Corrigé Des exercices V.4

V.4 . −Exercices

Exercice V.4.1 (Forme polaire associée) Faire la preuve de la proposition V.1.3.

Solution

— *L'existence d'une forme bilinéaire symétrique ϕ telle que $\chi(x) = \phi(x,x)$ est assurée par la définition V.1.2.*
Unicité Soit ψ une forme bilinéaire symétrique telle que $\psi(x,x) = \chi(x)$. Alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\chi(x+y)-\chi(x)-\chi(y)\right) &= \frac{1}{2}\left(\psi(x+y,x+y)-\psi(x,x)-\psi(y,y)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(2\psi(x,y)+\psi(x,x)+\psi(y,y)-\psi(x,x)-\psi(y,y)\right)\\ &= \psi(x,y)\,.\end{aligned} \tag{V.4.1.1}$$

De même :

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left(\chi(x+y)-\chi(x-y)\right) &= \frac{1}{4}\left(\psi(x+y,x+y)-\psi(x-y,x-y)\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\psi(x,x)+\psi(y,y)+2\psi(x,y)-\psi(x,x)-\psi(y,y)+2\psi(x,y)\right)\\ &= \psi(x,y)\,;\end{aligned} \tag{V.4.1.2}$$

ce qui prouve l'unicité.

Exercice V.4.2 (Propriétés de l'orthogonal) Faire la preuve de la proposition V.1.7.

Solution

i est immédiat.
ii

$$\begin{aligned}&\forall (x,y)\in T^{\perp,\phi}\times S, & x &\in T\\ &\Rightarrow & \phi(x,y) &= 0\\ &\Rightarrow & y &\in S^{\perp}\\ &\Rightarrow & T^{\perp} &\subset S^{\perp}\,.\end{aligned}$$

iii Est une conséquence immédiate du fait que $\operatorname{Ker}\phi = E^{\perp,\phi}$ et du point ii.
iv Puisque $\forall x\in E,\ \phi(x,0) = 0, 0 \in S^{\perp,\phi}$; si bien que $S^{\perp} \neq \emptyset$. De plus :

$$\begin{aligned}&\forall (x,y,z,a,b)\in S^{\perp}\times S^{\perp}\times S\times\mathbb{K}\times\mathbb{K},\ \phi(ax+by,z) &&= a\phi(x,z)+b\phi(y,z)\\ & &&= 0\\ &\Rightarrow & ax+by &\in S^{\perp}\,;\end{aligned}$$

ce qui assure que $S^{\perp}$ est un $\mathbb{K}$-espacevectoriel.
Puisque $S \subset \operatorname{Vect}\{S\}$, il résulte du point ii que $\operatorname{Vect}\{S\}^{\perp,\phi} \subset S^{\perp,\phi}$.
Réciproquement :

$$\begin{aligned}&\forall (x,y)\in S^{\perp}\times\operatorname{Vect}\{S\},\quad \exists((y_i)_{1\le i\le n},(a_i)_{1\le i\le n}) \in S^n\times\mathbb{K}^n,\ y &&= \sum_{i=1}^{n} a_i y_i\\ &\Rightarrow & \phi(x,y) &= \phi(x,\sum_{i=1}^{n} a_i y_i)\\ & & &= \sum_{i=1}^{n} a_i\phi(x,y_i)\\ & & &= 0\\ &\Rightarrow & x &\in \operatorname{Vect}\{S\}^{\perp}\\ &\Rightarrow & S^{\perp} &\subset \operatorname{Vect}\{S\}^{\perp}\,.\end{aligned}$$

v

$$\begin{array}{lrcl}\forall x\in E, & x & \in & S\cup T^{\perp,\phi}\\ \Leftrightarrow & \forall y\in S\cup T,\ \phi(x,y) & = & 0\\ \Leftrightarrow & \forall y\in S,\ \phi(x,y)=0 & \wedge & \forall y\in T,\ \phi(x,y)=0\\ \Leftrightarrow & x\ \in\ S^{\perp} & \wedge & x\ \in\ T^{\perp}\\ \Leftrightarrow & x & \in & S^{\perp}\cap T^{\perp}\ ;\end{array}$$

si bien que

$$S\cup T^{\perp,\phi}\ =\ S^{\perp,\phi}\ \cap\ T^{\perp,\phi}\ .$$

Dans le cas où S et T sont des sous-espaces vectoriels de E, $S\ +\ T\ =\ \mathrm{Vect}\big\{S\cup T\big\}$ et il découle donc du point iv que

$$S+T^{\perp,\phi}\ =\ S^{\perp,\phi}\ \cap\ T^{\perp,\phi}\ .$$

Exercice V.4.3 (Identité du parallélogramme)

