x)$ est un sous-groupe de G .

3) Faire la preuve du point i de la proposition III.4.3 .

Solution

On pourrait simplement dire que $a \sim b \Leftrightarrow p(a) = p(b)$ est une relation d'équivalence pour laquelle $p^{-1}(\{p(a)\})$ est la classe d'équivalence de a . alors les classes formant une partition de G on obtient le résultat.

Il est presque aussi immédiat de le montrer directement. En effet puisque p est surjective,

$$\forall y \in O(x), p^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset .$$

Par ailleurs

$$\forall a \in G, a \in p^{-1}(\{p(a)\})$$

ce qui entraîne

$$G = \bigcup_{y \in O(x)} p^{-1}(\{y\}) .$$

Enfin :

$$\begin{aligned} & \forall (y, z) \in O(x) \times O(x), \quad p^{-1}(\{y\}) \cap p^{-1}(\{z\}) \neq \emptyset \\ \Rightarrow & \exists a \in G, \quad a \in p^{-1}(\{y\}) \wedge a \in p^{-1}(\{z\}) \\ \Rightarrow & p(a) = y \wedge p(a) = z \\ \Rightarrow & y = z \\ \Rightarrow & p^{-1}(\{y\}) = p^{-1}(\{z\}) ; \end{aligned}$$

ce qui achève de prouver que $\{p^{-1}(\{y\}) , y \in O(x)\}$ est une partition de G .

Exercice III.7.4 (Stabilisateur) Soit $(G, *)$ un groupe et E un ensemble muni d'une action de G notée $g \cdot x$ pour tout $(g, x) \in G \times E$.

Montrer que pour tout $(x, g) \in E \times G$,

$$\text{Stab}_G(g \cdot x) = g * \text{Stab}_G(x) * g^{-1} .$$

Solution

(Voir aussi la proposition III.4.5 du cours.)

Pour tout $(x, g, h) \in E \times G \times G$, $h \in \text{Stab}_G(g \cdot x)$ si et seulement si $h \cdot (g \cdot x) = g \cdot x$ si et seulement si

$$g^{-1} \cdot (h \cdot (g \cdot x)) = x \Leftrightarrow (g^{-1} * h * g) \cdot x = x \Leftrightarrow g^{-1} * h * g \in \text{Stab}_G(x)$$

c'est-à-dire qu'il existe $k \in \text{Stab}_G(x)$ tel que $g^{-1} * h * g = k$ i.e. $h = g * k * g^{-1}$ c'est-à-dire finalement que

$$h \in g * \text{Stab}_G(x) * g^{-1} .$$

Exercice III.7.5 Considérons l'action par translation à gauche sur les parties de G définie en III.5.3 .

1) Montrer que cette action ne se restreint pas en général en une action de G sur l'ensemble de ses sous-groupes.

Solution

La question peut même s'envisager dans $\mathbb{Z}$. L'action par translation (à gauche ou à droite ici, ça n'a aucune importance puisque $\mathbb{Z}$ est abélien,) est donnée par

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (a, b) \mapsto a \cdot b := a + b .$$

Tout sous-groupe H de $\mathbb{Z}$ est de la forme $d\mathbb{Z}$ avec $d \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $a \in \mathbb{Z}$,

$$a \cdot H = \{a \cdot x, x \in H\} = \{a \cdot dk, k \in \mathbb{Z}\} = \{a + dk, k \in \mathbb{Z}\}$$

qui n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ sauf dans le cas très particulier où $a = 0$.

2) Montrer que l'orbite $O(P)$ d'une partie $P \in \mathcal{P}(G)$ contient au plus un sous-groupe.

Solution

Supposons que $O(P)$ contiennent deux sous-groupes H et K . Alors $O(P) = O(K) = O(H)$ et il existe donc $a \in G$ tel que $K = a \cdot H$. En particulier si ϵ désigne l'élément neutre de G , $\epsilon \in K$. Il existe donc $b \in H$ tel que $a * b = a \cdot b = \epsilon$. Comme $b \in H$ et H est un groupe $a \in H$. Il s'ensuit que

$$K = a \cdot H = H .$$

Exercice III.7.6 Faire la preuve du point ii de la proposition III.6.5 .

