Corrigé Des exercices VI.4

VI.4 . –Exercices

Exercice VI.4.1 (Décomposition symétrique $\oplus$ antisymétrique) Rappler pourquoi, pour tout endomorphisme φ de $\mathbb{R}^3$, il existe un unique endomorphisme σ_φ symétrique et un unique endomorphisme α_φ de $\mathbb{R}^3$ tels que

$$\varphi = \sigma_\varphi + \alpha_\varphi .$$

Donner les expressions de σ_φ et α_φ en fonction de φ.

Solution

Pour tout endomorphisme $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ de $\mathbb{R}^3$, l'équation $\varphi = \sigma_\varphi + \alpha_\varphi$ avec σ_φ symétrique et α_φ antisymétrique entraîne

$$\varphi^* = \sigma_\varphi^* + \alpha_\varphi^* = \sigma_\varphi - \alpha_\varphi .$$

Il s'ensuit alors que

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi^*) \text{ et } \alpha_\varphi = \frac{1}{2}(\varphi - \varphi^*) .$$

Ceci prouve l'existence et l'unicité de la décomposition souhaitée.

VI.4.2 . –Adjonction

Exercice VI.4.2.1 Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, u un endomorphisme de E et u^* son adjoint.

1) Montrer que

$$\mathrm{Ker}\, u^* = \mathrm{Im}\, u^\perp \text{ et } \mathrm{Im}\, u^* = \mathrm{Ker}\, u^\perp .$$

Solution

$$\begin{array}{lrcl} \forall x \in E, & x & \in & \mathrm{Ker}\, u^* \\ \Leftrightarrow & u^*(x) & = & 0 \\ \Leftrightarrow \forall y \in E, & \langle u^*(x), y\rangle & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \langle x, u(y)\rangle & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x & \in & \mathrm{Im}\, u^\perp ; \end{array}$$

on a ainsi montré

$$\mathrm{Ker}\, u^* = \mathrm{Im}\, u^\perp ;$$

l'autre égalité se montrant exactement de la même façon.

2) Montrer que

a) $\mathrm{Ker}\, u \circ u^* = \mathrm{Ker}\, u^*$;

Solution

Pour tout $x \in E$,

$$u^(x) = 0 \Rightarrow u \circ u^*(x) = 0 ;$$

i.e.

$$\mathrm{Ker}\, u^* \subset \mathrm{Ker}\, u \circ u^* .$$

Réciproquement,

$$\begin{array}{lrcl} \forall x \in \operatorname{Ker} u \circ u^*, & u \circ u^*(x) & = & 0 \\ \Rightarrow & \langle x, u \circ u^*(x) \rangle & = & 0 \\ \Rightarrow & \langle u^*(x), u^*(x) \rangle & = & 0 \\ \Rightarrow & ||u^*(x)|| & = & 0 \\ \Rightarrow & u^*(x) & = & 0 \\ \Rightarrow & x & \in & \operatorname{Ker} u^* \ ; \end{array}$$

si bien qu'on a établi

$$\operatorname{Ker} u \circ u^* \ \subset \ \operatorname{Ker} u^* \ .$$

b) $\operatorname{Im} u \circ u^* \ = \ \operatorname{Im} u$.

Solution

L'inclusion $\operatorname{Im} u \circ u^* \ \subset \ \operatorname{Im} u$ *est immédiate.*
Par ailleurs, grâce au théorème du rang $\dim \operatorname{Im} u \circ u^* \ = \ \dim E - \dim \operatorname{Ker} u \circ u^*$; *c'est-à-dire en vertu du point a ,* $\dim \operatorname{Im} u \circ u^* \ = \ \dim E - \dim \operatorname{Ker} u^*$; *c'est-à-dire encore, en vertu de la question 1 ,* $\dim \operatorname{Im} u \circ u^* \ = \ \dim E - \dim \operatorname{Im} u^\perp$; *c'est-à-dire, cette fois grâce à la proposition V.3.7,*

$$\dim \operatorname{Im} u \circ u^* \ = \dim E - \big(\dim E - \dim \operatorname{Im} u\big) \ = \ \dim \operatorname{Im} u \ ;$$

ce qui combiné à l'inclusion précédemment mentionnée, achève la preuve.

3) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

Solution

Soit $F \ \subset \ E$ *un sous-espace tel que* $u(F) \ \subset \ F$*. Alors :*

$$\begin{array}{rcl} \forall (x,y) \in F^\perp \times F, \quad \langle u^*(x), y \rangle & = & \langle x, u(y) \rangle \\ & = & 0 \ ; \end{array}$$

ce qui entraîne que $u^*(x) \ \in \ F^\perp$; *si bien que*

$$u^*(F^\perp) \ \subset \ F^\perp \ .$$

Exercice VI.4.2.2 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ **un espace euclidien.**

1) Soit p un projecteur sur un sous-espace F, parallèlement à un sous-espace G. Montrer que l'adjoint p^* est un projecteur et le décrire.

Solution

$$\begin{array}{rcl} \forall (x,y) \in E \times E, \quad \langle p^* \circ p^*(x) - p^*(x), y \rangle & = & \langle p^*\big(p^*(x) - x\big), y \rangle \\ & = & \langle p^*(x) - x, p(y) \rangle \\ & = & \langle p^*(x), p(y) \rangle - \langle x, p(y) \rangle \\ & = & \langle x, p \circ p(y) \rangle - \langle x, p(y) \rangle \\ & = & \langle x, p \circ p(y) - p(y) \rangle \\ & = & 0 \ , \end{array}$$

puisque p *est un projecteur. Il résulte alors des égalités ci-dessus que*

$$\forall x \in E, \ p^* \circ p^*(x) - p^*(x) \ = \ 0 \ ;$$

ce qui signifie que p^* *est un projecteur.*
Il résulte alors de la question 1 de l'exercice VI.4.2.1 que

$$\operatorname{Ker} p^* \ = \ \operatorname{Im} p^\perp \ = \ F^\perp \text{ et } \operatorname{Im} p^* \ = \ \operatorname{Ker} p^\perp \ = \ G^\perp \ . \qquad \textit{1}$$

2) Soit $p \ \in \ \operatorname{End}(E)$ un projecteur. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) p est un projecteur orthogonal.

ii) p est auto-adjoint.

iii) $\forall x \in E, \ ||p(x)|| \ \leq \ ||x||$.

Solution

i ⇒ ii Si p est un projecteur orthogonal au sens le point i de la définition V.3.1, On a

$$\operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} p^{\perp} \text{ et } \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker} p^{\perp} ;$$

ce qui, combiné aux égalités obtenues en 1.1, assure que

$$\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} p^{*} \text{ et } \operatorname{Im} p = \operatorname{Im} p^{*} .$$

Puisque, toujours d'après la question 1 , p^* est un projecteur, les égalités ci-dessus assurent que $p = p^*$.
ii ⇒ i Si $p = p^*$, les égalités la question 1 de la question 1 assurent que

$$\operatorname{Ker} p \perp \operatorname{Im} p ;$$

ce qui caractérise un projecteur orthogonal.
i ⇒ iii Est essentiellement le théorème de PYTHAGORE.
iii ⇒ i

$$\begin{array}{llcl}
\forall (x,y) \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Im} p, & p(x+y) & = & p(x)+p(y) \\
 & & = & y \\
\Rightarrow & ||y|| & \leq & ||x+y|| \\
\Rightarrow & ||y||^2 & \leq & ||x+y||^2 \\
\Rightarrow & \langle y,y\rangle & \leq & \langle x+y, x+y\rangle \\
\Rightarrow & \langle y,y\rangle & \leq & \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle \\
\Rightarrow & \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle & \geq & 0 .
\end{array}$$

S'il existe $y_0 \in \operatorname{Im} p$, tel que $\langle x, y_0\rangle$ alors

$$-\frac{\langle x,x\rangle}{\langle x,y_0\rangle} y_0 \in \operatorname{Im} p$$

et

$$\langle x,x\rangle + 2\langle x, \left(-\frac{\langle x,x\rangle}{\langle x,y_0\rangle} y_0\right)\rangle = -\langle x,x\rangle ;$$

ce qui contredit l'inégalité précédemment établie. On a donc montré que

$$\operatorname{Ker} p \perp \operatorname{Im} p .$$

Exercice VI.4.3 (Projecteur, adjoint) Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, a et b deux vecteurs de E de norme 1 et non orthogonaux.

On désigne par $D := \operatorname{Vect}\{a\}$ et par $H := (\operatorname{Vect}\{b\})^{\perp}$.

1) Montrer que $E = D \oplus H$.

