Corrigé Des exercices VIII.3

VIII.3 . –Exercices

Exercice VIII.3.1 (Droite et plan stables d'une isométrie en dimension 3) Le but de ce problème est de prouver le théorème VIII.1.2. Soit donc E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3. Pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in E \times E$, on note $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ leur produit scalaire et $||\vec{x}|| := \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$ la norme euclidienne associée.

Dans toute la suite on fixe $f \in \mathcal{O}(E)$ une isométrie de E.

(Terminologie)

Pour $F \subset E$ un sous-espace de E, on dira que F est *f-stable;* ce qui signifie que F est stable sous (ou par f,) *i.e.* $f(F) \subset F$.

1) Étant donné un vecteur $\vec{u} \in E \setminus \{0\}$, établir le résultat dans les situations suivantes :

a) $\vec{u}$ et $f(\vec{u})$ sont liés ;

Solution

Puisque $\vec{u} \neq 0$, $\vec{u}$ et $f(\vec{u})$ sont liés si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$; [a] *ainsi $f(\vec{u}) \in \mathrm{Vect}\{\vec{u}\}$; ce qui assure que $f(\mathrm{Vect}\{\vec{u}\}) \subset \mathrm{Vect}\{\vec{u}\}$; i.e. $\mathrm{Vect}\{\vec{u}\}$, qui est une droite puisque $\vec{u} \neq 0$, est f-stable. On conclut alors graçe au point i de la proposition VIII.1.1.*

a. c'est-à-dire que $\vec{u}$ est un vecteur propre pour f et λ la valeur propre associée ; si bien que $\lambda = \pm 1$ (cf. la proposition VI.1.5 ;) mais quelque chose de même moins précis ici suffit.

b) $\vec{u}$ et $f(\vec{u})$ sont indépendants ; mais $\vec{u}$, $f(\vec{u})$ et $f^2(\vec{u})$ sont liés.

Solution

si $\vec{u}$ et $f(\vec{u})$ sont indépendant $\mathrm{Vect}\{\vec{u}, f(\vec{u})\}$ est un plan, auquel appartient $f^2(\vec{u})$ dès que $\vec{u}$, $f(\vec{u})$ et $f^2(\vec{u})$ sont liés. Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f^2(\vec{u}) = a\vec{u} + bf(\vec{u})$. Il s'ensuit que

$$\forall \vec{x} := \alpha\vec{u} + \beta f(\vec{u}) \in \mathrm{Vect}\{\vec{u}, f(\vec{u})\}, \quad f(\vec{x}) \begin{array}[t]{cl} = & f(\alpha\vec{u} + \beta f(\vec{u})) \\ = & \alpha f(\vec{u}) + \beta f^2(\vec{u}) \\ = & \alpha f(\vec{u}) + \beta(a\vec{u} + bf(\vec{u})) \\ = & a\beta\vec{u} + (\alpha + b\beta) f(\vec{u}) \ ; \end{array}$$

ce qui entraîne que

$$\forall \vec{x} \in \mathrm{Vect}\{\vec{u}, f(\vec{u})\}, \ f(\vec{x}) \in \mathrm{Vect}\{\vec{u}, f(\vec{u})\} \ .$$

On a donc montré que $\mathrm{Vect}\{\vec{u}, f(\vec{u})\}$ est un plan f-stable et l'on conclut encore grâce au point i de la proposition VIII.1.1.

2) Étant donné un vecteur $\vec{u} \in E \setminus \{0\}$, établir le résultat dans les situations suivantes :

a) $f^2(\vec{u}) - \vec{u} = 0$;

Solution

Il se peut qu'alors $f(\vec{u}) - \vec{u} = 0$; auquel cas le résultat découle du point a de la question 1 ; sinon il découle du point b de la question 1 .

on suppose, dans la suite de la question 2 que $f^2(\vec{u}) - \vec{u} \neq 0$;

b) $f^2(\vec{u}) - \vec{u}$ et $f^3(\vec{u}) - f(\vec{u})$ sont liés ;

Solution

Le vecteur $\vec{v} := f^2(\vec{u}) - \vec{u}$ *est alors non nul et*

$$f(\vec{v}) = f\left(f^2(\vec{u}) - \vec{u}\right) = f^3(\vec{u}) - f(\vec{u})$$

est lié à $\vec{v}$ *; si bien qu'on peut appliquer le point a de la question 1 à* $\vec{v}$.

c) $f^2(\vec{u}) - \vec{u}$ et $f^4(\vec{u}) - f^2(\vec{u})$ sont liés ;

Solution

Le vecteur $\vec{v} := f^2(\vec{u}) - \vec{u}$ *et par hypotèse lié à* $f^2(\vec{v}) = f^4(\vec{u}) - f^2(\vec{u})$. *Le cas où il serait déjà lié à* $f(\vec{v}) = f^3(\vec{u}) - f(\vec{u})$ *a déjà été envisagé au point b . Si* $\vec{v}$ *et* $f(\vec{v})$ *sont indépendants ; mais que cependant,* $\vec{v}$ *et* $f^2(\vec{v})$ *sont liés, la famille* $(\vec{v}, f(\vec{v}), f^2(\vec{v}))$ *est liée et on peut lui appliquer le point b de la question 1 .*

d) $f^3(\vec{u}) - f(\vec{u})$ et $f^4(\vec{u}) - f^2(\vec{u})$ sont liés.

Solution

Il suffit d'appliquer le point b à $f(\vec{u})$ *qui est non nul dès que* $\vec{u}$ *l'est puisque* f *est injective.*

On suppose donné, dans toutes la suite du problème un vecteur $\vec{u} \in E \setminus \{0\}$ **vérifiant les hypothèses suivantes :**

H$_1$) L'ensemble $\{\vec{u}, f(\vec{u}), f^2(\vec{u})\}$ **est une partie libre de** E.

H$_2$) Les éléments $f^2(\vec{u}) - \vec{u}$, $f^3(\vec{u}) - f(\vec{u})$ **et** $f^4(\vec{u}) - f^2(\vec{u})$ **sont deux à deux indépendants.**

Pour tout couple $(\vec{x}, \vec{y}) \in E \times E$, **on note :**

$$P_{\vec{x},\vec{y}} := \{\vec{z} \in E \, ; \, ||\vec{z} - \vec{x}|| = ||\vec{z} - \vec{y}||\}$$ **(cf. la proposition V.3.8 ,)**

le *plan médiateur* de $\vec{x}$ **et** $\vec{y}$.

3) (Plan médiateur)
Soit $(\vec{x}, \vec{y}) \in E \times E$.

a) (Le losange)
Montrer que

$$||\vec{x}|| = ||\vec{y}|| \Leftrightarrow \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} - \vec{y} \rangle = 0 \textit{ i.e. } \vec{x} + \vec{y} \perp \vec{x} - \vec{y} \, .$$

Solution

Voir la preuve du point i de la proposition V.3.8.

b) Montrer que pour $\vec{x} \neq \vec{y}$ et $||\vec{x}|| = ||\vec{y}||$ $P_{\vec{x},\vec{y}} = \vec{x} - \vec{y}^{\perp}$ est un plan qui contient en particulier $\vec{x} + \vec{y}$.

Solution

Voir la preuve du point ii de la proposition V.3.8.

Dans la suite on abrègera la notation : pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ **si** $f^k(\vec{u}) \neq f^\ell(\vec{u})$, **on notera**

$$P_{k,\ell} := P_{f^k(\vec{u}), f^\ell(\vec{u})} = \{\vec{v} \in E \, ; \, ||\vec{v} - f^k(\vec{u})|| = ||\vec{v} - f^\ell(\vec{u})||\} = f^k(\vec{u}) - f^\ell(\vec{u})^{\perp}.$$

4) (Image des plans médiateurs)
Montrer que pour tout $(k, \ell, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ pour peu que $P_{k,\ell}$ soit défini alors $P_{k+m,\ell+m}$ l'est aussi et l'on a

$$P_{k+m,\ell+m} = f^m\left(P_{k,\ell}\right) \, .$$

Solution

Si $f^k(\vec{u}) \neq f^\ell(\vec{u})$,

$$\forall m \in \mathbb{Z},\ f^{m+k}(\vec{u}) \neq f^{m+\ell}(\vec{u})\ ;$$

puisque f est içnjective et que , par conséquent, f^m l'est aussi. Notons que $\mathcal{O}(E)$ étant un groupe, f^m est une isométrie. Ceci a notamment pour conséquence que :

$$\begin{array}{lrcl}
\forall \vec{v} \in E, & \vec{v} & \in & f^m(P_{k,\ell}) \\
\Leftrightarrow & f^{-m}(\vec{v}) & \in & P_{k,\ell} \\
\Leftrightarrow & ||f^{-m}(\vec{v}) - f^k(\vec{u})|| & = & ||f^{-m}(\vec{v}) - f^\ell(\vec{u})|| \\
\Leftrightarrow & ||f^m\big(f^{-m}(\vec{v}) - f^k(\vec{u})\big)|| & = & ||f^m\big(f^{-m}(\vec{v}) - f^\ell(\vec{u})\big)|| \\
\Leftrightarrow & ||\vec{v} - f^{k+m}(\vec{u})|| & = & ||\vec{v} - f^{\ell+m}(\vec{u})|| \\
\Leftrightarrow & \vec{v} & \in & P_{k+m,\ell+m}\ .
\end{array}$$

5) (Les plans médiateurs)

Montrer que les plans $P_{0,2}$, $P_{2,4}$ et $P_{0,4}$ sont bien définis et deux à deux distincts.

Solution

*i) **(Les plans sont bien définis)***

En effet, l'hypothèse H_1 entraîne que $\vec{u} \neq f^2(\vec{u})$ si bien que $P_{0,2}$ est bien défini.
De même $f^2(\vec{u}) = f^4(\vec{u})$ entraîne, par injectivité de f, $f^2(\vec{u}) = \vec{u}$ toujours en contradiction avec l'hypothèse H_1 .
Enfin $\vec{u} = f^4(\vec{u})$ entraîne

$$f^4(\vec{u}) - f^2(\vec{u}) = \vec{u} - f^2(\vec{u})\ ;$$

ce qui contredit l'hypothèse H_2 .

*ii) **(deux à deux distincts)***

$P_{0,2} \neq P_{2,4}$

$$\begin{array}{lrcl}
 & P_{0,2} & = & P_{2,4} \\
\Rightarrow & P_{0,2}^\perp & = & P_{2,4}^\perp \\
\Rightarrow & \mathrm{Vect}\big\{f^2(\vec{u}) - \vec{u}\big\} & = & \mathrm{Vect}\big\{f^4(\vec{u}) - f^2(\vec{u})\big\}\ ;
\end{array}$$

ce qui entraîne que $f^2(\vec{u}) - \vec{u}$ et $f^4(\vec{u}) - f^2(\vec{u})$ sont liés et contredit donc l'hypothèse H_2 .

$P_{0,2} \neq P_{0,4}$

$$\begin{array}{lrcl}
 & P_{0,2} & = & P_{0,4} \\
\Rightarrow & P_{0,2}^\perp & = & P_{0,4}^\perp \\
\Rightarrow & \mathrm{Vect}\big\{f^2(\vec{u}) - \vec{u}\big\} & = & \mathrm{Vect}\big\{f^4(\vec{u}) - \vec{u}\big\}\ ;
\end{array}$$

ce qui entraîne que $f^2(\vec{u}) - \vec{u}$ et $f^4(\vec{u}) - \vec{u}$ sont liés et donc que $f^2(\vec{u}) - \vec{u}$ et $f^4(\vec{u}) - f^2(\vec{u}) = f^4(\vec{u}) - \vec{u} - (f^2(\vec{u}) - \vec{u})$ sont liés ; ce qui contredit encore l'hypothèse H_2 .

$P_{0,4} \neq P_{2,4}$ *se fait sur le même modèle que ci-dessus.*

6) (La droite D)

Montrer que

$$\begin{array}{rcl}
P_{0,2} \cap P_{2,4} & = & P_{0,2} \cap P_{0,4} \\
 & = & P_{2,4} \cap P_{0,4} \\
 & = & P_{0,2} \cap P_{2,4} \cap P_{0,4}
\end{array}$$

est une droite qu'on notera D dans la suite.