Solution

On sait que pour (cf. cours lemme III.6.1.) $g \in G$, l'application $G \rightarrow G, x \mapsto g * x * g^{-1}$ est un automorphisme de G . L'image d'un sous-groupe est donc encore un sous-groupe. Ceci entraîne que l'application

$$g \times G \rightarrow G, (g, H) \mapsto g * H * g^{-1}$$

est bien définie.

Il est immédiat que $\epsilon \cdot H = \epsilon * H * \epsilon^{-1} = H$. En outre :

$$\begin{aligned} \forall (g, h) \in G \times G, (gh) * H * (gh)^{-1} &= \{(gh) * k * (gh)^{-1}, k \in H\} \\ &= \{g * h * k * h^{-1} * g^{-1} * k \in H\} \\ &= \{g * k * g^{-1}, k \in h * H * h^{-1}\} \\ &= g \cdot (h * H * h^{-1}) \\ &= g \cdot (h \cdot H); \end{aligned}$$

ce qui achève de prouver qu'on a bien défini une action.

Exercice III.7.7 (Points fixes d'une action) Soit E un ensemble fini muni d'une action $\cdot : G \times E \rightarrow E$ d'un groupe fini G . On note

$$E_G := \{x \in E; \forall g \in G, g \cdot x = x\}$$

qu'on appelle l'ensemble des points fixes pour l'action de G sur E .

1) On suppose que

$$E_G = \emptyset, \#(G) = 15 \text{ et } \#(E) = 17.$$

Quel est alors le nombre d'orbites et le cardinal de chacune d'elles ?

Solution

La formule des classes dit que $17 = \sum_i d_i$ où d_i divise 15. L'hypothèse implique que d_i est strictement supérieur à 1, donc égal à 3, 5 ou 15. On voit que 15 n'est pas possible, donc on doit résoudre $17 = 3x + 5y$. La seule solution est $x = 4$ et $y = 1$. Il y a donc 5 orbites, l'une a 5 éléments, les quatre autres en ont 3.

2) On suppose que

$$\#(G) = 33 \text{ et } \#(E) = 19.$$

Montrer que E_G ne peut pas être vide.

Solution

Si E_G est vide, l'équation $19 = 3x + 11y$ aurait des solutions entières (avec x et y positifs ou nuls), ce qui n'est pas le cas.

Exercice III.7.8 (Sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{R})$) On rappelle que $GL_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels dont on a déjà montré (cf. la question 1 de l'exercice II.5.7.) que c'est un groupe pour la multiplication (au moins dans le cas $n = 2$.) L'argument pour n quelconque étant exactement le même on ne cherchera pas à le redémontrer.

1) On note

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Montrer que G est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$.

Solution

Si on note $r := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dont on sait, si on connaît un minimum de géométrie que c'est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$,

on constate que $G = \{r, r^2, r^3, r^4 = I\}$, en notant $I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette description suffit à assurer de manière presque immédiate que (grâce par exemple à la proposition II.3.5.) G est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$.

Pour tout $(g, x) \in G \times \mathbb{R}^2$ on note gx le produit (matriciel) de la matrice carré g par le vecteur $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire l'image du vecteur x par l'application linéaire associée à g dans la base canonique.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, que vaut

$$\sum_{g \in G} gx ?$$

Solution

Pour tout $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} gx &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) Quels sont les éléments de G pour lesquels 1 est valeur propre ?

Solution

Le seul élément de G pour lequel 1 est valeur propre est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Le groupe G est celui défini ci-dessus à la question 1. On peut, dans cette question, considérer comme acquis les résultats établis ci-dessus.

Soit

$$\mathcal{C} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x \in \{-1, 0, 1\}, y \in \{-1, 0, 1\} \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

a) Que vaut $\#(\mathcal{C})$?

Solution

$$\#(\mathcal{C}) = 9.$$

b) Montrer que G agit sur $\mathcal{C}$ par

$$\cdot : G \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}, (g, v) \mapsto gv.$$

Solution

On note encore (cf. le point a de la question 1), $r := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} \forall v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C}, \quad rv &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \\ &\in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Il en résulte que pour tout $1 \leq i \leq 4$, et tout $v \in \mathcal{C}$, $r^i v \in \mathcal{C}$, i.e.

$$\forall g \in G, \forall v \in \mathcal{C}, gv \in \mathcal{C}.$$

Ainsi pour tout $g \in G$ la restriction $g|_{\mathcal{C}}$ de g à $\mathcal{C}$ est à valeurs dans $\mathcal{C}$; ce qui peut s'exprimer en disant que

$$\cdot : G \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}, (g, v) \mapsto g \cdot v = gv$$

est une loi externe bien définie.