Solution

On a $\dim D = 1$ et $\dim H = n - \dim \operatorname{Vect}\{b\} = n-1$ si bien que

$$\dim D + \dim H = \dim E . \qquad 1$$

Par ailleurs puisque a et b ne sont pas orthogonaux, $a \notin H$, ce qui entraîne que $(D = \operatorname{Vect}\{A\}) \cap H = \{0\}$ ce qui combiné à la question 1 prouve que

$$E = D \oplus H .$$

2) On désigne par $p : E \to E$ définie par $p(x) := \dfrac{\langle b,x\rangle}{\langle b,a\rangle} a$.

a) Montrer que p est la projection sur D parallèlement à H.

Solution

Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(y,z) \in D \times H$ tel que $x = y + z$, ce qui équivaut à dire qu'il existe un *unique couple* $(\lambda, z) \in \mathbb{R} \times H$ *tel que* $x = \lambda a + z$*. Par définition,* λa *est la projection de* x *sur* D *parallèlement à* H*. Or*

$$\begin{array}{rrcl} & x & = & \lambda a + z \\ \Rightarrow & \langle x, b\rangle & = & \lambda\langle a, b\rangle + \langle z, b\rangle \\ \Rightarrow & \langle x, b\rangle & = & \lambda\langle a, b\rangle \\ \Rightarrow & \lambda & = & \dfrac{\langle x, b\rangle}{\langle a, b\rangle}\,. \end{array}$$

On utilise d'abord que $z \in H \Rightarrow \langle z, b\rangle = 0$ *puis que* a *et* b *n'étant pas orthogonaux,* $\langle a, b\rangle \neq 0$*. On en déduit donc que*

$$p(x) = \frac{\langle x, b\rangle}{\langle a, b\rangle} a = \lambda a$$

est le projeté de x *sur* D *parallèlement à* H*.*

b) Montrer que l'adjoint p^* de p est défini par :

$$\forall y \in E, \quad p^*(y) = \frac{\langle a, y\rangle}{\langle a, b\rangle} b\,.$$

Solution

Pour tout $(x, y) \in E \times E$*,*

$$\begin{array}{rcl} \langle x, p^*(y)\rangle & = & \langle p(x), y\rangle \\ & = & \langle \dfrac{\langle x, b\rangle}{\langle a, b\rangle} a, y\rangle \\ & = & \dfrac{1}{\langle a, b\rangle}\langle x, b\rangle\langle a, y\rangle \\ & = & \dfrac{1}{\langle a, b\rangle}\langle a, y\rangle\langle x, b\rangle \\ & = & \langle x, \dfrac{\langle a, y\rangle}{\langle a, b\rangle} b\rangle \end{array}$$

ce qui permet d'identifier $p^*(y)$ *à* $\dfrac{\langle a, y\rangle}{\langle a, b\rangle} b$*.*

c) Caractériser géométriquement p^*.

Solution

En combinant les résultats des questions point a et point b on identifie p^* *à la projection sur* $\mathrm{Vect}\{b\}$ *parallèlement à* $\mathrm{Vect}\{a\}^{\perp}$*.*

3) Déterminer $p^* \circ p$. Montrer que c'est un endomorphisme diagonalisable.

Solution

Pour tout $x \in E$*,*

$$\begin{array}{rcl} p^* \circ p(x) & = & p^*[p(x)] \\ & = & p^*[\dfrac{\langle x, b\rangle}{\langle a, b\rangle} a] \\ & = & \dfrac{\langle x, b\rangle}{\langle a, b\rangle} p^*(b) \\ & = & \dfrac{\langle x, b\rangle}{\langle a, b\rangle}\dfrac{\langle a, a\rangle}{\langle a, b\rangle} b\,. \end{array}$$

On en déduit que $p^* \circ p$ *est l'application définie par*

$$x \mapsto \frac{\langle x, b\rangle}{\langle a, b\rangle}\frac{\langle a, a\rangle}{\langle a, b\rangle} b \qquad (1)$$

Remarquons qu'on a

$$(p^* \circ p)^* = p^* \circ (p^*)^* = p^* \circ p$$

c'est-à-dire que $p^* \circ p$ est autoadjoint donc diagonalisable.

4) Déterminer le noyau de $p^* \circ p$, puis les valeurs propres de $p^* \circ p$.