Solution

Notons $D := P_{0,2} \cap P_{2,4}$ qui est bien une droite, puisque (cf. 5,) $P_{0,2} \neq P_{2,4}$.
En outre (cf. V.3.8.ii,)

$$\begin{array}{lrcl}
\forall \vec{v} \in D, & \vec{v} \in P_{0,2} & \wedge & \vec{v} \in P_{2,4} \\
\Rightarrow & ||\vec{v} - \vec{u}|| = ||\vec{v} - f^2(\vec{u})|| & \wedge & ||\vec{v} - f^2(\vec{u})|| = ||\vec{v} - f^4(\vec{u})|| \\
\Rightarrow & ||\vec{v} - \vec{u}|| & = & ||\vec{v} - f^4(\vec{u})|| \\
\Rightarrow & \vec{v} & \in & P_{0,4} \\
\Rightarrow & D & \subset & P_{0,4} \\
\Rightarrow & D \subset P_{0,2} \cap P_{0,4} & \wedge & D \subset P_{2,4} \cap P_{0,4}
\end{array}$$

Ainsi

$$D \neq P_{0,2} \cap P_{0,4} \text{ (resp. } D \neq P_{2,4} \cap P_{0,4}\text{)}$$

entraîne

$$P_{0,2} = P_{0,4} \text{ (resp. } P_{2,4} = P_{0,4}\ ;\text{)}$$

ce qui contredit le résulta établi à la question 5 .

7) Montrer que :

$$P_{1,3} = \mathrm{Vect}\{f^2(\vec{u}), f(\vec{u}) + f^3(\vec{u})\}\ .$$

Solution

Remarquons d'abord que $P_{1,3}$ est bien défini. En effet $f(\vec{u}) = f^3(\vec{u})$ équivaut, par injectivité de f à $\vec{u} = f^2(\vec{u})$ ce qui contredit l'hypothèse H_1 .
Puisque f est une isométrie,

$$||f^2(\vec{u}) - f^3(\vec{u})|| = ||f\left(f(\vec{u}) - f^2(\vec{u})\right)|| = ||f^2(\vec{u}) - f(\vec{u})||\ ;$$

ce qui entraîne que

$$f^2(\vec{u}) \in P_{1,3}\ .$$

En outre (cf. le point i de la proposition V.3.8,)

$$f^3(\vec{u}) + f(\vec{u}) \in P_{1,3}\ .$$

Reste donc à montrer que $f^2(\vec{u})$ et $f(\vec{u}) + f^3(\vec{u})$ sont indépendants. Or s'il sont liés,

$$\begin{array}{lrcl} \exists (a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ (a,b) \neq (0,0)\ , & af^2(\vec{u}) + bf(\vec{u}) + ff^3(\vec{u}) & = & 0 \\ \Rightarrow & f\left(af(\vec{u}) + bu + bf^2(\vec{u})\right) & = & 0 \\ \Rightarrow & bu + af(\vec{u}) + bf^2(\vec{u}) & = & 0\ ; \end{array}$$

en utilisant ici encore l'injectivité de f. La dernière égalité établie ci-dessus contredisant l'hypothèse H_1 , $f^2(\vec{u})$ et $f(\vec{u}) + f^3(\vec{u})$ sont indépendants.

8) Montrer que :

$$P_{1,3} = P_{0,4}\ .$$

Solution

Puisque (cf. la question 5 et la question 7 ,) $P_{0,4}$ et $P_{1,3}$ sont des plans, il suffit de montrer une inclusion. Or :

i) $(f^2(\vec{u}) \in P_{0,4})$
En effet

$$||f^2(\vec{u}) - f^4(\vec{u})|| = ||f^2\left(\vec{u} - f^2(\vec{u})\right)|| = ||\vec{u} - f^2(\vec{u})||\ .$$

ii) $(f(\vec{u}) + f^3(\vec{u}) \in P_{0,4})$
Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$||f^{k+2}(\vec{u}) - f^{k+1}(\vec{u})|| = ||f\left(f^{k+1}(\vec{u}) - f^k(\vec{u})\right)|| = ||f^{k+1}(\vec{u})f^k(\vec{u})||\ .$$

Ainsi, dans le cas où $P_{k,k+2}$ est bien défini

$$f^{k+1}(\vec{u}) \in P_{k,k+2}\ .$$

Par conséquent :

$$f(\vec{u}) \in P_{0,2} \text{ et } f^3(\vec{u}) \in P_{2,4}\ ;$$

ce qui entraîne (cf. le point ii de la proposition V.3.8,)

$$f(\vec{u}) \perp f^2(\vec{u}) - \vec{u} \text{ et } f^3(\vec{u}) \perp f^4(\vec{u}) - f^2(\vec{u})\ .$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}\langle f(\vec u)+f^3(\vec u), f^4(\vec u)-\vec u\rangle &= \langle f(\vec u)+f^3(\vec u), f^4(\vec u)-f^2(\vec u)+f^2(\vec u)-\vec u\rangle\\ &= \langle f(\vec u), f^4(\vec u)-f^2(\vec u)\rangle + \langle f^3(\vec u), f^2(\vec u)-\vec u\rangle\\ &= \langle f(\vec u), f^4(\vec u)\rangle - \langle f(\vec u), f^2(\vec u)\rangle + \langle f^3(\vec u), f^2(\vec u)\rangle - \langle f^3(\vec u), \vec u\rangle\\ &= \langle \vec u, f^3(\vec u)\rangle - \langle \vec u, f(\vec u)\rangle + \langle f(\vec u), \vec u\rangle - \langle f^3(\vec u), \vec u\rangle\\ &= 0\,;\end{aligned}$$

ce qui assure que

$$f(\vec u)+f^3(\vec u) \in f^4(\vec u)-\vec u = P_{0,4}^{\perp}\,.$$

Puisque (cf. la question 7 ,) $P_{1,3} = \mathrm{Vect}\{f^2(\vec u), f(\vec u)+f^3(\vec u)\}$ *et*

$$f^2(\vec u) \in P_{0,4} \text{ et } f(\vec u)+f^3(\vec u) \in P_{0,4}$$

$$P_{1,3} \subset P_{0,4} \text{ et finalement } P_{1,3} = P_{0,4}$$

par égalité des dimensions.

9) (D **est stable**)
Montrer que la droite D définie à la question 6 , est f-stable.

Solution

Puisque (cf. la question 6 ,) $D \subset P_{0,4}$, *(cf. la question 4 ,)*

$$f(D) \subset f(P_{0,2}) = P_{1,3}\,.$$

Or par ailleurs (cf. la question 8 ,)

$$D \subset P_{0,4} = P_{1,3}\,;$$

ce qui entraîne

$$f(D) \subset f(P_{1,3}) = P_{2,4}\,.$$

Ainsi

$$f(D) \subset P_{1,3} \cap P_{2,4}\,;$$

ce qui entraîne (cf. la question 8 ,)

$$f(D) \subset P_{0,4} \cap P_{2,4}\,;$$

qui entraîne encore (cf. la question 6 ,)

$$f(D) \subset D\,.$$

Exercice VIII.3.2 (Structure des isométries) Prouver le théorème VIII.1.3.

Solution

i) ***(Existence)***
Considérons un couple (D,P) $D\perp P$, *formé d'une droite et d'un plan* f*-stabledont l'existence est assurée par le théorème VIII.1.2. Les restrictions* $f_{|D}$ *et* $f_{|P}$ *de* f *à* D *et* P *sont des isométries. Alors* $f_{|D} = \pm\mathrm{Id}_D$ *; ce qui peut se déduire notamment du fait que dès que* D *est* f*-stable, tout vecteur non nul de* D *est propre pour* f, *alors associé à la valeur propre* ± 1 *(cf. la proposition VI.1.5.)*
Il résulte alors de la proposition VII.2.2 que

$$f_{|P} \in \mathcal{SO}(P) \text{ ou } f_{|P} \in \mathcal{O}_-(P)\,.$$

$f_{|P} \in \mathcal{SO}(P)$ *comme* $f_{|D} = \pm\mathrm{Id}_D$, *on a établi le résultat souhaité.*
$f_{|P} \in \mathcal{O}_-(P)$ *Il existe alors, d'après VII.2*

$$D^+ \subset P \text{ et } D^- \subset P \text{ telles que } D^+\perp D^-\,,\ f_{|D^+} = \mathrm{Id}_{D^+} \text{ et } f_{|D^-} = -\mathrm{Id}_{D^-}\,.$$

$f_{|D} = \mathrm{Id}_D$ *Alors pour* $Q := \mathrm{Vect}\{D, D^+\}$ *est un plan* f*-stableet* $f_{|Q} = \mathrm{Id}_Q$. *De plus* $Q\perp D^-$ *; si bien que le couple* (D^-, Q) *répond à la question.*
$f_{|D} = -\mathrm{Id}_D$ *Alors* $Q := \mathrm{Vect}\{D, D^-\}$ *est un plan* f*-stable tel que* $f_{|Q} = -\mathrm{Id}_Q \in \mathcal{SO}(Q)$ *; si bien que le couple* (D^+, Q) *répond à la question.*

ii) ***(Unicité)***
Soit (D,P) un couple formé d'une droite et d'un plan f-stables avec

$$D\perp P\ ,\ f_{|D}\ =\ \pm\mathrm{Id}_D \text{ et } f_{|P}\ \in\ \mathcal{SO}(P)\ .$$

Soit F une droite f-stable distincte de D. Alors pour des raisons déjà exposées, $f_{|F}\ =\ \pm\mathrm{Id}_F$. Notons $Q\ :=\ \mathrm{Vect}\big\{D,F\big\}$ qui et un plan f-stable. Par ailleurs comme $D\ \not\subset\ P$, $Q\ \neq\ P$ et $G\ :=\ P\cap Q$ est donc une droite. Comme P et Q sont f-stables, G l'est aussi. Puisque $G\ \subset\ P$, c'est donc une droite $f_{|P}$-stable.
Puisque $f_{|P}\ \in\ \mathcal{SO}(P)$, il découle de la proposition VII.2.1, que

$$f_{|P}\ =\ \pm\mathrm{Id}_P\ .$$

$f_{|F}\ =\ \mathrm{Id}_F$ et $f_{|D}\ =\ \mathrm{Id}_D$ *Alors $f_{|Q}\ =\ \mathrm{Id}_Q$; d'où $f_{|G}\ =\ \mathrm{Id}_G$; ce qui entraîne $f_{|P}\ =\ \mathrm{Id}_P$; et finalement*

$$f\ =\ \mathrm{Id}_E\ .$$

$f_{|F}\ =\ -\mathrm{Id}_F$ et $f_{|D}\ =\ -\mathrm{Id}_D$ *Alors $f_{|Q}\ =\ -\mathrm{Id}_Q$; d'où $f_{|G}\ =\ -\mathrm{Id}_G$; ce qui entraîne $f_{|P}\ =\ -\mathrm{Id}_P$; et finalement*

$$f\ =\ -\mathrm{Id}_E\ .$$

$f_{|F}\ =\ \varepsilon\mathrm{Id}_F$ et $f_{|D}\ =\ -\varepsilon\mathrm{Id}_D$ *avec $\varepsilon^2\ =\ 1$. Alors :*

$$\begin{array}{lrcl}
\forall(x,y)\in D\times F, & \langle x,y\rangle & = & \langle f(x),f(y)\rangle \\
 & & = & \langle -\varepsilon x,\varepsilon y\rangle \\
 & & = & -\varepsilon^2\langle x,y\rangle \\
\Rightarrow & \langle x,y\rangle & = & 0 \\
\Rightarrow & D & \perp & F \\
\Rightarrow & F & \subset & P \\
\Rightarrow & F & = & G\ .
\end{array}$$

$\varepsilon\ =\ 1$ *entraîne $f_{|F}\ =\ \mathrm{Id}_F$ entraîne $f_{|P}\ =\ \mathrm{Id}_P$. Alors toute droite $H\ \subset\ P$ est f-stable et $f_{|H}\ =\ \mathrm{Id}_H$. Le plan $R\ :=\ H^\perp$ est alors f-stable. On a alors $D\ \subset\ R$. En notants $K\ :=\ R\ \cap\ P$, on a $R\ =\ \mathrm{Vect}\big\{D,K\big\}$ Comme $f_{|K}\ =\ \mathrm{Id}_K$ et $f_{|D}\ =\ -\mathrm{Id}_D$,*

$$f_{|R}\ \in\ \mathcal{O}_-(R)\ ;$$

ce qui entraîne que la décomposition de l'espace $H\oplus R$ ne correspondt pas aux hypothèses du théorème et que la seule qui y réponde est

$$E\ =\ D\oplus\ P\ .$$

$\varepsilon\ =\ -1$ *L'argument est exactement le même que ci-dessus en échangeant les rôles de D et K.*

Exercice VIII.3.3 (Conjugaison) Faire la preuve de la proposition VIII.1.5.