Il est clair qu'ensuite, $I \cdot v = Iv = v$, et

$$\forall (g, h) \in G \times G, (g * h) \cdot v = (g * h)v = g[hv] = g \cdot hv = g \cdot (h \cdot v).$$

c) Déterminer les orbites de l'action de G sur $\mathcal{C}$ et pour chacune d'entre elles le stabilisateur d'un de ses éléments.

Solution

— Notons $o := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. alors $ro = o$, si bien que

$$\forall g \in G, go = o$$

d'où il résulte que

$$O_G(o) = \{o\} \text{ et } \text{Stab}_G(o) = G.$$

— Notons $a := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors :

$$— ra = b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$— r^2a = rb = c = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$— r^3a = r^2b = rc = d = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$— r^4a = r^3b = r^2c = rd = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a.$$

Il en résulte que $O_G(a) = \{a, b, c, d\}$. Comme $\#(O_G(a)) = 4$, et $\#(G) = 4$, il en résulte que $\#(\text{Stab}_G(a)) = 1$. Or $I \in \text{Stab}_G(a)$, donc

$$\text{Stab}_G(a) = \{I\}.$$

— Notons $e := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors :

$$— re = f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$— r^2e = f(f) = g = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$— r^3e = r^2f = rg = h = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$— r^4e = r^3f = r^2g = rh = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e.$$

Il s'ensuit que

$$O_G(e) = \{e, f, g, h\};$$

et que, pour les mêmes raisons que ci-dessus

$$\text{Stab}_G(e) = \{I\}.$$

d) L'action de G sur $\mathcal{C}$ est-elle transitive ?

Solution

On a dénombré (cf. le point c.) trois orbites si bien que l'action de G n'est pas transitive ; puisque dans ce cas il n'y a qu'une unique orbite (cf. cours définition III.3.5.)

3) Soit G un sous-groupe fini de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\sum_{g \in G} gx \neq 0.$$

a) Montrer qu'alors 1 est valeur propre de g pour tout $g \in G$.

Indication : Calculer $h \sum_{g \in G} gx$.

Solution

Soit donc $x \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$v := \sum_{g \in G} gx \neq 0.$$

Pour tout $h \in G$ l'application

$$\tau_h : G \rightarrow G, g \mapsto h * g$$

est une bijection de bijection réciproque $\tau_{h^{-1}}$. Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \forall h \in G, \quad v &= \sum_{g \in G} \tau_h(g)x \\ &= \sum_{g \in G} (h * g)x \\ &= \sum_{g \in G} h[gx] \\ &= h \sum_{g \in G} gx \\ &= hv. \end{aligned}$$

Pour peu donc que v ne soit pas nul, c'est un vecteur propre associé à la valeur propre 1, pour tout $h \in G$.

- b) La conclusion vaut-elle encore si l'on ne suppose pas l'existence de $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{g \in G} g(x) \neq 0$?

Solution

Non bien entendu voir la question 1.

Exercice III.7.9 (Actions deux fois transitives) Soit G un groupe opérant (agissant) sur un ensemble X .

- 1) Que signifie la phrase « G opère transitivement sur X » ?

Solution

G opère transitivement sur X au sens de la définition III.3.5 si et seulement si pour tout couple (x, y) de $X \times X$, il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x = y$; ce qui signifie de manière équivalente qu'il n'y a qu'une orbite sous l'action de G , cette orbite étant alors nécessairement égale à X .

On fait opérer G sur $X \times X$ par :

$$g \cdot (x, y) := (g \cdot x, g \cdot y).$$

- 2) Vérifier que la formule ci-dessus définit bien une action de G sur $X \times X$.

Solution

$$\begin{aligned} \forall (g, h) \in G \times G, \forall (x, y) \in X \times X, \quad (g * h) \cdot (x, y) &= ((g * h) \cdot x, (g * h) \cdot y) \\ &= (g \cdot (h \cdot x), g \cdot (h \cdot y)) \\ &= g \cdot (h \cdot x, h \cdot y) \\ &= g \cdot (h \cdot (x, y)) ; \end{aligned}$$

ce qui assure que l'axiome Act_1 du point i de la proposition III.2.4 pour l'action de G sur X entraîne la même propriété pour la loi externe $G \times (X \times X) \rightarrow X \times X$.