Solution

Pour tout $x \in E$?

$$\begin{array}{rrcl} & x & \in & \operatorname{Ker} p^* \circ p \\ \Leftrightarrow & p^*[p(x)] & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \langle p^[p(x)], y\rangle & = & 0 \forall y \in E \\ \Leftrightarrow & \langle p(x), p(y)\rangle & = & \forall y \in E \\ \Leftrightarrow & p(x) & \in & \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} p^\perp \\ \Leftrightarrow & p(x) & = & 0\,. \end{array}$$

Il s'ensuit que

$$\operatorname{Ker} p^* \circ p = \operatorname{Ker} p = H\,.$$

La valeur propre 0 est donc de multiplicité au moins $n-1$.
On peut ensuite remarquer que, comme $p^* \circ p$ est symétrique, $H^\perp$ se décompose comme une somme directe de sous-espaces propres. Or $H^\perp$ est la droite $\operatorname{Vect}\{b\}$. La droite $\operatorname{Vect}\{b\}$ est donc un sous-espace propre de $p^* \circ p$, ce qui entraîne encore que b est un vecteur propre ($b \neq 0$.)
Par ailleurs, il résulte de la formule question 3,question 1 que

$$p^*[p(b)] = \frac{\langle a, a\rangle\langle b, b\rangle}{\langle a, b\rangle^2} b$$

c'est-à-dire que b est vecteur propre de $p^* \circ p$ associé à la valeurs propre $\dfrac{\langle a, a\rangle\langle b, b\rangle}{\langle a, b\rangle^2}$.

Exercice VI.4.4 (Caractérisation des symétries) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $s \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(E)$ un endomorphismes.

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $s \circ s = \mathrm{Id}\,.$

ii) $p^+ := \frac{1}{2}(\mathrm{Id} + s)$ est un projecteur.

iii) $p^- := frac12(\mathrm{Id} - s)$ et un projecteur.

iv) $E = \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} + s) \oplus \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - s)\,.$

On dit alors que s et une *symétrie* ou une *involution linéaire*.

Solution

i $\Leftrightarrow$ ii $\frac{1}{2}(\mathrm{Id} + s)$ *est un projecteur si et seulement si*

$$\begin{array}{lrcl} & \left(\frac{1}{2}(\mathrm{Id} + s)\right)^2 & = & \frac{1}{2}(\mathrm{Id} + s) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}(\mathrm{Id} + 2s^2) & & = & \frac{1}{2}(Id + s) \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{4}s^2 & = & \frac{1}{2}(s - s + \mathrm{Id} - \frac{1}{2}\mathrm{Id}) \\ \Leftrightarrow & s^2 & = & \mathrm{Id}\,. \end{array}$$

i $\Leftrightarrow$ iii Se montre exactement de la même manière que ci-dessus.
i $\Rightarrow$ iv

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in E, \quad p^+(x) + p^-(x) & = & \frac{1}{2}(x + (s(x)) + \frac{1}{2}(x - s(x)) \\ & = & x\,. \end{array}$$

On a donc

$$p^+ + p^- = \mathrm{Id}. \qquad \textit{VI.4.4.5}$$

Come on a déjà montré les équivalences i $\Leftrightarrow$ ii et i $\Leftrightarrow$ iii, on sait que p^+ et p^- sont des projecteurs. Il s'ensuit que

$$E = \operatorname{Im} p^+ \oplus \operatorname{Im} p^- = \operatorname{Ker} p^+ \oplus \operatorname{Ker} p^-\,.$$

Or

$$\operatorname{Ker} p^{+} = \operatorname{Ker}(\operatorname{Id} + s) \text{ et } \operatorname{Ker} p^{-} = \operatorname{Ker}(\operatorname{Id} - s) .$$

iv ⇒ i Pour tout $x \in E$, *il existe un unique couple* $(y, z) \in \operatorname{Ker}(\operatorname{Id} + s) \times \operatorname{Ker}(\operatorname{Id} - s)$ *tel que* $x = y + z$. *Alors :*

$$\begin{aligned} s^2(x) &= s^2(y+z) \\ &= s^2(y) + s^2(z) \\ &= s(-y) + s(z) \\ &= y + z \\ &= x . \end{aligned}$$

Exercice VI.4.5 (Caractérisation des symétries orthogonales) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel espace euclidien (ou même simplement préhilbertien réel (cf. le point ii de la définition V.2.6,),) et $s \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(E)$ une symétrie (cf. l'exercice VI.4.4 .)

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $s \in \mathcal{O}(E)$.

ii) $\operatorname{Ker}(\operatorname{Id} + s) \perp \operatorname{Ker}(\operatorname{Id} - s)$.

iii) Le projecteur $p^{+} := \frac{1}{2}(\operatorname{Id} + s)$ est un projecteur orthogonal.

iv) Le projecteur $p^{-} := \frac{1}{2}(\operatorname{Id} - s)$ est un projecteur orthogonal.

v) $s = s^*$. On rappelle qu'on dit alors que s et *autoadjoint* (cf. la définition VI.3.1.)