Solution

On remarque que cet énoncé est l'exact analogue en dimension 3 de la proposition VII.2.4 ; mais la preuve n'en est pas forcément aussi immédiate ; en cause le fait que les éléments de $\mathcal{O}_-(E)$ ne sont pas caractérisés aussi facilement en dimension 3 qu'en dimension 2 (cf. la remarque VIII.1.8.)
Soit donc $E\ =\ D\ \oplus\ P$ une décomposition de l'espace pour f comme en VIII.1.3.1. Alors, puisque g est une isométrie et donc en particulier une application linéaire injective, $g(D)$ (resp. $g(P)$,) est une droite (resp. un plan.) Puisque g est une isométrie

$$D\perp P\ \Rightarrow\ g(D)\perp g(P)\ ;$$

si bien que $E\ =\ g(D)\ \oplus\ g(P)$.
Soit $\varepsilon\ \in\ \{-1,1\}$ tel que $f_{|D}\ =\ \varepsilon\mathrm{Id}_D$. Il s'ensuit que :

$$\begin{array}{lrcl}
\forall x\in g(D), & g^{-1}(x) & \in & D \\
\Rightarrow & f[g^{-1}(x)] & = & \varepsilon g^{-1}(x) \\
\Rightarrow & g\circ f\circ g^{-1}(x) & = & \varepsilon x \\
\Rightarrow & g\circ f\circ g^{-1}{}_{|g(D)} & = & \varepsilon\mathrm{Id}_{g(D)}\ .
\end{array}\qquad\text{VIII.3.3.1}$$

Par ailleurs (cf. le théorème VIII.1.3,) $f_{|P}\ \in\ \mathcal{SO}(P)$; si bien qu'il existe (cf. le théorème VII.3.1,) $(\vec{u},\vec{v})\ \in\ P\times P$ une base orthonormée de P et $(a,b)\ \in\ \mathcal{S}_1$ tels que

$$f(\vec{u})\ =\ a\vec{u}+b\vec{v} \text{ et } f(\vec{v})\ =\ -b\vec{u}+a\vec{v}\ .$$

Puisque g est une isométrie, $\big(g(\vec{u}), g(\vec{v})\big)$ est une base orthonormée de $g(P)$. De plus :

$$\begin{array}{rcl} g\circ f\circ g^{-1}\big(g(\vec{u})\big) & = & g\big(f(\vec{u})\big) \\ & = & g(a\vec{u}+b\vec{v}) \\ & = & ag(\vec{u})+bg(\vec{v})\ ; \\ \text{et } g\circ f\circ g^{-1}\big(g(\vec{v})\big) & = & g\big(f(\vec{v})\big) \\ & = & g(-b\vec{u}+a\vec{v}) \\ & = & -bg(\vec{u})+ag(\vec{v})\ . \end{array} \qquad \textit{VIII.3.3.2}$$

Les propriétés VIII.3.3.1 et VIII.3.3.2 assurent alors le résultat.

Exercice VIII.3.4 (Structure de $\mathcal{O}_-(E)$) Faire la preuve de la proposition VIII.1.7.

Solution

Soit $E = D \oplus P$ une décomposition de l'espace E pour f comme en VIII.1.3.1. puisque $f \in \mathcal{O}_-(E)$, $f_{|D} = -\mathrm{Id}_D$. Définissons alors :

$$\begin{array}{lccc} s \textit{ par :} & s_{|D} = -\mathrm{Id}_D & \wedge & s_{|P} = \mathrm{Id}_P \\ \text{et } r \textit{ par :} & r_{|D} = \mathrm{Id}_D & \wedge & r_{|P} = f_{|P}\ . \end{array}$$

Alors r (resp. s,) est une rotation (resp. une réflexion,) et l'on a de manière immédiate

$$f = r\circ s = s\circ r\ .$$

Exercice VIII.3.5 (Point fixe d'une composée) Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3. On notera $||\cdot||$ la norme euclidienne associée au produit scalaire.

Soient $(f,g) \in \mathcal{SO}(E)\times\mathcal{SO}(E)$ un couple de rotation et $\vec{u}$ (resp. $\vec{v}$,) un vecteur directeur unitaire de l'axe de f (resp. g.)

1) (**$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont liés**)
Montrer que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont liés, il existe

$$\vec{w} \in E \text{ tel que } f\circ g(\vec{w}) = \vec{w}\ .$$

Montrer qu'alors

$$f\circ g \in \mathcal{SO}(E)\ .$$

Solution

Alors quitte à changer $\vec{v}$ en $-\vec{v}$, on peut même supposer que $\vec{u} = \vec{v}$. On a alors

$$f\circ g(\vec{v}) = f(\vec{v}) = f(\vec{u}) = \vec{u}\ .$$

Il est tout aussi immédiat de constater que

$$f\circ g_{|\vec{u}^\perp} = f_{|\vec{u}^\perp}\circ g_{|\vec{u}^\perp} \in \mathcal{SO}(\vec{u}^\perp)\ .$$

Dans la suite on suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont indépendants.

2) Montrer que pour $\vec{w} \in E$,

$$f\circ g(\vec{w}) = \vec{w} \Rightarrow \vec{w} \in P_{\vec{v},f(\vec{v})} \cap P_{\vec{u},\, g^{-1}(\vec{u})}\ .$$

Solution

S'il existe $\vec{w}$ tel que $f\circ g(\vec{w}) = \vec{w}$, alors pour tout $\vec{z} \in E$

$$||\vec{z}-\vec{w}|| = ||f\circ g(\vec{z}) - f\circ g(\vec{w})|| = ||f\circ g(\vec{z}) - \vec{w}||\ .$$

En particulier

$$||\vec{v}-\vec{w}|| = ||f\circ g(\vec{v}) - \vec{w}|| = ||f(\vec{v}) - \vec{w}||\ ;$$

c'est-à-dire que, si l'on note $P_{\vec{v},f(\vec{v})}$ le plan médiateur (cf. V.3.8.ii,) de $\vec{v}$ et $f(\vec{v})$

$$\vec{w} \in P_{\vec{v},f(\vec{v})} .$$

De même

$$||\vec{w}-\vec{u}|| = ||f^{-1}(\vec{w})-f^{-1}(\vec{u})|| = ||f^{-1}(\vec{w})-\vec{u}|| = ||g^{-1}[f^{-1}(\vec{w})]-g^{-1}(\vec{u})|| = ||\vec{w}-g^{-1}(\vec{u})|| ;$$

si bien que

$$\vec{w} \in P_{\vec{u},g^{-1}(\vec{u})} .$$

Il en résulte finalement que

$$\vec{w} \in D := P_{\vec{v},f(\vec{v})} \cap P_{\vec{u},g^{-1}(\vec{u})} .$$

On laisse le soin au lecteur de montrer que dans les cas où D ne srait pas effectivement une droite, la question de trouver un vecteur fixe pour $f \circ g$ est en fait bien plus élémentaire.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont indépendants, $\vec{u}^\perp \neq \vec{v}^\perp$ et $\vec{u}^\perp \cap \vec{v}^\perp$ est une droite. Soit

$$\vec{r} \in \vec{u}^\perp \cap \vec{v}^\perp , ||\vec{r}|| = 1 . \qquad \textbf{VIII.3.5.1}$$

Il s'ensuit que $\mathrm{Vect}\{\vec{u},\vec{r}\}$ et $\mathrm{Vect}\{\vec{v},\vec{r}\}$ sont des plans. En particulier $\mathrm{Vect}\{\vec{u},\vec{r}\}^\perp$ est une droite et l'on choisit :

$$\vec{s} \in \mathrm{Vect}\{\vec{u},\vec{r}\}^\perp , ||\vec{s}|| = 1^9 . \qquad \textbf{VIII.3.5.2}$$

Il en résulte, par constructions que :

$$(\vec{u},\vec{r},\vec{s}) \ \textbf{est une base orthonormée} . \qquad \textbf{VIII.3.5.3}$$

Notons :

$$\alpha := \langle\vec{v},\vec{u}\rangle \text{ et } \beta := \langle\vec{v},\vec{s}\rangle ; \ \textbf{si bien que } \vec{v} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{s} \text{ et } \alpha^2+\beta^2 = 1 . \qquad \textbf{VIII.3.5.4}$$

Définissons encore :

$$\vec{t} := -\beta\vec{u} + \alpha\vec{s} . \qquad \textbf{VIII.3.5.5}$$

Il en résulte que :

$$\begin{array}{lrcl} & \vec{t} & \in & \vec{r}^\perp = \mathrm{Vect}\{\vec{u},\vec{v}\} = \mathrm{Vect}\{\vec{u},\vec{s}\} \\ \text{et} & \langle\vec{v},\vec{t}\rangle & = & \langle\alpha\vec{u}+\beta\vec{s},-\beta\vec{u}+\alpha\vec{s}\rangle \\ & & = & -\alpha\beta\langle\vec{u},\vec{u}\rangle+\alpha\beta\langle\vec{s},\vec{s}\rangle+(\alpha^2-\beta^2)\langle\vec{u},\vec{s}\rangle \\ & & = & 0 \\ \textbf{de plus} & ||\vec{t}|| & = & \langle-\beta\vec{u}+\alpha\vec{s},-\beta\vec{u}+\alpha\vec{s}\rangle \\ & & = & \alpha^2+\beta^2 \\ & & = & 1 \\ \textbf{si bien que} & (\vec{v},\vec{r},\vec{t}) & & \textbf{est une base orthonormée.} \end{array} \qquad \textbf{VIII.3.5.6}$$

Il s'ensuit qu'il existe :

$$(a,b) \in \mathcal{S}_1 \ \textbf{tel que} \ M_{(\vec{u},\vec{r},\vec{s})}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \qquad \textbf{VIII.3.5.7}$$

et

$$(c,d) \in \mathcal{S}_1 \ \textbf{tel que} \ M_{(\vec{v},\vec{r},\vec{t})}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -d \\ 0 & d & c \end{pmatrix} . \qquad \textbf{VIII.3.5.8}$$

Si $\vec{w} \in E$ vérifie $f \circ g(\vec{w}) = \vec{w}$, en particulier on a nécessairement :

$$g(\vec{w}) = f^{-1}(\vec{w}) . \qquad \textbf{VIII.3.5.9}$$

3) Calculer

$$g(\vec{u}) \text{ et } f^{-1}(\vec{v}) .$$

9. '1 noter ici qu'il y a deux façons de choisir $\vec{s}$ mais que ce choix s'avère indifférent pour la suite; si ce n'est que changer $\vec{s}$ en son opposé changerait les paramètres (a,b) définis VIII.3.5.7

Solution

$$\begin{array}{rcl}
\vec{u} & = & \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{v} + \langle \vec{u}, \vec{t} \rangle \vec{t} \\
& = & \alpha \vec{v} - \beta \vec{t} \\
g(\vec{u}) & = & g(\alpha \vec{v} - \beta \vec{t}) \\
& = & \alpha \vec{v} - \beta (c\vec{t} - d\vec{r}) \\
& = & \alpha(\alpha \vec{u} + \beta \vec{s}) - \beta c \vec{t} + \beta d \vec{r} \\
& = & (\alpha^2 + c\beta^2)\vec{u} + (1-c)\alpha\beta\vec{s} + \beta d \vec{r} \\
f^{-1}(v) & = & \inf f(\alpha \vec{u} + \beta \vec{s}) \\
& = & \alpha \vec{u} + \beta(b\vec{r} + a\vec{s}) \\
& = & \alpha \vec{u} + \beta a \vec{s} + \beta b \vec{r} \\
g(\vec{r}) & = & c\vec{r} + d\vec{t} \\
& = & c\vec{r} + d(\alpha \vec{s} - \beta \vec{u}) \\
& = & -\beta d \vec{u} + \alpha d \vec{s} + c \vec{r} \\
f^{-1}(\vec{r}) & = & -b\vec{s} + a\vec{r} \ .
\end{array}$$

1

4) Montrer que si $\vec{w} \ = \ f \circ g(\vec{w})$,

$$\langle g(\vec{w}), \vec{r} \rangle \ = \ -\langle \vec{w}, \vec{r} \rangle \ = \ \langle f^{-1}(\vec{w}), \vec{r} \rangle \ .$$

Solution

Puisque $\vec{u}$ est un vecteur directeur de l'axe de f donc également de celui de f^{-1}, $\vec{u} \ \in \ P_{\vec{w}, f^{-1}(\vec{w})}$. De la même manière $\vec{v} \ \in \ P_{\vec{w}, g(\vec{w}}$. Si donc $g(\vec{w}) \ = \ f^{-1}(\vec{w})$, $P_{\vec{w}, g(\vec{w})} \ = \ P_{\vec{w}, f^{-1}(\vec{w})}$. Or $(\vec{v}, \vec{u})$ est un couple de vecteurs indépendants appartenant à ce plan si bien que :

$$P_{\vec{w}, g(\vec{w})} \ = \ P_{\vec{w}, f^{-1}(\vec{w})} \ = \ \mathrm{Vect}\big\{\vec{u}, \vec{v}\big\} \ .$$

Puisque

$$||g(\vec{w})|| \ = \ ||\vec{w}|| \ = \ ||f^{-1}(\vec{w})||,$$

$$\vec{w} + g(\vec{w}) \ \in \ P_{\vec{w}, g(\vec{w})} \ = \ \mathrm{Vect}\big\{\vec{u}, \vec{v}\big\} \text{ et } \vec{w} + f^{-1}(\vec{w}) \ \in \ P_{\vec{w}, f^{-1}(\vec{w})} \ = \ \mathrm{Vect}\big\{\vec{u}, \vec{v}\big\} \ .$$

Or

$$\mathrm{Vect}\big\{\vec{u}, \vec{v}\big\} \ = \ \vec{r}^{\perp} \ ;$$

sib bien que

$$\langle \vec{w} + g(\vec{w}), \vec{r} \rangle \ = \ 0 \text{ et } \langle f^{-1}(\vec{w}) + \vec{w}, \vec{r} \rangle \ = \ 0 \ .$$

Remarquons que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{r})$ est une famile libre de E et donc une base de E. Prenons garde qu'elle n'est pas orthonormée. Notons alors : $\vec{w} \ := \ x\vec{u} \ + \ y\vec{v} \ + \ z\vec{r}$.