— En notant ε l'élément neutre de G , (notation que nous conserverons par la suite,)

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in X \times X, \quad \varepsilon \cdot (x, y) &= (\varepsilon \cdot x, \varepsilon \cdot y) \\ &= (x, y) ; \end{aligned}$$

c'est-à-dire que l'axiome Act_2 du point i de la proposition III.2.4 pour l'action de G sur X entraîne la même propriété pour la loi externe $G \times (X \times X) \rightarrow X \times X$.

La loi externe $G \times (X \times X) \rightarrow X \times X$ est donc (cf. cours proposition III.2.4,) une action de groupe.

On note

$$\Delta := \{(x, x), x \in X\}.$$

On note dans toute la suite

$$Y := (X \times X) \setminus \Delta = \{(x, y), x \in X, y \in X, x \neq y\}.$$

3) (Stabilité)

Montrer que Δ et $Y := (X \times X) \setminus \Delta$ sont stables par l'action de G sur $X \times X$.

Solution

δ

$$\forall (x, x) \in \Delta, \forall g \in G, g \cdot (x, x) = (g \cdot x, g \cdot x) \in \Delta.$$

Y Pour tout $\alpha \in Y$, notons O son orbite. Si $O \cap \Delta \neq \emptyset$, il existe $\beta \in O \cap \Delta$. Or O est aussi l'orbite de β ; si bien que le point précédent entraîne que $O \subset \Delta$; ce qui entraîne encore que $\alpha \in \Delta$; qui contredit $\alpha \in Y$. Il s'ensuit que $O \cap \Delta = \emptyset$; ce qui signifie encore $O \subset Y$; et entraîne finalement que Y est stable par l'action de G .

4) En déduire que l'action de G sur $X \times X$ se restreint d'une part en une action sur Δ et d'autre part en une action sur Y .

Solution

(cf. la question 3 .)

On dit que l'action de G sur X est doublement transitive si l'action induite de G sur $Y = (X \times X) \setminus \Delta$ est transitive; c'est-à-dire que

$$\forall (x, y, z, t) \in X \times X \times X \times X, x \neq y, z \neq t, \exists g \in G, g \cdot x = z, g \cdot y = t \text{ i.e. } g \cdot (x, y) = (z, t).$$

On suppose désormais que G agit de manière doublement transitive sur X .

5) Soit $a \in X$ et G_a le stabilisateur de a . Pour tout $g \in G$ on note

$$G_a^g := G_a * g * G_a := \{h * g * k, (h, k) \in G_a \times G_a\}.$$

Montrer que si $g \notin G_a$ G est la réunion disjointe de G_a et de G_a^g i.e.

$$G = G_a \cup G_a^g \text{ et } G_a \cap G_a^g = \emptyset.$$

Indication : Si $h \notin G_a$, on posera $b := g \cdot a, c := h \cdot a$ et on appliquera la double transitivité aux couples (a, b) et (a, c) .

Solution

$G = G_a \cup G_a^g$ Soit donc $g \notin G_a$; c'est-à-dire que $b := g \cdot a \neq a$, ou encore $(a, b) \in Y$. De même pour tout $h \notin G_a$,

$$c := h \cdot a \neq a \Rightarrow (a, c) \in Y.$$

Puisque, par hypothèse l'action de G sur Y est transitive, il existe

$$\begin{aligned} k \in G \text{ tel que } & k \cdot (a, b) = (a, c) \\ \Leftrightarrow & (k \cdot a, k \cdot b) = (a, c) \\ \Leftrightarrow & k \cdot a = a \wedge k \cdot b = c \\ \Leftrightarrow & k \cdot a = a \wedge k \cdot (g \cdot a) = h \cdot a \\ \Leftrightarrow & k \cdot a = a \wedge (h^{-1} * k * g) \cdot a = a \\ \Rightarrow & k \in G_a \wedge h^{-1} * k * g \in G_a \\ \Rightarrow \exists \ell \in G_a, & h^{-1} * k * g = \ell \\ \Rightarrow & k * g = h * \ell \\ \Rightarrow & h = k * g * \ell^{-1} \\ \Rightarrow & h \in G_a^g; \end{aligned}$$

si bien qu'on a montré

$$G = G_a \cup G_a^g.$$

$G_a \cap G_a^g = \emptyset$ Si h est dans $G_a \cap G_a^g$, alors $h = u * g * v$ avec $u \in G_a$ et $v \in G_a$, donc $g \in G_a$, ce qui contredit l'hypothèse.

