LDD/S6 MDD354 Structures algébriques : Graphes, groupes, algèbre linéaire, topologie ...

**Examen partiel du 21 février 2025
Durée 2 heures**

La qualité de la rédaction entrera pour une grande part dans la notation. Les calculatrices, téléphones mobiles, objets connectés et documents ne sont pas autorisés.

Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif; mais le poids relatif des exercices ne sera pas sensiblement modifié lors de la correction.

Exercice A : (11 pts) (Le graphe complémentaire)

Soit $G := (\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G))$ un graphe fini simple non-orienté . On notera

$$\mathcal{P}_2(G) := \mathcal{P}_2(\mathcal{V}(G)) := \{a \in \mathcal{P}(\mathcal{V}(G)) ; \#(a) = 2\} ;$$

l'ensemble des parties de $\mathcal{V}(G)$ à 2 éléments .

1) Montrer que G est isomorphe à $(\mathcal{V}(G), \text{Im}(\varepsilon(G)), \text{Id}_{\mathcal{P}_2(G)|\text{Im}(\varepsilon(G))})$.

Dans toute la suite de l'exercice A , on supposera que $\mathcal{E}(G) \subset \mathcal{P}_2(G)$.

On note alors :

- $\mathcal{V}(\overline{G}) := \mathcal{V}(G)$;
- $\mathcal{E}(\overline{G}) := \mathcal{P}_2(G) \setminus \mathcal{E}(G)$;
- $\varepsilon(\overline{G}) := \text{Id}_{\mathcal{P}_2(G)|\mathcal{E}(\overline{G})}$.

2) Montrer qu'alors $\overline{G} := (\mathcal{V}(\overline{G}), \mathcal{E}(\overline{G}), \varepsilon(\overline{G}))$ est un graphe fini simple non-orienté .

On appellera $\overline{G}$ le graphe complémentaire de G .

3) Donnez $\overline{G}$ dans les cas suivants :

a) $G = (\emptyset, \emptyset, \text{Id}_\emptyset)$ est le graphe vide .

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel .

b) $G = \mathbf{I}_n$ est le graphe isolé à n sommets .

c) $G = \mathbf{K}_n$ est le graphe complet à n sommets .

d) Que dire de $\overline{\overline{G}}$?

4) On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que G est k -régulier .

Existe-t-il $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $\overline{G}$ soit ℓ -régulier ? Dans ce cas le déterminer.

Un graphe fini simple non-orienté G est dit auto-complémentaire s'il est isomorphe à son graphe complémentaire $\overline{G}$.

Dans toute la fin de l'exercice A , on suppose que G est auto-complémentaire .

5) (Nombre de sommets)

Montrer que

$$\#(\mathcal{V}(G)) \equiv 0 \text{ ou } 1 [4] .$$

Indication : On pourra penser à dénombrer les arêtes de G .

6) (Exemples)

Donner un exemple de *graphe auto-complémentaire* à 4 et 5 sommets .

7) (Le cas régulier)

Montrer que si de plus G n'est pas le *graphe vide* et est *régulier* alors

$$\#(\mathcal{V}(G)) \equiv 1 \pmod{4} .$$

Exercice B : (4 pts) (Automorphismes de C_n)

Soit $n \in \mathbb{N}$ un *entier naturel* $n \geq 3$. On rappelle que C_n le *cycle de longueur n* est le *graphe fini simple non-orienté* défini par $\mathcal{V}(C_n) := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathcal{E}(C_n) := \{\{i, i+1\}, i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$.

1) Soit $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\varepsilon = \pm 1$. Soit

$$\alpha : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, x \mapsto \varepsilon * x + a .$$

a) Montrer qu'il existe un unique *endomorphisme de graphes non-orientés* ϕ de C_n tel que $\mathcal{V}(\phi) = \alpha$.

b) Montrer que l'*endomorphisme* ϕ défini au point a est un *automorphisme de graphes non-orientés* .

2) Soit ϕ un *automorphisme* de C_n .

a) Montrer qu'il existe un unique $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $\mathcal{V}(\phi)(1) = \varepsilon + \mathcal{V}(\phi)(0)$.

b) Le nombre $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ étant défini comme au point a, montrer qu'alors

$$\forall x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathcal{V}(\phi)(x) = \varepsilon * x + \mathcal{V}(\phi)(0) .$$

Exercice C : (6 pts) (Monomorphisme)

1) (Le cas ensembliste)

Soient X et Y des *ensembles* et $f : X \rightarrow Y$ une *application* .

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

a) f est *injective* .

b) Pour tout *ensemble* Z et tout *couple* d'*applications* $(g, h) : Z \rightarrow X$,

$$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h .$$

Indication : Pour montrer $b \Rightarrow a$, on pourra penser à utiliser, pour tout $(x, y) \in X \times X$ les applications

$$1_x : \{\emptyset\} \rightarrow X, \emptyset \mapsto x \text{ et } 1_y : \{\emptyset\} \rightarrow X, \emptyset \mapsto y .$$

2) (Le cas des graphes simples non-orientés)

Soient $G := (\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G))$ et $H := (\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H))$ des *graphe simple non-orienté* . Il n'est pas

nécessaire de supposer qu'ils sont *finis* . Soit

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ \varepsilon(G) \downarrow & & \varepsilon(H) \downarrow \\ \mathcal{P}_{1,2}([\]G) & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([\]\phi)} & \mathcal{P}_{1,2}([\]H) \end{array}$$

un *morphisme de graphes non-orientés* .

On considère les deux propriétés suivantes :

Mon₁) Les *applications* $\mathcal{V}(\phi)$ et $\mathcal{E}(\phi)$ sont *injectives* .

Mon₂) Pour tout *graphe simple non-orienté* F et tout *couple* de *morphismes de graphes non-orientés* $(\eta, \theta) : F \rightarrow G$,

$$\phi \circ \eta = \phi \circ \theta \Rightarrow \eta = \theta .$$

a) Montrer que la condition Mon₁ entraîne la condition Mon₂.

b) Montrer que si $\mathcal{V}(\phi)$ est une *application injective* , $\mathcal{E}(\phi)$ est aussi une *application injective* .

c) Montrer que si ϕ satisfait la condition Mon₂, $\mathcal{V}(\phi)$ est une *application injective* .

Indication : Pour $f : X \rightarrow \mathcal{V}(G)$ une *application* on pourra considérer le *morphisme de graphes non-orientés*

$$(X, \emptyset, \emptyset \rightarrow \mathcal{P}_{1,2}(X)) \rightarrow G$$

du *graphe isolé* d'*ensemble des sommets* X dans G qui s'en déduit.

d) Montrer finalement que la condition Mon₂ entraîne la condition Mon₁.