5) Calculer $g(\vec{w})$.

Solution

$$\begin{array}{rcl}
g(\vec{w}) & = & g(x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{r}) \\
& = & xg(\vec{u}) + y(\alpha\vec{u} + \beta\vec{s}) + zg(\vec{r}) \\
& = & x\left((\alpha^2 + c\beta^2)\vec{u} + (1-c)\alpha\beta\vec{s} + \beta d\vec{r}\right) + y(\alpha\vec{u} + \beta\vec{s}) + z\left(-\beta d\vec{u} + \alpha d\vec{s} + c\vec{r}\right) \\
& = & \left(x(\alpha^2 + c\beta^2) + y\alpha - z\beta d\right)\vec{u} + (x\beta d + zc)\,\vec{r} + (x(1-c)\alpha\beta + y\beta + z\alpha d)\,\vec{s} \ ;
\end{array}$$

1

6) Calculer $f^{-1}(\vec{w})$.

Solution

$$\begin{array}{rcl}
f^{-1}(\vec{w}) & = & f^{-1}(x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{r}) \\
& = & x\vec{u} + yf^{-1}(\vec{v}) + zf^{-1}(\vec{r}) \\
& = & x\vec{u} + y\left(\alpha\vec{u} + \beta b\vec{r} + \beta a\vec{s}\right) + z\left(-b\vec{s} + a\vec{r}\right) \\
& = & (x + y\alpha)\,\vec{u} + (y\beta b + za)\,\vec{r} + (y\beta a - zb)\,\vec{s} \ .
\end{array}$$

1

7) Montrer que pour tout $\vec{w} \ = \ x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{r} \ \in \ E$, $g(\vec{w}) \ = \ f^{-1}(\vec{w})$ entraîne :

$$\begin{Bmatrix} (1+c)z + \beta dx & = & 0 \\ (1+a)z + \beta by & = & 0 \end{Bmatrix} \ .$$ 1

Solution

C'est une conséquence de la question 4 , question 5,question 1 et question 6,question 1, en gardant à l'esprit que $\vec{r}^{\perp} = \mathrm{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

8) Montrer que sous les hypothèses 7.1, on a :

$$(1+c)(1+a)\big(g(\vec{w}) - f^{-1}(\vec{w})\big) \;=\; 0\,.$$

Solution

En utilisant les formules déjà établies (cf. 5.1 et 6.1,) il vient :

$$\begin{aligned}
g(\vec{w}) - \inf f(\vec{w}) &= g(x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{r}) - f^{-1}(x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{r}) \\
&= xg(\vec{u}) + y(\alpha\vec{u} + \beta\vec{s}) + zg(\vec{r}) - x\vec{u} - yf^{-1}(\vec{v}) - zf^{-1}(\vec{r}) \\
&= x\left((\alpha^2 + c\beta^2)\vec{u} + (1-c)\alpha\beta\vec{s} + \beta d\vec{r}\right) + y(\alpha\vec{u} + \beta\vec{s}) + z\,(-\beta d\vec{\imath} \\
-x\vec{u} - y\,(\alpha\vec{u} + \beta b\vec{r} + \beta a\vec{s}) - z\,(-b\vec{s} + a\vec{r}) & \\
&= \big(x(\alpha^2 + c\beta^2) + y\alpha - z\beta d - x - y\alpha\big)\,\vec{u} \\
&\quad + (x(1-c)\alpha\beta + y\beta + z\alpha d - y\beta a + zb)\,\vec{s} \\
&\quad + (x\beta d + zc - y\beta b - az)\,\vec{r} \\
&= \big(x(\alpha^2 + c\beta^2 - \alpha^2 - \beta^2) - z\beta d\big)\,\vec{u} \\
&\quad + (x(1-c)\alpha\beta + y\beta(1-a) + z(\alpha d + b))\,\vec{s} \\
&= \big(x\beta^2(c-1) - z\beta d\big)\,\vec{u} + (x(1-c)\alpha\beta + y\beta(1-a) + z(\alpha d + b)
\end{aligned} \qquad (1)$$

d'où il vient :

$$\begin{aligned}
(1+c)\big(g(\vec{w}) - f^{-1}(\vec{w})\big) &= (1+c)\big(x\beta^2(c-1) - z\beta d\big)\,\vec{u} + (1+c)\,(x(1-c)\alpha\beta + y\beta(1-a) + z(\alpha d + b))\,\vec{s} \\
&= \big(x\beta^2(c^2-1) + x\beta^2 d^2\big)\,\vec{u} + \big(x(1-c^2)\alpha\beta + y\beta(1+c)(1-a) - x\beta d(\alpha d + b)\big)\,\vec{s} \\
&= \big(x\beta^2(c^2 + d^2 - 1)\big)\,\vec{u} + \big(x(1-c^2-d^2)\alpha\beta + y\beta(1+c)(1-a) - x\beta db\big)\,\vec{s} \\
&= \beta(y(1+c)(1-a) - xdb)\vec{s}\,.
\end{aligned} \qquad (2)$$

Il résulte alors de 7.1 :

$$\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix} (1+c)z + \beta dx &= 0 \\ (1+a)z + \beta by &= 0 \end{Bmatrix} \\
\Rightarrow\; &\begin{Bmatrix} (1+a)(1+c)z + (1+a)\beta dx &= 0 \\ (1+c)(1+a)z + (1+c)\beta by &= 0 \end{Bmatrix} \\
\Rightarrow\; &(1+c)\beta by \;=\; (1+a)\beta dx
\end{aligned} \qquad (3)$$

Il résulte finalement de 2 et 3 :

$$\begin{aligned}
(1+a)(1+c)\big(g(\vec{w}) - f^{-1}(\vec{w})\big) &= (1+a)\beta(y(1+c)(1-a) - xdb)\vec{s} \\
&= \beta(1+c)(1-a^2)y - \beta(1+a)xdb \\
&= \beta(1+c)y(1-a^2-b^2) \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

9) Montrer finalement que :

$$\vec{w} \;:=\; -d(1-a)\vec{u} \;-b(1-c)\vec{v} \;+\; \beta(1-a)(1-c)\vec{r} \;\;\text{vérifie}\;\; f \circ g(\vec{w}) \;=\; \vec{w}\,.$$

Solution

i) (**Le cas générique :** $1+a \neq 0, 1+c \neq 0$,)
Alors la restriction de f à la droite définie par les équations 7.1 est l'identité 8.

ii) $(1+a \;=\; 0!\; 1+c \;\neq\; 0,)$

Alors $b = \pm 1$ et puisque $\beta \neq 0$, $y = 0$. Il vient alors (cf. 8.2,)

$$g(x\vec{u} + z\vec{r}) - f^{-1}(x\vec{u} + z\vec{r}) = -\beta x d b)\vec{s} = 0\,;$$

en effet

$$1 + a = 0 \Rightarrow b = 0\,.$$

iii) $(1 + a = 1 + c = 0)$
Alors (cf. 7.1,) $x = y = 0$, et de plus $b = d = 0$. Il est presque immédiat de constater que dans ce cas

$$f \circ g(\vec{r}) = \vec{r}\,.$$

iv) En posant $z := \beta(1-a)(1-c)$, les équations 7.1 deviennent :

$$\begin{aligned} & \left\{\begin{array}{lcl} (1+c)\beta(1-a)(1-c) + \beta d x & = & 0 \\ (1+a)\beta(1-a)(1-c) + \beta b y & = & 0 \end{array}\right\} \\ \Leftrightarrow \quad & \left\{\begin{array}{lcl} \beta\left((1-a)(1-c^2) + dx\right) & = & 0 \\ \beta\left((1-c)(1-a^2) + by\right) & = & 0 \end{array}\right\} \\ \Leftrightarrow \quad & \left\{\begin{array}{lcl} \beta\left((1-a)d^2 + dx\right) & = & 0 \\ \beta\left((1-c)b^2 + by\right) & = & 0 \end{array}\right\} \end{aligned}$$

On pourra donc poser

$$x = -d(1-a) \text{ et } y = -b(1-c)\,.$$

Exercice VIII.3.6 (Le groupe $\mathcal{SO}(E)$) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3.
Soit $(f, g) \in \mathcal{SO}(E) \times \mathcal{SO}(E)$ un couple de rotations.

1) Montrer que $f^{-1} \in \mathcal{SO}(E)$.

Solution

Soit $E = D \oplus P$ une décomposition de l'espace E pour f comme en VIII.1.3.1. alors $f_{|P} \in \mathcal{SO}(P)$; si bien qu'il existe, puisque $\mathcal{SO}(P)$ est un groupe, $f'_P \in \mathcal{SO}(P)$ tel que

$$f_{|P} \circ f'_P = f'_P \circ f_{|P} = \mathrm{Id}_P\,.$$

Définissons alors f' par

$$f'_{|P} = f'_P \text{ et } f'_{|D} = \mathrm{Id}_D\,.$$

Il est clair qu'alors

$$f' \in \mathcal{SO}(E) \text{ et } f' \circ f = f \circ f' = \mathrm{Id}_E\,.$$

2) Montrer que si f et g on même axe (cf. le point ii de la définition VIII.1.4,) $f \circ g \in \mathcal{SO}(E)$.

Solution

Notons D l'axe commun de f et g. Alors le plan $P := D^{\perp}$ est à la fois f-stable et g-stable. D'après le théorème VIII.1.3

$$f_{|P} \in \mathcal{SO}(P) \text{ et } g_{|P} \in \mathcal{SO}(P)\,.$$

Alors, puisque $\mathcal{SO}(P)$ est un groupe

$$f \circ g_{|P} = f_{|P} \circ g_{|P} \in \mathcal{SO}(P)\,.$$

Comme, par ailleurs,

$$f \circ g_{|D} = f_{|D} \circ g_{|D} = \mathrm{Id}_D,$$

on a bien

$$f \circ g \in \mathcal{SO}(E)\,.$$

On suppose désormais que les axes de f et g sont distincts ; et on note $\vec{u}$ (resp. $\vec{v}$,) un vecteur unitaire (*i.e.* de norme 1,) de l'axe de f (resp. g.) Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants et $\mathrm{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est un plan.

On rappelle (cf. la question 2 de l'exercice VIII.3.5 ,) que pour $\vec{w} \in E$,

$$f \circ g(\vec{w}) = \vec{w} \Rightarrow \vec{w} \in D := P_{\vec{v}, f(\vec{v})} \cap P_{\vec{u},\, g^{-1}(\vec{u})} .$$

3) Montrer que si D est une droite, $f \circ g$ est une rotation.

Solution

On a prouvé à la question 9 de l'exercice VIII.3.5 l'existence d'un vecteur $\vec{w}$ tel que

$$f \circ g(\vec{w}) = \vec{w} .$$

Alors nécessairement $\vec{w} \in D$; ce qui entraîne $f \circ g_{|D} = \mathrm{Id}_D$.
On sait qu'alors $P := D^{\perp}$ est $f \circ g$-stable.
Or si $f \circ g_{|P} \in \mathcal{O}_-(P)$, $f \circ g_{|P}$ est une réflexion ; ce qui entraîne qu'il existe $\vec{z} \in P$ tel que $f \circ g(\vec{z}) = \vec{z}$. Or cette dernière égalité entraîne $\vec{z} \in D$; ce qui contredit le fait que $D \not\subset P$.
Ainsi $f \circ g_{|P} \in \mathcal{SO}(P)$; ce qui prouve finalement que $f \circ g \in \mathcal{SO}(E)$.