Le but de cet exercice est de montrer que l'*égalité du parallélogramme* 1.2 est caractéristique des *normes euclidienne* ; autrement dit q'uune norme $||\cdot||$ donnée satisfait cette égalité si et seulement s'il existe un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ tel que

$$\forall x\ ,\ ||x||\ =\ \sqrt{\langle x,x\rangle}\ .$$

On pourrait aisément s'assurer ainsi que les normes $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_\infty$ ne sont pas euclidiennes.

On vérifie au point a de la question 2 qu'une norme euclidienne vérifie l'égalité du parallélogramme ; ce qui est un calcul assez élémentaire. À la question 1, on montre que la réciproque est vraie ; à savoir que si une norme $||\cdot||$ vérifie l'égalité du parallélogramme, on peut construire un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (qui sera d'ailleurs unique) tel que $||\cdot||\ =\ \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$.

1) Soit $(E,||\cdot||)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

a) Montrer que si la norme $||\cdot||$ est euclidienne la forme bilinéaire symétrique définissant la structure euclidienne est caractérisée par

$$\forall(x,y)\in E\times E,\ p(x,y)\ =\ \frac{1}{2}\big(||x+y||^2-||x||^2-||y||^2\big)\ =\ \frac{1}{4}\big(||x+y||^2-||x-y||^2\big)\ ;$$

assurant ainsi que si $||\cdot||$ provient d'une structure euclidienne, celle-ci est unique.

Solution

Si $||\cdot||$ est euclidienne, il existe une forme quadratique χ sur E telle que

$$\forall x\in E,\ ||x||^2\ =\ \chi(x)\ .$$

Si p est la forme polaire de χ, il découle de la proposition V.1.3 et de l'exercice V.4.1 que p satisfait aux identités de polarisations ci-dessus et est donc complètement déterminée.

On suppose que la norme de E vérifie la relation

$$\forall(x,y)\in E,\times E,\ 2\big(||x||^2+||y||^2\big)\ =\ ||x+y||^2+||x-y||^2\ . \qquad \mathbf{2}$$

On définit

$$p\ :\ E\ \times E\ \to\ \mathbb{R}\ ,\ (x,y)\ \mapsto\ \frac{1}{2}\big(||x+y||^2-||x||^2-||y||^2\big)\ .$$

b) (Symétrie)
Montrer que p est symétrique *i.e.*

$$\forall(x,y)\in E\times E,\ p(x,y)\ =\ p(y,x)\ .$$

Solution

C'est immédiat sur la formule définissant p.

c) (Définie positive)
Montrer que p est définie positive, *i.e.*

$$\forall x\in E,\ p(x,x)\ \geq\ 0 \text{ et } p(x,x)\ =\ 0\ \Rightarrow\ x\ =\ 0\ .$$

Solution

Il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned} p(x,x) &= \frac{1}{2}\big(||2x||^2 - 2||x||^2\big) \\ &= ||x||^2\ . \end{aligned}$$

d) (**Additivité à droite**)
Montrer que

$$\forall (x,y,z) \in E \times E \times E,\ p(x,y+z) \ = \ p(x,y) \ + \ p(x,z)\ .$$