6) Soit E un espace vectoriel de dimension finie ≥ 2 sur un corps commutatif $\mathbb{K}$. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites de E .

a) Rappeler comment $GL(E)$ agit sur $\mathcal{D}$.

Solution

Pour tout sous-espace F de E , et tout $u \in \text{GL}(E)$, $u(F)$ est un sous-espace de E de même dimension que F ; en particulier l'image $u(D)$ d'une droite $D \in \mathcal{D}$ est encore un élément de $\mathcal{D}$ ce qui permet de poser $u \cdot D := u(D)$; ce qui définit de façon quasi-immédiate une action.

b) Montrer que l'action ainsi définie est doublement transitive.

Solution

Remarquons que si $\dim E = 1$, $\mathcal{D}$ est un singleton et que $\mathcal{D} \times \mathcal{D} \setminus \Delta = \emptyset$; si bien que le problème ne présente vraiment guère d'intérêt.

Soient donc $(D_1, D_2, D'_1, D'_2) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} \times \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ tel que $D_1 \neq D_2$ et $D'_1 \neq D'_2$. Soit u_i (resp. u'_i) un vecteur directeur de D_i (resp. D'_i) pour $i = 1$ ou 2 . Alors $\{u_1, u_2\}$ et $\{u'_1, u'_2\}$ sont des parties libres de E qu'on peut compléter en des bases $(u_i)_{1 \leq i \leq \dim E}$ et $(u'_i)_{1 \leq i \leq \dim E}$. Il existe alors (celui-ci est même unique) un élément

$$f \in \text{GL}(E) \text{ tel que } \forall 1 \leq i \leq \dim E, f(u_i) = u'_i.$$

Il en résulte alors immédiatement que

$$f \cdot D_1 = D'_1 \text{ et } f \cdot D_2 = D'_2.$$

7) Montrer à l'aide des questions précédentes que $\text{GL}_2(\mathbb{K})$ est la réunion disjointe de B et de $B \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B$ avec

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{K}^\times \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}^\times \right\}.$$

Solution

Avec les notations de la question 5, on prend pour a la droite engendrée par le vecteur $(1, 0)$. Le stabilisateur de a est formé des $h \in \text{GL}_2(\mathbb{K})$ tels que $h \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un multiple de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire exactement B .

La matrice $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à B . On applique alors la question 5 :

$$\text{GL}_2(\mathbb{K}) = B \cup B \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B.$$

Exercice III.7.10 (Formule de BURNSIDE) Soit $(G, *)$ un groupe dont on note 1 l'élément neutre et E un G -ensemble, c'est-à-dire un ensemble muni d'une action de G notée

$$\cdot : G \times E \rightarrow E, (g, x) \mapsto g \cdot x.$$

1) (Cours)

a) Rappeler ce que signifie que E est un G -ensemble ou de manière équivalente que G agit sur E .

Solution

Voir le cours définition III.2.1. De manière équivalente, on dispose d'un morphisme de groupes $\phi : G \rightarrow \mathcal{S}(E)$ ou d'une loi externe

$$\cdot : G \times E \rightarrow E, (g, x) \mapsto g \cdot x$$

satisfaisant

$$1 \cdot x = x \text{ et } (g * h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x).$$

b) Pour tout $x \in E$, qu'appelle-t-on l'orbite $O(x)$ de x sous l'action de G ?

Solution

L'orbite $O(x)$ de x est définie par

$$O(x) := \{g \cdot x, g \in G\}$$

(cf. cours définition III.3.2, point i.)

c) Pour tout $x \in E$, qu'appelle-t-on le stabilisateur $\text{Stab}_G(x)$ de x sous l'action de G ?

Solution

Le stabilisateur de x est défini par

$$\text{Stab}_G(x) := \{g \in G ; g \cdot x = x\}$$

(cf. cours définition III.4.2.)