4) Montrer que si D est un plan alors

$$P_{\vec{v}, f(\vec{v})} = P_{\vec{u},\, g^{-1}(\vec{u})} = \mathrm{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\} .$$

Solution

Remarquons que

$$||\vec{u} - \vec{v}|| = ||f(\vec{u} - \vec{v})|| = ||\vec{u} - f(\vec{v})|| \textit{ i.e. } \vec{u} \in P_{\vec{v}, f(\vec{v})} .$$

De même

$$||\vec{v} - \vec{u}|| = ||g^{-1}(\vec{u} - \vec{v})|| = ||g^{-1}(\vec{u}) - \vec{v}|| \textit{ i.e. } \vec{v} \in P_{\vec{u}, g^{-1}(\vec{u})} .$$

Si donc D n'est pas une droite mais un plan on a

$$P_{\vec{v}, f(\vec{v})} \subset P_{\vec{u}, g^{-1}(\vec{u})} \text{ ou } P_{\vec{u}, g^{-1}(\vec{u})} \subset P_{\vec{v}, f(\vec{v})} . \tag{1}$$

Ceci peut en particulier se produire si $P_{\vec{v}, f(\vec{v})}$ (resp. $P_{\vec{u}, g^{-1}(\vec{u})}$,) n'est pas un plan mais l'espace E tout entier. Cela signifie que $f(\vec{v}) = \vec{v}$, (resp. $\vec{u} = g^{-1}(\vec{u})$,) ce qui entraîne $f = \mathrm{Id}_E$, (resp. $g = \mathrm{Id}_E$;) et dans ce cas, $f \circ g$ est bien évidemment une rotation.
Sinon les inclusions de 1 sont des égalités et l'on a

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \in P_{\vec{v}, f(\vec{v})} = P_{\vec{u}, g^{-1}(\vec{u})} .$$

Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants on a :

$$\mathrm{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\} = P_{\vec{v}, f(\vec{v})} = P_{\vec{u}, g^{-1}(\vec{u})} .$$

5) Discuter alors la situation en utilisant la formule

$$\vec{w} = -d(1-a)\vec{u} - b(1-c)\vec{v} + \beta(1-a)(1-c)\vec{r}$$

établie à la question 9 de l'exercice VIII.3.5 .

Solution

Si D n'est pas une droite, il résulte de la question 2 de l'exercice VIII.3.5 , et de la question 4 que $\vec{w} \in \mathrm{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$.
Cela signifie, grâce à la formule établie à la question 9 de l'exercice VIII.3.5 , que

$$\beta(1-a)(1-c) = 0 .$$

Or :
- $\beta = 0$ *entraîne que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont liés ; ce qui contredit les hypothèses.*
- $1 - a = 0$ *entraîne $f = \mathrm{Id}_E$; auquel cas $f \circ g$ est une rotation dès que g en est une.*
- $1 - c = 0$ *entraîne $g = \mathrm{Id}_E$; auquel cas $f \circ g$ est une rotation dès que f en est une.*

6) Conclure.

Solution

— *Puisque bien évidemment* $\mathrm{Id}_E \in \mathcal{SO}(E), \mathcal{SO}(E) \neq `\emptyset$.
— *Par ailleurs, on a montré à la question 1 , que*

$$\forall f \in \mathcal{SO}(E),\ f^{-1} \in \mathcal{SO}(E)\ .$$

— *Enfin il résulte des questions 2 à 4 que*

$$\forall (f,g) \in \mathcal{SO}(E) \times \mathcal{SO}(E),\ f \circ g \in \mathcal{SO}(E)\ .$$

Les trois points ci-dessus assurent que $\mathcal{SO}(E)$ *est un sous-groupe de* $\mathcal{O}(E)$.

Exercice VIII.3.7 (Conjugaison, projections, symétries) Soient u **et** v **deux endomorphismes de** V **avec** v **inversible. On pose** $t := vuv^{-1}$. **Pour** $a \in K$, **on note** U_a **le noyau de** $u - a\mathrm{Id}_V$ **et** T_a **le noyau de** $t - a\mathrm{Id}_V$.

1) Calculer T_a en fonction de U_a et v.

Solution

$$\begin{array}{lrcl} \forall x \in V, & x & \in & T_a \\ \Leftrightarrow & t(x) & = & ax \\ \Leftrightarrow & vuv^{-1}(x) & = & ax \\ \Leftrightarrow & vuv^{-1}(x) & = & avv^{-1}v(x) \\ \Leftrightarrow & uf^{-1}(x) & = & av^{-1}(x) \\ \Leftrightarrow & x^{-1} & \in & U_a\ ; \end{array}$$

d'où il vient

$$T_a = v(U_a)\ .$$

2) **a)** Si u est un projecteur de noyau N et d'image I, que dire de t ?

Solution

L'endomorphisme u *est un projecteur si et seulement si* $u^2 = u$; *ce qui équivaut encore à* $t^2 = t$; *si bien que* u *est un projecteur si et seulement si* t *en est un. De plus*

$$\mathrm{Ker}\, u = U_0 \text{ et } \mathrm{Im}\, u = U_1\ .$$

Il s'ensuit que

$$\mathrm{Ker}\, t = T_0 = v(U_0) \text{ et } \mathrm{Im}\, t = T_1 = v(U_1)\ .$$

b) Même question si u est une symétrie.

Solution

Une symétrie est caractérisée par $u^2 = \mathrm{Id}_V$; *ce qui équivaut encore à* $t^2 = \mathrm{Id}_V$. *L'endomorphisme est alors la symétrie par rraport à* $t_1 = v(U_1)$.

3) Si V est un espace euclidien de dimension 2 ou 3 u une rotation de V et v un endomorphisme orthogonal de V, que dire de t ?

Solution

(cf. la proposition VII.2.4, la proposition VIII.1.5, et l'exercice VIII.3.3 .)

Exercice VIII.3.8 (Centre de $\mathcal{O}(E)$**) Soit** E **un espace euclidien de dimension** n. **Soit** $f \in \mathcal{O}(E)$, **et** s **une réflexion par rapport à un hyperplan** H. **Soit** $\vec{u} \in H^{\perp}$, $\vec{u} \neq 0$.

1) Montrer que $f \circ s \circ f^{-1}$ est aussi une symétrie et en donner la base.

Solution

Puisque s est une réflexion orthogonale, $s \in \mathcal{O}(E)$, ce qui entraîne $f \circ s \circ f^{-1} \in \mathcal{O}(E)$. De plus comme $s \circ s = \mathrm{Id}_E$,

$$\left(f \circ s \circ f^{-1}\right)^2 = f \circ (s \circ s) \circ f^{-1} = f \circ \mathrm{Id}_E \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_E \ .$$

Ce qui précède caractérise (cf. l'exercice VI.4.5,) une symétrie orthogonale.
En notant $D := H^{\perp}$, par définition de la symétrie s,

$$H = \mathrm{Ker}\, s - \mathrm{Id}_E \text{ et } D = \mathrm{Ker}\, s + \mathrm{Id}_E \ .$$

Un calcul que nous avons déjà fait à plusieurs reprises montre alors que

$$f(H) = \mathrm{Ker}\,(f \circ s \circ f^{-1} - \mathrm{Id}_E) \text{ et } f(D) = \mathrm{Ker}\,(f \circ s \circ f^{-1} + \mathrm{Id}_E) \ .$$

2) En déduire que f et s commutent si et seulement si $\vec{u}$ est vecteur propre de f.

Solution

i) $(f \circ s = s \circ f)$

$$\begin{array}{rrcl} & f \circ s & = & s \circ f \\ \Rightarrow & f \circ s \circ f^{-1} & = & s \\ \Rightarrow & \mathrm{Ker}\,(f \circ s \circ f^{-1} + \mathrm{Id}_E) & = & \mathrm{Ker}\, s = \mathrm{Id}_E \\ \Rightarrow & f(D) & = & D \ ; \end{array}$$

ce qui entraîne que $\vec{u}$ et $f(\vec{u})$ sont liés ; auttrement dit que $\vec{u}$ est un vecteur propre de f.

*ii) ($\vec{u}$ **est vecteur propre de** f)*
Il s'ensuit que $f(D) = D$. Comme $H = D^{\perp}$, et f est une isométrie

$$f(H) = f(D)^{\perp} = D^{\perp} = H \ .$$

On an déduit que

$$\mathrm{Ker}\,(f \circ s \circ f^{-1} - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}\, s - \mathrm{Id}_E \text{ et } \mathrm{Ker}\,(f \circ s \circ f^{-1} + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}\, s + \mathrm{Id}_E \ ;$$

ce qui entraîne $f \circ s \circ f^{-1} = s$, i.e.

$$f \circ s = s \circ f \ .$$

3) (**Vecteurs propre et homothétie**)
Soit E un espace vectoriel non nul. Soit g un endomorphisme de E tel que pour tout vecteur x de E la famille $(x, g(x))$ soit liée.

Montrer que g est une homothétie.

Solution

Dire que g laisse stable toutes les droites de E entraîne que pour tout $x \in E$, $g(x) \in \mathrm{Vect}\{x\}$; c'est-à-dire qu'il existe $\lambda(x) \in \mathbb{Q}$ tel que $g(x) = \lambda(x)x$. On définit ainsi une application $\lambda : E \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$. Il se peut en effet que $\lambda(0)$ ne soit pas complètement défini ; mais de toute façon,g étant linéaire, $g(0) = 0$.
Prouvons donc que λ est une application constante i.e.

$$\forall (x, y) \in (E \setminus \{0\}) \times (E \setminus \{0\}),\ \lambda(x) = \lambda(y) \ .$$

— *si x et y sont colinéaires, x étant non nul, il existe $a \in \mathbb{K}$ tel que $y = ax$. On a alors*

$$\begin{array}{rcl} a\lambda(y)x & = & \lambda(y)y \\ & = & g(y) \\ & = & g(ax) \\ & = & ag(x) \\ & = & a\lambda(x)x \ . \end{array}$$

Or si $y \neq 0$, $a \neq 0$, et comme $x \neq 0$, l'égalité ci-dessus entraîne

$$\lambda(x) = \lambda(y) \ .$$

— *Si x et y son indépendant :*

$$\begin{aligned}\lambda(x+y)x+\lambda(x+y)y &= \lambda(x+y)(x+y)\\ &= g(x+y)\\ &= g(x)+g(y)\\ &= \lambda(x)x+\lambda(y)y\ ;\end{aligned}$$

ainsi, il s'ensuit que

$$(\lambda(x+y)-\lambda(x))x+(\lambda(x+y)-\lambda(y))y\ =\ 0\ ;$$

ce qui entraîne, x et y étant indépendants,

$$\lambda(x+y)-\lambda(x)\ =\ \lambda(x+y)-\lambda(y)\ =\ 0\ \Rightarrow\ \lambda(x)\ =\ \lambda(x+y)\ =\ \lambda(y)\ .$$

Il existe donc

$$\lambda\ \in\ \mathbb{K}\ \textit{ tel que }\ \forall x\in E\ \setminus\{0\},\ g(x)\ =\ \lambda x\ .$$

On a bien évidemment $g(0)\ =\ \lambda 0$, ce qui assure que g est une homothétie de rapport λ.

4) Quel est le centre de $\mathcal{O}(E)$?

Solution

Soit $f\ \in\ \mathcal{O}(E)$. Si f appartient au centre de $\mathcal{O}(E)$, pour tout $\vec{u}\ \in\ E\ \setminus\ \{0\}$ f commute à la réflexion par rapport à l'hyperplan $\vec{u}^{\perp}$; si bien que $\vec{u}$ est vecteur propre de f. Il résulte alors de la question 3 que f est une homothétie ; i.e.

$$\exists a\ \in\ \mathbb{R},\ f\ =\ a\mathrm{Id}_E\ .$$

Mais puisque f est une isométrie, nécessairement $a\ =\ \pm 1$. Il en résulte que le centre de $\mathcal{O}(E)$ est $\{\mathrm{Id}_E, -\mathrm{Id}_E\}$.

Exercice VIII.3.9 (Conjuguée d'une rotation) Soient $f\ \in\ \mathcal{SO}(E)$ une rotation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E de dimension 3 **et** $g\ \in\ \mathcal{O}(E)$.

1) Reconnaître $g\circ f\circ g^{-1}$.

Solution

On a montré à l'exercice VIII.3.3 que si f est une rotation d'axe D, $g\circ f\circ g^{-1}$ est une rotation d'axe $g(D)$.

2) Application : Déterminer le centre de $\mathcal{SO}(E)$.