Solution

On a :

$$\begin{aligned} & 4\big(p(x,y+z) - p(x,y) - p(x,z)\big) \\ &= 2\big(||x+y+z||^2 - ||x||^2 - ||y+z||^2 - ||x+y||^2 + ||x||^2 + ||y||^2 - ||x+z||^2 + ||x||^2 + ||Z||^2\big) \\ &= 2\big(||x+y+z||^2 - ||x+y||^2 - ||x+z||^2 - ||y+z||^2 + ||x||^2 + ||y||^2 + ||z||^2\big) \\ &= ||2x+y+z||^2 + ||y+z||^2 - ||2x+y+z||^2 - ||y-z||^2 - 2||y+z||^2 + 2||y||^2 + 2||z||^2 \\ &= \ -||y+z|| - ||y-z|| + 2||y||^2 + 2||z||^2 \\ &= 0\ . \end{aligned}$$

e) (**$\mathbb{Z}$-linéarité**)
Montrer que

$$\forall (x,y,n) \in E \times E \times \mathbb{Z},\ p(x,ny) \ = \ np(x,y)\ .$$

Solution

i) ($n \in \mathbb{N}$)
On constate immédiatement sur la formule définissant p que

$$\forall x \in E,\ p(x,0) \ = \ p(0,x) \ = \ 0\ .$$

Ainsi

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ p(x,0y) \ = \ 0 \ = \ 0.p(x,y)\ . \qquad 1$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il découle du point d que

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ p(x,(n+1)y) \ = \ p(x,ny+y) \ = \ p(x,ny) \ + \ p(x,y)\ . \qquad 2$$

Si donc on fait l'hypothèse de récurrence, déjà vérifiée pour $n = 0$ en 1, que $p(x,ny) = np(x,y)$, il découle du calcul 2 que

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in E \times E, \quad p(x,(n+1)y) &= p(x,ny) + p(x,y) \\ &= np(x,y) + p(x,y) \\ &= (n+1)p(x,y)\ ; \end{aligned}$$

ce qui assure, par récurrence, que

$$\forall (x,y,n) \in E \times E \times \mathbb{N},\ p(x,ny) \ = \ np(x,y)\ .$$

ii) ($n \in \mathbb{Z}$)
Remarquons d'abord, qu'il résulte du point d et de i.1 que

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in E \times E, \quad p(x,y) + (px,-y) &= p(x,y-y) \\ &= 0\ ; \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ p(x,-y) \ = \ -p(x,y)\ . \qquad 1$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{Z}, n < 0$,

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ p(x,ny) \ = \ -p(x,-ny)\ .$$

Or $-n \in \mathbb{N}$; si bien qu'il découle du point i que

$$-p(x,-ny) \ = \ t(-n)p(x,y) \ = \ np(x,y)\ .$$

Ce dernier résultat combiné au point i permet d'assurer que

$$\forall (x,y,n) \in E \times E \times \mathbb{Z},\ p(x,ny) \ = \ np(x,y)\ .$$

f) ($\mathbb{Q}$**-linéarité**)
Montrer que

$$\forall (x,y,q) \in E \times E \times \mathbb{Q},\ p(x,qy) \ = \ qp(x,y)\ .$$

Solution

Pour tout $q \in \mathbb{Q}$, il existe $(r,s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $q = \frac{r}{s}$. En appliquant une première fois le point e , il vient

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ sp(x,\frac{r}{s}y) \ = \ p(x,s\frac{r}{s}y) \ = \ p(x,ry)\ .$$