On suppose désormais que G et E sont finis.

2) (Orbites et stabilisateurs)

a) Montrer qu'il y a un nombre fini d'orbites $O(x_i)_{1 \leq i \leq k}$ pour l'action de G sur E et que chacune d'entre elles est un ensemble fini.

Solution

Les orbites sous l'action de G réalisent une partition de E . L'ensemble E étant fini, chacune de ses parties est finie. Choisissons un ensemble R de représentants de chaque orbite. L'application naturelle $R \rightarrow E$ est injective ce qui assure que R est fini et donc que les orbites sont en nombre fini.

b) Pour tout $x \in E$ rappeler (sans démonstration) la relation liant

$$\#(G), \#(\text{Stab}_G(x)) \text{ et } \#(O(x)).$$

Solution

On a :

$$\#(G) = \#(\text{Stab}_G(x)) \times \#(O(x)) \text{ (cf. cours corollaire III.4.4.)}$$

Pour tout $g \in E$, on note

$$\text{Fix}_E(g) := \{x \in E ; g \cdot x = x\} \text{ (ou simplement) } \text{Fix}(g).$$

On note

$$F := \{(g, x) \in G \times E ; g \cdot x = x\},$$

$$p : F \rightarrow G$$

$$(g, x) \mapsto g$$

$$q : F \rightarrow E$$

$$(g, x) \mapsto x.$$

3) (L'ensemble F)

Représenter graphiquement l'ensemble F correspondant à :

a) l'action de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) sur $\{1, 2, 3\}$ définie à .

Solution

G/E	1	2	3
$[1 \ 2 \ 3]$			
Id	(Id, 1)	(Id, 2)	(Id, 3)
$[1 \ 3 \ 2]$			

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{S}_3, F =$$

	G/E	1	2	3
$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{S}_3, F =$	Id	(Id, 1)	(Id, 2)	(Id, 3)
	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$			$(\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, 3)$

b) l'action étudiée à .

Solution

G/E	1	2	3	4	5
Id	(Id, 1)	(Id, 2)	(Id, 3)	(Id, 4)	(Id, 5)
s					
s^2		$(s^2, 2)$		$(s^2, 4)$	
s^3	$(s^3, 1)$		$(s^3, 3)$		$(s^3, 5)$
s^4		$(s^4, 2)$		$(s^4, 4)$	
s^5					

4) (Formule de Burnside)

a) Décrire en fonction des objets dont on a rappelé ou donné la définition dans ce problème

$$p^{-1}(\{g\}), g \in G \text{ et } q^{-1}(\{x\}), x \in E .$$

Solution

Pour tout $(x, g) \in F$,

$$(x, g) \in p^{-1}(\{g\}) \Leftrightarrow g \cdot x = x \Leftrightarrow x \in \text{Fix}(g)$$

si bien que

$$p^{-1}(\{g\}) = \{g\} \times \text{Fix}(g) .$$

Similairement pour tout $(x, g) \in F$,

$$(x, g) \in q^{-1}(\{x\}) \Leftrightarrow g \cdot x = x \Leftrightarrow g \in \text{Stab}_G(x)$$

si bien que

$$q^{-1}(\{x\}) = \text{Stab}_G(x) \times \{x\} .$$

b) Montrer que

$$F = \coprod_{x \in E} q^{-1}(\{x\}) = \coprod_{g \in G} p^{-1}(\{g\}),$$

(en particulier

$$\forall (x, y) \in E \times E, q^{-1}(\{x\}) \cap q^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset \Rightarrow q^{-1}(\{x\}) = q^{-1}(\{y\})$$

et

$$\forall (g, h) \in G \times G, p^{-1}(\{g\}) \cap p^{-1}(\{h\}) \neq \emptyset \Rightarrow p^{-1}(\{g\}) = p^{-1}(\{h\}) .$$

)

Solution

Pour tout $(g, x) \in F$,

$$(g, x) \in p^{-1}(\{g\}) \text{ et } (g, x) \in q^{-1}(\{x\})$$

si bien que

$$F \subset \bigcup_{g \in G} p^{-1}(\{g\}) \text{ et } F \subset \bigcup_{x \in E} q^{-1}(\{x\}). \quad 1$$

Par ailleurs p (resp. q) étant une application définie sur F pour tout $g \in G$ (resp. $x \in E$), $p^{-1}(\{g\}) \subset F$ (resp. $q^{-1}(\{x\}) \subset F$), ce qui assure que les inclusions point 1 sont des égalités.