Solution

Les arguments sont mutatis mutandis ceux de l'exercice VIII.3.8 . En effet si g est une rotation qui commute avec f, l'axe D de f vérifie alors $g(D)\ =\ D$. Ainsi si g commute avec toutes les rotations toute droite de E est g-stable. Il résulte alors de la question 3 de l'exercice VIII.3.8 que g est une homothétie. Or la seule homothétie qui soit en même temps une rotation est Id_E ; si bien que le centre de $\mathcal{SO}(E)$ est $\{\mathrm{Id}_E\}$.

Exercice VIII.3.10 Soit

$$P\ \subset\ \mathbb{R}^3 \text{ et } G\ :=\ \{g\ \in\ \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})\ ;\ g(P)\ =\ P\}\ .$$

Montrer que G est un sous-groupe de $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.

Solution

Il suffit d'appliquer le critère de la proposition II.3.5. Puisque $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}(P)\ =\ P$, $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\ \in\ G$; si bien que $G\ \neq\ \emptyset$. Par ailleurs pour tout $(g,h)\ \in\ G\times G$, $g(P)\ =\ P$, entraîne, puisque g est une bijection et par conséquent g^{-1} également, $P\ =\ g^{-1}(P)$ i.e. $g^{-1}\ \in\ G$. Enfin :

$$P\ =\ g(P)\ \Rightarrow\ P\ =\ H(P)\ =\ h\circ g(P)\ ;$$

i.e. $h\circ g\ \in\ G$.

Exercice VIII.3.11 (Sous-groupes finis de $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$) Il n'est absolument pas nécessaire, pour résoudre cet exercice, de savoir ce qu'est l'équation caractéristique d'un sous-groupe de $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$, et encore moin d'en connaître la forme.

Dans la suite E est un espace euclidien de dimension 3 et G un sous-groupe de $\mathcal{SO}(E)$.

1) Montrer que G a 2 (resp. 3) éléments si et seulement si il existe

$$r_G \in \mathcal{SO}(E) \text{ tel que } r_G^2 = \mathrm{Id}_E \text{ et } G = \{r_G, \mathrm{Id}_E\} \text{ (resp. } r_G^3 = \mathrm{Id}_E \text{ et } G = \{\mathrm{Id}_E, r_G, r_G^2\}\text{ .)}$$

Solution

La condition est évidemment suffisante ; car si $r_G \in \mathcal{SO}(E)$ vérifie $r_G^2 = \mathrm{Id}_E$ (resp. $r_G^3 = \mathrm{Id}_E$,) la loi de composition de $\mathcal{SO}(E)$ se restreint à l'ensemble $\{\mathrm{Id}_E, r_G\}$ (resp. $\{\mathrm{Id}_E, r_G, r_G^2\}$.) De plus $r_G = r_G^{-1}$ (resp. $r_G^2 = r_G^{-1}$,) assure qu'on construit bien ainsi des groupes.
Réciproqument elle est nécessaire. En effet soit G un sous-groupe de $\mathcal{SO}(E)$ de cardinal 2 ou 3. Puisque G est un sous-groupe de $\mathcal{SO}(E)$, l'élément neutre $\mathrm{Id}_E \in G$. Il existe donc

$$r \in \mathcal{SO}(E) \text{ (resp. } r \in \mathcal{SO}(E) \text{ et } s \in \mathcal{SO}(E)\text{) tel que } G = \{\mathrm{Id}_E, r\} \text{ (resp. } G = \{\mathrm{Id}_E, r, s\}\text{ .)}$$

$\#(G) = 2$ *alors $r^2 = \mathrm{Id}_E$ ou r, puisque la loi de composition doit être interne sur un sous-groupe. Or*

$$r^2 = r \Rightarrow r = \mathrm{Id}_E \Rightarrow G = \{\mathrm{Id}_E\} \Rightarrow \#(G) = 1\,.$$

Ainsi $r^2 \neq r$ et donc $r^2 = \mathrm{Id}_E$.

$\#(G) = 3$ *Pour les même raisons que ci-dessus on a*

$$r^2 = \mathrm{Id}_E \text{ ou } r^2 = r \text{ ou } r^2 = s\,.$$

Comme précédemment $r^2 = r$ entraînerait $r = \mathrm{Id}_E$ et par conséquent $\#(G) = 2$.
Si $r^2 = \mathrm{Id}_E$, le sous ensemble $\{\mathrm{Id}_E, r\}$ de G est un sous-groupe de cardinal 2. Or le cardinal d'un sous-groupe divise le cardinal du groupe et 2 ne divise pas 3.
On a donc finalement nécessairement $r^2 = s$.
Reste à déterminer la valeur de r^3 ; qui ne peut être ni r^2 car alors $r = \mathrm{Id}_E$; ni r car alors $r^2 = \mathrm{Id}_E$; et et donc finalement Id_E.

2) Pour G un sous-groupe à 2 (resp. 3) éléments de $\mathcal{SO}(E)$, montrer qu'il existe une droite D_G et un plan P_G orthogonaux tels que

$$\forall f \in G,\ f_{|D_G} = \mathrm{Id}D_G\ ,\ f_{|P_G} \in \mathcal{SO}(P_G) \text{ et } {f_{|P_G}}^2 = \mathrm{Id}_E \text{ (resp. } {f_{|P_G}}^3 = \mathrm{Id}_E\text{ .)}$$

Solution

Notons

$$G = \{\mathrm{Id}_E, r_G\} \text{ (resp. } \{\mathrm{Id}_E, r_G, r_G^2\}\text{ .)}$$

Puisque $r_G \in \mathcal{SO}(E)$, il existe une droite D_G et un plant P_G orthogonaux tels que

$$r_{G|D_G} = \mathrm{Id}D_G \text{ et } r_{G|P_G} \in \mathcal{SO}(P_G)\,.$$

On a évidemment

$$\mathrm{Id}_{E|D_G} = \mathrm{Id}D_G\ ,\ \mathrm{Id}_{E|P_G} \in \mathcal{SO}(P_G) \text{ et } r^2_{G|D_G} = \mathrm{Id}D_G\ ,\ r^2_{G|P_G} \in \mathcal{SO}(P_G)\,.$$

Puisque P_G est stable sous r_G,

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ {r_{G|P_G}}^k = r^k_{G|P_G}\,.$$

3) Étant donné un sous-groupe G de $\mathcal{SO}(E)$, de cardinale 2 ou 3, déterminer $r_{G|P_G}$.

Solution

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ une base orthonormée de P_G. Alors il existe

$$(a,b) \in \mathbb{R}^2\ ,\ a^2 + b^2 = 1\ ,\ M_G := M_{(\vec{u},\vec{v})}(r_G) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} M_G^2 &= \begin{pmatrix} a^2-b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix} \\ M_G^3 &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^2-b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^3-3ab^2 & -3a^2b+b^3 \\ 3a^2b-b^3 & -3ab^2+a^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$\#(G) = 2$

$$\begin{aligned} & {r_{G|P_G}}^2 = \mathrm{Id}_{P_G} \\ \Leftrightarrow\ & M_G^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{rcl} a^2+b^2 &=& 1 \\ a^2-b^2 &=& 1 \\ 2ab &=& 0 \end{array}\right\} \\ \Leftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{rcl} 2a^2 &=& 2 \\ 2b^2 &=& 0 \\ 2ab &=& 0 \end{array}\right\} \\ \Leftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{rcl} a &=& \pm 1 \\ b &=& 0 \end{array}\right\}. \end{aligned}$$

Or $a = 1$ *entraîne* $r_G = \mathrm{Id}_E$, *ce qui contredit* $\#(G) = 2$. *On a donc nécessairement*

$$r_{G|P_G} = -\mathrm{Id}P_G\ . \qquad 1$$

$\#(G) = 3$

$$\begin{aligned} & {r_{G|P_G}}^3 = \mathrm{Id}_{P_G} \\ \Leftrightarrow\ & M_G^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{rcl} a^2+b^2 &=& 1 \\ a^3-3ab^2 &=& 1 \\ b^3-3a^2b &=& 0 \end{array}\right\} \\ \Leftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{rcl} a^2+b^2 &=& 1 \\ 3a^3+3ab^2 &=& 3a \\ 3a^2b+3b^3 &=& 3b \\ a^3-3ab^2 &=& 1 \\ b^3-3a^2b &=& 0 \end{array}\right\} \\ \Leftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{rcl} a^2+b^2 &=& 1 \\ 3a^3+3ab^2 &=& 3a \\ 3a^2b+3b^3 &=& 3b \\ 4a^3 &=& 1+3a \\ 4b^3 &=& 3b \end{array}\right\} \\ \Leftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{rcl} a^2+b^2 &=& 1 \\ (a-1)(4a^2+4a+1) &=& 0 \\ b(4b^2-3) &=& 0 \end{array}\right\} \\ \Leftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{rcl} a^2+b^2 &=& 1 \\ (a-1)(2a+1)^2 &=& 0 \\ b(4b^3-3) &=& 0 \end{array}\right\} \\ \Leftrightarrow\ & (a,b) = (1,0) \\ \text{ou}\ & (a,b) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \\ \text{ou}\ & (a,b) = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}). \end{aligned}$$

La solution $(a,b) = (1,0)$ *correspond à* $r_G = \mathrm{Id}_E$ *qu'il faut exclure. On a donc :*

$$M_G = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ ou } M_G = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \qquad 2$$

4) Soient G et H deux sous-groupes de $\mathcal{SO}(E)$ de même cardinal 2 ou 3. Montrer qu'il existe

$$f \in \mathcal{SO}(E) \text{ tel que } H = f \circ G \circ f^{-1} .$$

Indication : *On pourrait utiliser l'exercice VIII.3.13,question 4.*

Solution

Notons

$$r_G \in G \text{ (resp. } r_H \in H \text{ ,)}$$

(cf. 1.) Soit alors D_G (resp. D_H,) l'axe des éléments de G (resp. H,) (cf. 2,) et

$$\vec{u_G} \in D_G \text{ (resp. } \vec{u_H} \in D_H \text{ tel que } ||\vec{u_G}|| = ||\vec{u_H}|| = 1 .$$

Alors (cf. VIII.3.13.4,) il existe $f \in \mathcal{SO}(E)$ telle que $f(\vec{u_G}) = \vec{u_H}$. On a alors bien évidemment :

$$\begin{array}{rcl} r_H(\vec{u_H}) & = & \vec{u_H} \\ & = & f[f^{-1}(\vec{u_H}) \\ & = & f(\vec{u_G}) \\ & = & f[r_G(\vec{u_G})] \\ & = & f\left[r_G[f^{-1}(\vec{u_H})]\right] \\ & = & f \circ r_G \circ f^{-1}(\vec{u_H}) . \end{array}$$

Ainsi :

$$r_{H|D_H} = f \circ r_G \circ f^{-1}{}_{|D_H} \qquad 1$$

$\#(G) = 2$ *Puisque f est une isométrie, ains ainsi que f^{-1},*

$$\begin{array}{lrcl} \forall \vec{x} \in E, & \vec{x} & \in & P_H \\ \Leftrightarrow & \langle \vec{x}, \vec{u_H} \rangle & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \langle f^{-1}(\vec{x}), f^{-1}(\vec{u_H}) \rangle & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \langle f^{-1}(\vec{x}), \vec{u_G} \rangle & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \vec{x} & \in & P_G \\ \Leftrightarrow & r_G[f^{-1}(\vec{x})] & = & -f^{-1}(\vec{x}) \\ \Leftrightarrow & f\left[r_G[f^{-1}(\vec{x})]\right] & = & -f[f^{-1}(\vec{x})] \\ & & = & -\vec{x} \\ & & = & r_H(\vec{x}) ; \end{array}$$

d'où il résulte que

$$r_{H|P_H} = f \circ r_G \circ f^{-1}{}_{|P_H} ;$$

ce qui combiné à question 1, donne

$$r_H = f \circ r_G \circ f^{-1} .$$

Comme par ailleurs bien évidemment

$$\mathrm{Id}_E = f \circ \mathrm{Id}_E \circ f^{-1}, \qquad 2$$

il vient

$$H = f \circ G \circ f^{-1} .$$

$\#(G) = 3$ *Soit $(\vec{v_G}, \vec{w_G})$ une base orthonormée de P_G dans laquelle la matrice de $r_{G|P_G}$ est (cf. 3.2,) $M_G = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Une telle base existe toujours, en effet, il se pourrait que l'on ait $M_G = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, mais alors*

$$M_{(\vec{x_G}, -\vec{w_G})}(r_{G|P_G}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Puisqu'on a déjà constaté que

$$f_{|P_G} : P_G \to P_H \text{ est une isométrie,}$$

en notant $\vec{v_H} := f(\vec{v_G})$ et $\vec{w_H} := f(\vec{w_G})$, $(\vec{v_H}, \vec{w_H})$ est une base orthonormée de P_H. En notant $M_H := M_{(\vec{v_H}, \vec{w_H})}(r_{H|P_H})$, on a (cf. 3.2,)

$$M_H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ ou } M_H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