On dit dans ce cas que la symétrie est la *symétrie orthogonale* par rapport à $\operatorname{Ker}(\operatorname{Id} - s)$. On dira aussi *réflexion* par rapport à $\operatorname{Ker}(\operatorname{Id} - s)$.

Solution

iii ⇔ iv On a déjà montré (cf. VI.4.4.VI.4.4.5,) que $p^{+} + p^{-} = \operatorname{Id}$; *ce qui entraîne que*

$$\operatorname{Ker} p^{+} = \operatorname{Im} p^{-} \text{ et } \operatorname{Ker} p^{-} = \operatorname{Im} p^{+} ;$$

si bien que l'un des projecteurs est orthogonal si et seulement si l'autre l'est.

ii ⇔ iii Il sufit de remarquer que

$$\operatorname{Ker}(\operatorname{Id} + s) = \operatorname{Ker} p^{+} \text{ et } \operatorname{Ker}(\operatorname{Id} - s) = \operatorname{Ker} p^{-}1 = \operatorname{Im}^{+} .$$

i ⇒ ii

$$\begin{array}{lrcl} \forall (x,y) \in \operatorname{Ker}(\operatorname{Id}+s) \times \operatorname{Ker}(\operatorname{Id}-s), & s(x) + x + 0 & \wedge & s(y) - y = 0 \\ \Rightarrow & \langle x, y \rangle & = & \langle s(x), s(y) \rangle \\ \Rightarrow & \langle x, y \rangle & = & -\langle x, y \rangle \\ \Rightarrow & \langle x, y \rangle & = & 0 \\ \Rightarrow & \operatorname{Ker}(\operatorname{Id}+s) & \perp & \operatorname{Ker}(\operatorname{Id}-s) . \end{array}$$

ii ⇒ i repose sur les mêmes arguments que ci-dessus.

i ⇔ v D'après le point f de la proposition VI.2.7,

$$s \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow s \circ s^* = \operatorname{Id} .$$

Par ailleurs

$$s \circ s = \operatorname{Id} .$$

Ces deux égalités équivalent à

$$s = s^* .$$

Exercice VI.4.6 (Projection et symétrie) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2. Soient x et $y \in E$. Montrer que :

1) Si $||x|| = ||y||$, alors il existe un hyperplan H de E tel que $y = s(x)$ où s est la symétrie orthogonale par rapport à H.

Solution

Il s'agit bien évidemment de prendre pour H l'hyperplan médiateur construit à le point ii de la proposition V.3.8. En effet l'endomorphisme s *de* E *défini par*

$$s_{|h} = \mathrm{Id}_H \text{ et } s_{|H^\perp = \mathrm{Vect}\{y-x\}}$$

est alors une symétrie orthogonale tel que $s(x) = y$ [a] .

[a]. Cette construction sera aussi reprise en détail à l'exercice VIII.9.10

2) Si $\langle x, y\rangle = ||y||^2$, alors il existe un hyperplan H de E tel que $y = p(x)$ où p est la projection orthogonale sur H.

Solution

Prendre $H := x - y^\perp$; *qui est bien un hyperplan puisque* $x - y \neq 0$. *Par ailleurs un calcul très élémentaire montre que*

$$\langle xy, y\rangle = ||y||^2 \Leftrightarrow y \perp x - y .$$

Exercice VI.4.7 (Composition de symétries orthogonales) Soit E un espace euclidien de dimension n.
Soient F, G deux sous-espaces de E tels que $F \perp G$. On note s_F et s_G les symétries orthogonales par rapport à F et G.

Montrer que

$$s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{(F\oplus G)^\perp} .$$

Solution

Notons

$$H := F \oplus G \text{ et } K := H^\perp = F^\perp \cap G^\perp .$$

$$\begin{array}{rcl} \forall (x+y) \in F \oplus G, \quad s_F(s_G(x+y)) & = & s_F(-x+y) \\ & = & -x-y \\ & = & s_F(-x) + s_F(y) \\ & = & s_G(s_F(x+y)) . \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in K, \quad s_F({}_sG(x)) & = & s_F(-x) \\ & = & x \\ & = & -s_F(x) \\ & = & s_G(s_F(x)) . \end{array}$$

Les égalités ci-dessu prouvent le résultat.