En apliquant une seconde fois le point e , il vient

$$sp(x,\frac{r}{s}y) \ = \ p(x,ry) \ = \ rp(x,y)\ ;$$

ce qui entraîne finalement

$$p(x,\frac{r}{s}y) \ = \ \frac{r}{s}p(x,y)\ .$$

g) ($\mathbb{R}$**-linéarité**)
Montrer que

$$\forall (x,y,a) \in E \times E \times \mathbb{R},\ p(x,ay) \ = \ ap(x,y)\ .$$

Solution

Pour tout $(x,y) \in E \times E$ définissons

$$f_{x,y}\ :\ \mathbb{R} \ \to\ \mathbb{R}\ ,\ a \ \mapsto\ p(x,ay) - ap(x,y)\ .$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\forall (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\quad 2[f_{x,y}(a) - f_{x,y}(b)] &= ||x+ay||^2 - ||x||^2 - a^2||y||^2 - a||x+y||^2 + a||x||^2 + a||y||^2 - ||x+by||^2 + ||x||^2 \\ &= (a-b)(||x||^2||y||^2 - ||x+y||^2) - (a^-b^2)||y||^2 + ||x+ay||^2 - ||x+by||^2 \\ &= (a-b)(||x||^2||y||^2 - ||x+y||^2 - (a+b)||y||^2) + (||x+ay|| + ||x+by||)(||x+ay\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\forall (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\quad |f_{x,y}(b) - f_{x,y}(a)| &\leq \\ &\leq \frac{|(b-a)|}{2}\left|||x||^2||y||^2 - ||x+y||^2 - (a+b)||y||^2\right| + \frac{1}{2}(||x+ay|| + ||x+by||)||(b-a)y|| \\ &\leq \frac{|(b-a)|}{2}\left(\left|||x||^2||y||^2 - ||x+y||^2 - (a+b)||y||^2\right| + (||x+ay|| + ||x+by||)||y||\right)\ .\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \lim_{b \to a} f_{x,y}(b) \ = \ f_{x,y}(a)\ ;$$

c'est-à-dire que $f_{x,y}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$. Or il résulte du point f que $f_{x,y|\mathbb{Q}} = 0$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, $f_{x,y}$ est donc identiquement nulle sur $\mathbb{R}$; ce qui prouve le résultat demandé.

h) (**Conclusion**)
Déduire finalement de ce qui précède que p est un produit scalaire sur E.

Solution

On rappelle (cf. le point i de la définition V.2.6,) qu'un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.
Or les points d et g assurent que p est linéaire à gauche. Combiné avec le point b , ce résultat assure que p est bilinéaire symétrique. Enfin le caractère défini positif a été établi au point c .

2) Réciproquement, si E est un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle x, y\rangle$:

a) Montrer que la norme euclidienne (définie par $||x|| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$) vérifie (1.2), et que $\langle x, y\rangle = p(x, y)$.

b) Démontrer l'égalité de la médiane :

$$\forall (x, y, z) \in E \times E \times E, \ \left\| x - \frac{y+z}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}\left(||x-y||^2 + ||x-z||^2\right) - \frac{1}{4}||y-z||^2 .$$

3) Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, pour quelles valeurs de $q \geq 1$ les normes $\|\cdot\|_q$ vérifient-elles 1.2 ?

Exercice V.4.4 (Projection orthogonale) Soit E une partie de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ et soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \ f(v) \in E \text{ et } v - f(v) \in E^\perp .$$

1) Montrer que pour tout $v \in E$, on a $v = f(v)$.

Solution

Notons $\langle \cdot, \cdot\rangle$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ et $||\cdot||$ la norme associée. Pour tout $v \in E$, puisque par hypothèse, $v - f(v) \in E^\perp$, on a

$$\langle v - f(v), v\rangle = 0 .$$

Comme on a également, par hypothèse $f(v) \in E$,

$$\langle v - f(v), f(v)\rangle = 0 .$$

Ces deux égalité entraînent

$$||v - f(v)||^2 = \langle v - f(v), v - f(v)\rangle = \langle v - f(v), v\rangle - \langle v - f(v), f(v)\rangle = 0 \Rightarrow v - f(v) = 0 .$$

2) Montrer que $E = \operatorname{Im} f$.

Solution

L'hypothèse $\forall v \in \mathbb{R}^n, \ f(v) \in E$ entraîne

$$\operatorname{Im} f \subset E .$$

Or d'après la question précédente

$$\forall v \in E, \ \exists w = v \in \mathbb{R}^n, \ f(w) = v .$$

Il s'ensuit que

$$E \subset \operatorname{Im} f .$$

3) En déduire que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et montrer que f est la projection orthogonale sur E.

Solution

*i) (**Sous-espace vectoriel**)*
Puisque E est l'image d'un endomorphisme c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

*ii) (**Projection**)*
On a montré à la question 1 que

$$f_{|E} = \mathrm{Id}_E .$$

Par ailleurs

$$\forall v \in E^\perp, \ v - f(v) \in E^\perp \Rightarrow f(v) \in E^\perp .$$

Comme de plus $f(v) \in E$, on a $f(v) = 0$.
Ceci caractérise la projection orthogonale sur E.