$M_H \;=\; \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ *On a alors :*

$$\begin{aligned}
r_H(\vec{v_H}) &= -\frac{1}{2}\vec{v_H} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{w_H} \\
&= -\frac{1}{2}f(\vec{v_G}) + \frac{\sqrt{3}}{2}f(\vec{w_G}) \\
&= f\left(-\frac{1}{2}\vec{v_G} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{w_G}\right) \\
&= f[r_G(\vec{v_G})] \\
&= f\left[r_G[f^{-1}(\vec{v_H})]\right] \\
&= f \circ r_G \circ f^{-1}(\vec{v_H}) \\
r_H(\vec{w_H}) &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{v_H} + -\frac{1}{2}\vec{w_H} \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2}f(\vec{v_G}) + -\frac{1}{2}f(\vec{w_G}) \\
&= f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{v_G} + -\frac{1}{2}\vec{w_G}\right) \\
&= f[r_G(\vec{w_G})] \\
&= f\left[r_G[f^{-1}(\vec{w_H})]\right] \\
&= f \circ r_G \circ f^{-1}(\vec{v_H})\,;
\end{aligned}$$

ce qui combiné à question 1, assure que

$$r_H \;=\; f \circ r_G \circ f^{-1}\,.$$

Alors

$$\begin{aligned}
r_H^2 &= f \circ r_G \circ f^{-1} f \circ r_G \circ f^{-1} \\
&= f \circ r_G^2 \circ f^{-1}\,;
\end{aligned}$$

d'où il résulte finalement (cf. 2,)

$$H \;=\; f \circ G \circ f^{-1}\,.$$

$M_H \;=\; \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ *Considérons l'unique endomorphisme* $r \in \operatorname{End}(E)$ *défini par*

$$r(\vec{u_H}) \;=\; -\vec{u_H}\ ,\ r(\vec{v_H}) \;=\; \vec{v_H} \text{ et } r(\vec{w_H}) \;=\; -\vec{w_H}\,.$$

Il est presqu'immédiat sur cette définition que $r \in \mathcal{SO}(E)$ *; et par conséquent*

$$g \;:=\; r \circ f \;\in\; \mathcal{SO}(E)\,.$$

Alors

$$M_{(g(\vec{v_G}),g(\vec{w_G}))}(r_{H\,|\,P_H}) \;=\; M_{(\vec{v_H},-\vec{w_H})}(r_{H\,|\,P_H}) \;=\; \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Le même raisonnement que ci-dessus s'applique alors à g *et l'on a*

$$H \;=\; g \circ G \circ g^{-1}\,.$$

5) Que peut-on dire de l'action par conjugaison de $\mathcal{SO}(E)$ sur l'ensemble de ses sous groupes de cardinal 2 (resp. 3 ?)

Solution

Cette action est transitive (cf. 4.)

Exercice VIII.3.12 (Sphère unité) L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ étant muni de son produit scalaire canonique, on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des vecteurs de norme 1 (la *sphère unité*.)

1) Montrer que les groupes $\mathcal{O}_3\mathbb{R}$ et $\mathcal{SO}_3\mathbb{R}$ agissent sur $\mathcal{S}$.

Solution

D'abord le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ agit naturellement sur $\mathbb{R}^3$, puisqu'il est constitué des bijections linéaires de $\mathbb{R}^3$, dans lui-même ; qui est donc un sous-groupe du groupe $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ de toutes les bijections de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même.
Puisque $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{R}^3$, ses sous-groupes également.
Cependant,

$$\forall x \in \mathcal{S},\ \forall u \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}),\ u(x) \ \in \ \mathcal{S}$$

la loi externe (laction)

$$\mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3 \ \to \ \mathbb{R}^3 \ , \ (u,x) \ \mapsto \ u(x)$$

se restreint en une action

$$\mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{S} \ \to \ \mathcal{S} \ , \ (u,x) \ \mapsto \ u(x)$$

et en une action

$$\mathcal{SO}_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{S} \ \to \ \mathcal{S} \ , \ (u,x) \ \mapsto \ u(x) \ .$$

2) L'action de $\mathcal{O}_3\mathbb{R}$ (resp. $\mathcal{SO}_3\mathbb{R}$) sur $\mathcal{S}$ est-elle transitive ?

Solution

Étant donnée $(x,y) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$, il existe des bases orthonormées (mêmes directes) (x, x_1, x_2) et (y, y_1, y_2). C'est un résultat d'algèbre linéaire bien connu qu'alors il existe un unique élément $u \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ tel que

$$u(x) \ = \ y \ , \ u(x_1) \ = \ y_1 \text{ et } u(x_2) \ = \ y_2 \ .$$

Si (x, x_1, x_2) et (y, y_1, y_2) sont orthonormées $u \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$; et si l'on fait l'hypothèse suplémentaire que ces bases sont directes $u \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.
Ceci prouve que les actions respectives de $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}$ sont transitives (cf. la question 2 de l'exercice VIII.3.13 et la question 5 de l'exercice VIII.3.13 .)

Exercice VIII.3.13 (Existance d'isométries et transitivité de l'action) Soit E un espace euclidien.

1) Soit

$$(\vec{u}, \vec{v}) \ \in \ E \times E \ \textbf{tel que} \ ||\vec{u}|| \ = \ ||\vec{v}|| \ .$$

a) Rappeler brièvement pourquoi $E \ = \ \mathrm{Vect}\{\vec{v} - \vec{u}\} \ \oplus \ (\vec{v} - \vec{u})^{\perp}$.

Solution

C'est une propriété des espaces euclidiens, pour tout sous-espace F de E, $E \ = \ F \ \oplus \ F^{\perp}$ (cf. la proposition V.3.7.)

On définit $i_{\vec{u},\vec{v}}$ par

$$i_{\vec{u},\vec{v}\,|\mathrm{Vect}\{\vec{v}-\vec{u}\}} \ := \ -\mathrm{Id}_{\mathrm{Vect}\{\vec{v}-\vec{u}\}} \text{ et } i_{\vec{u},\vec{v}\,|(\vec{v}-\vec{u})^{\perp}} \ = \ \mathrm{Id}_{(\vec{v}-\vec{u})^{\perp}} \ .$$

b) Montrer que l'on définit bien ainsi un unique endomorphisme $i_{\vec{u},\vec{v}} \in \mathrm{End}(E)$ *i.e.* une unique application linéaire $i_{\vec{u},\vec{v}} \ : \ E \ \to \ E$.

Solution

C'est en fait une propriété des somes directes : dès que $i_{\vec{u},\vec{v}\,|\mathrm{Vect}\{\vec{v}-\vec{u}\}}$ et $i_{\vec{u},\vec{v}\,|(\vec{v}-\vec{u})^{\perp}}$ sont définies, $i_{\vec{u},\vec{v}}$ est bien définie.
Plus précisément puisque $E \ = \ \mathrm{Vect}\{\vec{v} - \vec{u}\} \ \oplus \ (\vec{v} - \vec{u})^{\perp}$, pour tout $\vec{x} \in E$ il existe un unique $(\vec{y}, \vec{z}) \in \mathrm{Vect}\{\vec{v} - \vec{u}\} \times (\vec{v} - \vec{u})^{\perp}$ tel que $\vec{x} \ = \ \vec{y} \ + \ \vec{z}$. Si donc $i_{\vec{u},\vec{v}}$ est linéaire, nécessairement

$$i_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{x}) \ = \ i_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{y}) \ + \ i_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{z}) \ .$$

Ceci prouve d'une part l'unicité de $i_{\vec{u},\vec{v}}$ mais aussi du fait de l'unicité de la décomposition de $\vec{x}$ son existence i.e. qu'on a donné une bonne définition.
Reste à constater, qu'ainsi définie, $i_{\vec{u},\vec{v}}$ est bien linéaire ; ce qui repose une fois encore sur l'unicité de la décomposition d'un élément de E comme somme d'un élément de $\mathrm{Vect}\{\vec{v} - \vec{u}\}$ et d'un élément de $(\vec{v} - \vec{u})^{\perp}$.

c) Montrer que $i_{\vec{u},\vec{v}}$ est une isométrie.

Solution

Pour tout

$$\vec{x} \in E\,,\ \exists(\vec{y},\vec{z}) \in \mathrm{Vect}\{\vec{v}-\vec{u}\} \times (\vec{v}-\vec{u})^{\perp},\ \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}\,.$$

En particulier $\langle \vec{y},\vec{z}\rangle = 0$. *Il s'ensuit que :*

$$\begin{aligned} ||\vec{x}||^2 &= \langle \vec{x},\vec{x}\rangle \\ &= \langle \vec{y}+\vec{z},\vec{y}+\vec{z}\rangle \\ &= \langle \vec{y},\vec{y}\rangle + \langle \vec{y},\vec{z}\rangle + \langle \vec{z},\vec{z}\rangle \\ &= ||\vec{y}||^2 + ||\vec{z}||^2\,. \end{aligned}$$

En outre :

$$\begin{aligned} ||i_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{x})||^2 &= ||i_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{y}+\vec{z})||^2 \\ &= ||i_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{y}) + i_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{z})||^2 \\ &= ||-\vec{y}+\vec{z}||^2 \\ &= \langle \vec{z}-\vec{y},\vec{z}-\vec{y}\rangle \\ &= \langle \vec{y},\vec{y}\rangle - 2\langle \vec{y},\vec{z}\rangle + \langle \vec{z},\vec{z}\rangle \\ &= ||\vec{y}||^2 + ||\vec{z}||^2 \\ &= ||\vec{x}||^2\,; \end{aligned}$$

ce qui pproueve que $i_{\vec{u},\vec{v}}$ *est une isométrie.*

d) Montrer que

$$i_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{u}) = \vec{v} \text{ et } i_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{v}) = \vec{u}\,.$$

Solution

Rappelons d'abord (cf. le point i de la proposition V.3.8,) que

$$||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| \Rightarrow (\vec{v}-\vec{u}) \perp (\vec{u}+\vec{v})\,.$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \tfrac{1}{2}\left((\vec{u}+\vec{v}) + (\vec{u}-\vec{v})\right) \\ \Rightarrow\ i_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{u}) &= i_{\vec{u},\vec{v}}\left[\tfrac{1}{2}\left((\vec{u}+\vec{v}) + (\vec{u}-\vec{v})\right)\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\left(i_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{u}+\vec{v}) + i_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{u}-\vec{v})\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\vec{u}+\vec{v} - (\vec{u}-\vec{v})\right) \\ &= \vec{v}\,. \end{aligned}$$

Puisque les rôles de $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont identiques on obtient de manière exactement analogue*

$$i_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{v}) = \vec{u}\,.$$

2) Déduire des questions précédentes que $\mathcal{O}(E)$ agit transitivement sur l'ensemble

$$\mathcal{S} := \{\vec{x} \in E\,;\ ||\vec{x}|| = 1\}\,.$$

Solution

On a déjà expliqué (cf. la question 1 de l'exercice VIII.3.12 ,) pourquoi $\mathcal{O}(E)$ *agit sur* $\mathcal{S}$. *On vient de montrer (cf. 1.d,) que pour tout* $(\vec{u},\vec{v}) \in \mathcal{S}\times\mathcal{S}$ *l'isométrie* $i_{\vec{u},\vec{v}}$ *satisfait* $i_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{u}) = \vec{v}$ *; ce qui prouve que l'action est transitive.*

3) (**Le cas de la dimension** 2)
Soit P **un espace euclidien de dimension** 2, **et**

$$(\vec{u},\vec{v}) \in P\times P \ \textbf{tel que}\ ||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| \neq 0.$$

Montrer qu'il existe une unique rotation $r_{\vec{u},\vec{v}}$ *i.e.* un unique élément

$$r_{\vec{u},\vec{v}} \in \mathcal{SO}(P) \ \text{tel que}\ r_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{u}) = \vec{v}\,.$$

Solution

Supposons d'abord que $||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| = 1$*. Soit* $\vec{w} \in P$ *tel que* $(\vec{u}, \vec{w})$ *soit une base orthonormée de* P*. Puisque* $||\vec{v}|| = 1$*, il existe*

$$(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,,\ a^2 + b^2 = 1\,,\ \vec{v} = a\vec{u} + b\vec{v}\,.$$

S'il existe $r_{\vec{u},\vec{v}}$ *telle que* $r_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{u}) = \vec{v}$*,* $\vec{z} = r_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{w})$ *vérifie*

$$||\vec{z}|| = 1 \text{ et } \langle \vec{v}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = 0\,.$$