Enfin pour tout $(x, y) \in E \times E$, si $q^{-1}(\{x\}) \cap q^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$, il existe $(g, z) \in q^{-1}(\{x\}) \cap q^{-1}(\{y\})$ c'est-à-dire que

$$x = q((g, z)) = z = y$$

ce qui entraîne

$$q^{-1}(\{x\}) = q^{-1}(\{y\}).$$

Le même raisonnement vaut pour p et vaudrait d'ailleurs pour n'importe quelle application.

c) On rappelle qu'on a noté k le nombre d'orbites sous l'action de G sur E (cf. 2. a.). En écrivant $\#(F)$ de deux manières différentes établir la *formule de BURNSIDE* :

$$k = \frac{1}{\#(G)} \sum_{g \in G} \#(\text{Fix}(g)).$$

Solution

D'une part (cf. b.),

$$F = \coprod_{g \in G} p^{-1}(\{g\})$$

d'où

$$\#(F) = \sum_{g \in G} \#(p^{-1}(\{g\})) = \sum_{g \in G} \#(\text{Fix}(g)) \text{ d'après point a.} \quad 1$$

D'autre part (cf. b.),

$$F = \coprod_{x \in E} q^{-1}(\{x\})$$

d'où

$$\#(F) = \sum_{x \in E} \#(q^{-1}(\{x\})) = \sum_{x \in E} \#(\text{Stab}_G(x)) \text{ (cf. a.)}$$

On peut encore, (cf. 2. a.), réécrire l'égalité ci dessus :

$$\#(F) = \sum_{i=1}^k \sum_{x \in O(x_i)} \#(\text{Stab}_G(x)).$$

En utilisant le point b de la question 2, et en remarquant que pour tout $x \in O(x_i)$, $O(x) = O(x_i)$, l'égalité précédente se réécrit encore :

$$\#(F) = \sum_{i=1}^k \sum_{x \in O(x_i)} \frac{\#(G)}{\#(O(x_i))} = k\#(G).$$

En combinant cette dernière égalité avec point 1, on établit immédiatement la formule de Burnside.

Exercice III.7.11 (Carrés 3×3) Notons $C := [1; 3] \times [1; 3]$. Dans cet exercice, on appellera simplement *carré* la donnée d'une application bijective $C \rightarrow \{1, \dots, 9\}$. Un exemple est représenté de façon visuelle ci-dessous :

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1) Combien existe-t-il de carrés ?

Solution

Il s'agit de compter les bijections d'un ensemble de cardinal 9 vers un autre ensemble de cardinal 9 : il y a 9! possibilités.

2) Si on identifie deux carrés qui sont obtenus l'un de l'autre par permutation des lignes, combien y a-t-il de possibilités ?

Solution

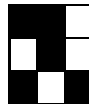
L'action de S_3 sur l'ensemble $\mathcal{C}$ des carrés est libre : le stabilisateur de tout élément est trivial. Le nombre de possibilités est donc $\frac{9!}{3!}$.

3) On s'autorise maintenant à faire des permutations des lignes et des permutations des colonnes, et ce dans un ordre arbitraire. Pour la relation d'équivalence correspondante, combien y a-t-il de classes d'équivalence de carrés ?

Solution

On peut définir une action du groupe produit $S_3 \times S_3$ sur $\mathcal{C}$ par permutation des lignes et des colonnes et cette action est libre. Les classes d'équivalence sont les orbites pour cette action. Le nombre cherché est donc $\frac{9!}{(3!)^2} = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 10080$.

4) On s'intéresse maintenant à des *tableaux*, qui seront ici définies comme étant des applications $C \rightarrow \{0, 1\}$. On peut les représenter en utilisant deux couleurs (noir pour la valeur 1, blanc pour 0) :



a) Combien y a-t-il de tableaux ?

Solution

Il y en a $2^9 = 512$.

b) Si on identifie deux tableaux qui sont obtenus l'un de l'autre par permutation des lignes, combien y a-t-il de possibilités ?

Solution

On applique la formule de Burnside pour l'action de S_3 par permutation des lignes sur l'ensemble $\mathcal{T}$ des tableaux. En tenant compte du fait que deux éléments conjugués de S_3 ont le même nombre de points fixes, le nombre N d'orbite est :

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{6} \sum_{\sigma \in S_3} \#\mathcal{T}^\sigma \\ &= \frac{1}{6} \left(\#\mathcal{T} + 3 \cdot \#\mathcal{T}^{(1\ 2)} + 2 \cdot \#\mathcal{T}^{(1\ 2\ 3)} \right) \\ &= \frac{1}{6} (2^9 + 3 \cdot 2^6 + 2 \cdot 2^3) \\ &= \frac{1}{3} (2^8 + 3 \cdot 2^5 + 2^3) \\ &= \frac{2^3}{3} (2^5 + 3 \cdot 2^2 + 1) \\ &= \frac{2^3}{3} (32 + 12 + 1) \\ &= \frac{2^3}{3} \cdot 45 = 2^3 \cdot 15 = 120 \end{aligned}$$

c) Si on identifie deux tableaux qui sont obtenus l'un de l'autre par permutation des lignes et par une éventuelle inversion des couleurs, combien y a-t-il de possibilités ?

Solution

L'involution consistant à inverser les couleurs passe au quotient pour donner une involution sur l'ensemble des orbites considéré à la question précédente. Cette involution n'a pas de points fixes puisque 9 est un nombre impair, et donc qu'un tableau n'a pas le même nombre de cases noires et de cases blanches. Le nombre de possibilités considéré ici est donc $\frac{120}{2} = 60$.

5) On s'autorise maintenant à faire des permutations des lignes et des permutations des colonnes, et ce dans un ordre arbitraire. Pour la relation d'équivalence correspondante, combien y a-t-il de classes d'équivalence de tableaux ?

Solution

On considère l'action du groupe $G := S_3 \times S_3$ sur l'ensemble $\mathcal{T}$ des tableaux. Un élément de $T \in \mathcal{T}$ peut être considéré comme la donnée d'une famille $(T_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ d'éléments de $\{0, 1\}$.

Si $(\sigma, \sigma') \in G$ et que $T: C \rightarrow \{0, 1\}$ est un élément de $\mathcal{T}$, on notera $(\sigma, \sigma').T := (T_{\sigma^{-1}(i), \sigma'^{-1}(j)})_{1 \leq i,j \leq 3}$.

Comme S_3 possède 3 classes de conjugaisons, G en possède $3 \cdot 3 = 9$. Si $g = (\sigma, \sigma') \in G$, les points fixes de g pour l'action sur $\mathcal{T}$ correspondent aux fonctions $C \rightarrow \{0, 1\}$ qui sont constantes sur les orbites de $\langle g \rangle \subset G$ agissant sur C . Le nombre de points fixes de g dans $\mathcal{T}$ donc 2^c où c est le nombre de cycles dans la décomposition de la permutation donnée par l'action de g sur C . Dans le tableau suivant, on note k le cardinal de la classe de conjugaison de (σ, σ') dans G .

(Pour décrire l'action sur C de g , on numérote les cases de 1 à 9 comme dans le premier carré donné dans l'énoncé.)

$g = (\sigma, \sigma')$	k	action sur C	c	2^c	$k \cdot 2^c$
(Id, Id)	1	Id	9	512	512
(Id, (1 2))	3	(1 2)(4 5)(7 8)	6	64	192
(Id, (1 2 3))	2	(1 2 3)(4 5 6)(7 8 9)	3	8	16
((1 2), Id)	3	(1 4)(2 5)(3 6)	6	64	192
((1 2), (1 2))	9	(1 5)(2 4)(3 6)(7 8)	5	32	288
((1 2), (1 2 3))	6	(1 5 3 4 2 6)(7 8 9)	2	4	24
((1 2 3), Id)	2	(1 4 7)(2 5 8)(3 6 9)	3	8	16
((1 2 3), (1 2))	6	(1 5 7 2 4 8)(3 6 9)	2	4	24
((1 2 3), (1 2 3))	4	(1 5 9)(2 6 7)(3 4 8)	3	8	32
Total	36				1296

Comme $1296 = 36 \cdot 36$, on obtient qu'il y a 36 orbites de tableaux pour l'action de G par permutation des lignes et des colonnes.