Il s'ensuit que

$$\vec{z} = -b\vec{u} + a\vec{v} \text{ ou } \vec{z} = b\vec{u} - a\vec{v}\,;$$

ce qui correspond aux matrices pour $r_{\vec{u},\vec{v}}$ *dans la base* $(\vec{u}, \vec{w})$ *:*

$$M_{(\vec{u},\vec{w})}(r_{\vec{u},\vec{v}}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ ou } M_{(\vec{u},\vec{w})}(r_{\vec{u},\vec{v}}) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Seule la première est une matrice de rotation.
Dans le cas où l'on a simplement $||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| \neq 0$*, posons*

$$\vec{u_1} := \frac{1}{||\vec{u}||}\vec{u} \text{ et } \vec{v_1} := \frac{1}{||\vec{v}||}\vec{v}\,.$$

Appliquant le résultat ci-dessus à $(\vec{u_1}, \vec{v_1})$*, on obtient l'existence d'une rotation* r *telle que* $r(\vec{u_1}) = \vec{v_1}$ *; ce qui entraîne, par linéarité* $r(\vec{u}) = \vec{v}$*. Le même argument assure que si* $r(\vec{u}) = \vec{v}$*, nécessairement* $r(\vec{u_1}) = \vec{v_1}$*, ce qui assure l'unicité de* r*.*

4) (**Le cas de la dimension** 3)
Soient E **un espace euclidien de dimension** 3 **et**

$$(\vec{u}, \vec{v}) \in E \times E \ \textbf{tel que}\ ||\vec{u}|| = ||\vec{v}||\,.$$

Montrer qu'il existe

$$f \in \mathcal{SO}(E) \ \text{tel que}\ f(\vec{u}) = \vec{v}\,.$$

Solution

Soit

$$\vec{w} \in E \setminus \{0\} \ \textit{tel que}\ \vec{u} \perp \vec{w} \text{ et } \vec{u} \perp \vec{w}\,.$$

Un tel vecteur existe toujours puisque

$$\dim \mathrm{Vect}\big\{\vec{u}, \vec{v}\big\} \le 2 \Rightarrow \dim \mathrm{Vect}\big\{\vec{u}, \vec{v}\big\}^{\perp} \ge 1\,.$$

En notant $P := \vec{w}^{\perp}$*, on a* $\vec{u} \in P$ *et* $\vec{v} \in P$*. On sait alors (cf. 3,) qu'il existe (on perd peut-être lu'nicité si on n'exige pas* $\vec{u} \neq 0$*,)*

$$r_{\vec{u},\vec{v}} \in \mathcal{SO}(P) \ \textit{tel que}\ r_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{u}) = \vec{v}\,.$$

Il existe alors une unique application linéaire

$$f \in \mathrm{End}(E) \ \textit{telle que}\ f_{|\mathrm{Vect}\{\vec{w}\}} = \mathrm{Id} \text{ et } f_{|P} = r_{\vec{u},\vec{v}}\,.$$

On a déjà montré (cf. 1,) qu'une telle application est bien définie. Une vérification très semblable prouve que c'est également une isométrie qui répond de plus à la caractérisation des éléments de $\mathcal{SO}(E)$*.*

5) Déduire de ce qui précède que si E est un espace euclidien de dimension 2 ou 3,[10] que $\mathcal{SO}(E)$ agit transitivement sur l'ensemble $\mathcal{S} := \{\vec{x} \in E\,;\ ||\vec{x}|| = 1\}$.

Solution

L'argument est, mutatis mutandis exactement celui donné à la question 2 , en remplaçant l'existence d'une isométrie (cf. la question 1 ,) par l'existence d'une rotation (isométrie directe) (cf. 3, question 4.)

10. Le résultat vaut en fait en toute dimension mais nous n'avons pas fourni les arguments permettant de l'établir.

Exercice VIII.3.14 (Action sur la sphère unité en dimension 3) Soit S la sphère de rayon 1 dans $\mathbb{R}^3$.

1) Soient x et y deux points de S. Montrer qu'il existe une rotation r telle que $r(x) = y$.

2) Soient x, x', y, y' quatre points de S. Montrer qu'il existe une rotation ρ telle que $\rho(x) = x'$ et $\rho(y) = y'$ si et seulement si $\|x - x'\| = \|y - y'\|$.

Exercice VIII.3.15 (Décomposition des rotations) On pourra dans cette exercice utiliser les résulteats de la question 3 de l'exercice VIII.3.13 et de la question 4 de l'exercice VIII.3.13 même si on ne les a pas établis.

Soient

— E **un espace euclidien de dimension** 3 ;
— $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ **une base orthonormée de** E ;
— $f \in \mathcal{SO}(E)$ **une rotation.**

1) Montrer que $f(\vec{j}) \perp \vec{i}$ si et seulement s'il existe des rotations $r_{\vec{i}}$ et $r_{\vec{j}}$ d'axes respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$,

$$(\textit{i.e.}\ \text{vérifiant}\ r_{\vec{i}}(\vec{i}) = \vec{i} \text{ et } r_{\vec{j}}(\vec{j}) = \vec{j}\ ,)$$

et telles que :

$$f = r_{\vec{i}} \circ r_{\vec{j}}\ ;$$

et que dans ce cas $r_{\vec{i}}$ et $r_{\vec{j}}$ sont uniques.

Solution

i) ***(Réciproque)***
On remarque que la condition $f = r_{\vec{i}} \circ r_{\vec{j}}$ entraîne

$$f(\vec{j}) = r_{\vec{i}}[r_{\vec{j}}(\vec{j}) = r_{\vec{i}}(\vec{j})\ . \qquad (1)$$

Or $\vec{j} \in \vec{i}^{\perp}$ qui est un plan stable pour $r_{\vec{i}}$, si bien que

$$f(\vec{j}) = r_{\vec{i}}(\vec{j}) \in \vec{i}^{\perp}\ .$$

ii) ***(Sens direct)***
Supposons que $f(\vec{j}) \in \vec{i}^{\perp}$. L'identité point i,point 1 entraîne que

$$f = r_{\vec{i}} \circ r_{\vec{j}} \Rightarrow r_{\vec{i}}(\vec{j}) = f(\vec{j})\ .$$

On sait que la restriction $r_{\vec{i}_{|\vec{i}^{\perp}}}$ de la rotation $r_{\vec{i}}$ au plan $\vec{i}^{\perp}$ orthogonal à son axe est une rotation de ce plan i.e.

$$r_{\vec{i}_{|\vec{i}^{\perp}}} \in \mathcal{SO}(\vec{i}^{\perp})\ .$$

Puisque $||f(\vec{j})|| = ||\vec{j}||$, il existe un unique (cf. VIII.3.13.3,) $r \in \mathcal{SO}(\vec{i}^{\perp})$ tel que $r(\vec{j}) = f(\vec{j})$.
Ce qui proueve l'unicité de $r_{\vec{i}}$ définie par

$$r_{\vec{i}}(\vec{i}) = \vec{i} \text{ et } r_{\vec{i}_{|\vec{i}^{\perp}}} = r\ ;$$

ce qui et une bonne définition puisque $E = \operatorname{Vect}\{\vec{i}\} \oplus \vec{i}^{\perp}$.
Désormais si $r_{\vec{j}}$ existe on a nécessairement

$$f = r_{\vec{i}} \circ r_{\vec{j}} \Rightarrow r_{\vec{j}} = r_{\vec{i}}^{-1} \circ f\ ;$$

ce qui définit complètement et de manière cohérente $r_{\vec{j}}$ puisque $\mathcal{SO}(E)$ étant un groupe,

$$r_{\vec{i}} \in \mathcal{SO}(E) \text{ et } f \in \mathcal{SO}(E) \Rightarrow r_{\vec{i}}^{-1} \circ f \in \mathcal{SO}(E)\ ;$$

et que de plus

$$r_{\vec{j}}(\vec{j}) = r_{\vec{i}}^{-1}[f(\vec{j})] = r_{\vec{i}}^{-1}[r_{\vec{i}}(\vec{j})] = \vec{j}\ .$$

On peut cependant constater que :

$$\begin{aligned} r_{\vec{j}} &= r_{\vec{i}}^{-1} \circ f \\ \Rightarrow \quad r_{\vec{j}}[f^{-1}(\vec{i})] &= r_{\vec{i}}^{-1}\left[f[f^{-1}(\vec{i})]\right] \\ &= r_{\vec{i}}^{-1}(\vec{i}) \\ &= \vec{i}\ ; \end{aligned}$$

ce qui caractérise i.e. prouve l'unicité (cf. VIII.3.13.3,) $r_{\vec{j}}$. En effet,

$$\begin{array}{rrcl} & f(\vec{j}) & \perp & \vec{i} \\ \Leftrightarrow & \langle f(\vec{j}), \vec{i}\rangle & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \langle f^{-1}[f(\vec{j})], f^{-1}(\vec{i})\rangle & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \langle \vec{j}, f^{-1}(\vec{i})\rangle\ . & & \end{array}$$

2) En déduire que tout $f \in \mathcal{SO}(E)$ se décompose sous la forme :

$$f = r'_{\vec{j}} \circ r_{\vec{i}} \circ r_{\vec{j}}$$

où $r_{\vec{j}}$ et $r'_{\vec{j}}$ sont des rotations d'axe $\vec{j}$ et $r_{\vec{i}}$ est une rotation d'axe $\vec{i}$.

Solution

S'il existe $(r'_{\vec{j}}, r_{\vec{i}}, r_{\vec{j}})$ satisfaisant aux conditions,

$$r'^{-1}_{\vec{j}} \circ f = r_{\vec{i}} \circ r_{\vec{j}}\ ;$$

ce qui entraîne (cf. 1,)

$$\begin{array}{rrcl} & r'^{-1}_{\vec{j}}[f(\vec{j})] & \perp & \vec{i} \\ \Leftrightarrow & \langle r'^{-1}_{\vec{j}}[f(\vec{j})], \vec{i}\rangle & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \langle r'_{\vec{j}}\left[r'^{-1}_{\vec{j}}[f(\vec{j})]\right], r'_{\vec{j}}(\vec{i})\rangle & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \langle f(\vec{j}), r'_{\vec{j}}(\vec{i})\rangle & = & 0 \\ \Leftrightarrow & f(\vec{j}) & \perp & r'_{\vec{j}}(\vec{i})\ . \end{array}$$

Par ailleurs si on impose à $r'_{\vec{j}}$ d'être d'axe $\vec{j}$,

$$\vec{i} \in \vec{j}^{\perp} \Rightarrow r'_{\vec{j}}(\vec{i}) \in \vec{j}^{\perp}\ ;$$

Il s'ensuit que

$$r'_{\vec{j}}(\vec{i}) \in \vec{j}^{\perp} \cap f(\vec{j})^{\perp}\ . \qquad 1$$

On peut alors distinguer les deux cas suivants :

- $f(\vec{j}) = \pm\vec{j}$ *Alors on a*

  $$f(\vec{j}) = \pm\vec{j}\perp\vec{i}\ ;$$

  et il existe (cf. 1,) $r_{\vec{i}}$ et $r_{\vec{j}}$ d'axes respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ telles que

  $$f = r_{\vec{i}} \circ r_{\vec{j}}\ ;$$

  si bien que $r'_{\vec{j}} = \mathrm{Id}_E$ convient.

- $f(\vec{j})$ *et* $\vec{j}$ *sont indépendants Dans ce cas $\vec{j}^{\perp} \cap f(\vec{j})^{\perp}$ est une droite à laquelle appartiennent exactement 2 vecteurs $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ de norme 1. La condition question 1, combinée aux fait que $||\vec{i}|| = 1$ et que $r'_{\vec{j}}$ est une isométrie entraîne que*

  $$r'_{\vec{j}}(\vec{i}) = \pm\vec{u}\ .$$

  Ceci définit deux et deux seulement rotations d'axe $\vec{j}$ vérifiant

  $$r'^{-1}_{\vec{j}} \circ f(\vec{j})\perp\vec{i}\ .$$

  Il existe alors (cf. 1,) un unique couple $(r_{\vec{i}}, r_{\vec{j}})$ de rotations d'axes respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ tel que

  $$r'^{-1}_{\vec{j}} \circ f = r_{\vec{i}} \circ r_{\vec{j}} \text{ i.e. } f = r'_{\vec{j}} \circ r_{\vec{i}} \circ r_{\vec{j}}\ .$$

3) Décomposer $(x, y, z) \mapsto (y, x, z)$ et $(x, y, z) \mapsto (x\cos\alpha - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y\cos\alpha, z)$.