IV . –Graphes de CAYLEY

IV.1 . –Définitions et premières propriétés

Notation IV.1.1 Étant donnés un *groupe* Γ (cf. la définition II.8.1.1,) et $S \subset \Gamma$, on note

i) $\mathcal{V}\big(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)\big) := \Gamma$;

ii) $\mathcal{E}\big(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)\big) := \big\{\{v, w\} \in \mathcal{P}_{1,2}(\Gamma) \; ; \; v^{-1}w \in S\big\}$;

iii) $\varepsilon\big(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)\big) := \mathrm{Id}_{\mathcal{P}_{1,2}(\Gamma)_{|\mathcal{E}\left(\mathrm{Cay}(\Gamma,S)\right)}} : \mathcal{E}\big(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)\big) \to \mathcal{P}_{1,2}(\Gamma)$;

iv) $\mathrm{Cay}(\Gamma, S) := \Big(\mathcal{V}\big(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)\big), \mathcal{E}\big(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)\big), \varepsilon\big(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)\big)\Big)$;

v) $\mathcal{E}^{Inv}\big(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)\big) := \big\{(v, w) \in \Gamma \times \Gamma \; ; \; v^{-1}w \in S\big\}$;

vi) $\varepsilon^{Inv}\big(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)\big) := \mathrm{Id}_{\Gamma\times\Gamma_{|\mathcal{E}^{Inv}\left(\mathrm{Cay}(\Gamma,S)\right)}} : \mathcal{E}^{Inv}\big(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)\big) \to \Gamma \times \Gamma$;

On note encore :

Cay_1) $\forall s \in S, \; s^{-1} \in S$.

Cay_2) L'*élément neutre* 1_Γ de Γ n'appartient pas à S : $1_\Gamma \notin S$.

Proposition IV.1.2 (Graphe à involution) *Soient Γ un groupe (cf. la définition II.8.1.1,) et $S \subset \Gamma$ satisfaisant la condition Cay_1 de la notation IV.1.1.*

i) L'application $\Gamma \times \Gamma \to \Gamma \times \Gamma$, $(x, y) \mapsto (y, x)$ -se restreint en une application $\mathbf{inv}\big(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)\big) : \mathcal{E}^{Inv}\big(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)\big) \to$ à valeurs dans $\mathcal{E}^{Inv}\big(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)\big)$ (cf. IV.1.1.v.)

ii) Le quadruplet

$$\Big(\mathcal{V}\big(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)\big) , \mathcal{E}^{Inv}\big(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)\big) , \varepsilon^{Inv}\big(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)\big) , \mathbf{inv}\big(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)\big)\Big) \qquad 1$$

est un graphe à involution (cf. la définition I.2.1.)

Proposition IV.1.3 (Graphe non-orienté) *Soient Γ un groupe (cf. la définition II.8.1.1,) et $S \subset \Gamma$ satisfaisant la condition Cay_1 de la notation IV.1.1.*

i) Le triplet $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ défini au point iv de la notation IV.1.1, est un graphe non-orienté (cf. la définition I.2.8.)

ii) Le graphe non-orienté $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ est isomorphe au graphe non-orienté associé (cf. la définition I.2.15,) au graphe à involution $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)^{Inv}$ (cf. IV.1.2.ii.1.)

De manière équivalente (cf. la proposition I.2.19,) $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)^{Inv}$ est le graphe à involution associé (cf. la définition I.2.18,) au graphe non-orienté $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$.

iii) Si de plus, S satisfait la condition Cay_2 de la notation IV.1.1, $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ est un graphe simple non-orienté (cf. la définition I.4.1.)

Définition IV.1.4 (Graphe de CAYLEY) Étant donnés un *groupe* Γ et $S \subset \Gamma$ vérifiant la condition Cay_1 de la notation IV.1.1 et la condition Cay_2 de la notation IV.1.1 le *graphe simple non-orienté* $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ (cf. IV.1.1.iv et la proposition IV.1.3 ,) s'appelle le *graphe de* CAYLEY associé à (Γ, S) .

Exemple IV.1.5 (Graphes de CAYLEY) Un certain nombre des *graphes* que nous avons rencontrés sont en fait des *graphes de* CAYLEY .

a) Cependant il n'existe aucun *groupe* Γ tel que le *graphe vide* $(\emptyset, \emptyset, \mathrm{Id}_\emptyset)$ soit *isomorphe* à $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$; en effet, il n'existe aucune structure de *groupe* sur l'*ensemble vide* (cf. le point i de l'exemple II.8.1.2.)

b) (**Graphe isolé**)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ le *graphe isolé* $\mathbf{I}_n$ à n *sommets* (cf. la définition I.4.9,) est *isomorphe* au *graphe de* CAYLEY $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ pour n'importe quel *groupe* Γ avec $\#(\Gamma) = n$, et $S = \emptyset$.

c) (**Graphe complet**)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le *graphe complet* $\mathbf{K}_n$ à n *sommets* (cf. la définition I.4.14,) est *isomorphe* au *graphe de* CAYLEY $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ pour n'importe quel *groupe* Γ avec $\#(\Gamma) = n$, et $S = \Gamma \setminus \{1_\Gamma\}$.

Remarque IV.1.6 (Unicité) i) Le point b de l'exemple IV.1.5 et le point c de l'exemple IV.1.5 montrent, en particulier, que pour un *graphe* G donné, un *couple* (Γ, S) tel que $G \cong \mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ n'est pas unique et même « à *isomorphisme* près » à savoir que si (Γ_1, S_1) et (Γ_2, S_2) sont tels qu'il existe des *isomorphismes de graphes non-orientés*

$$\mathrm{Cay}(\Gamma_1, S_1) \cong G \cong \mathrm{Cay}(\Gamma_2, S_2) , \qquad 1$$

il n'y a aucune bonne raison, a priori, pour qu'il existe un *isomorphisme de groupes* $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$ (cf. l'exercice IV.5.2.)

ii) Néanmoins i.1 entraîne aumoins que $\#(\Gamma_1) = \#\big(\mathcal{V}(G)\big) = \#(\Gamma_2)$. Cependant deux *groupes* ayant même nombre d'*éléments* peuvent être « très différents ».

Proposition IV.1.7 (Propriétés des graphes de CAYLEY) *Soient Γ un groupe fini (cf. la définition II.8.12.1,) et $S \subset \Gamma$ vérifiant la condition Cay_1 et la condition Cay_2.*

i) ***(Groupe fini)***
Le graphe à involution $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)^{Inv}$ est un graphe fini (cf. la définition I.3.1,) et le graphe non-orienté $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ est un graphe fini simple non-orienté (cf. la définition I.4.4.)

Précisément on a :

$$\#\Big(\mathcal{V}\big(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)\big)\Big) = \#(\Gamma) . \qquad 1$$

ii) ***(Voisins)***
Pour tout sommet $v \in \mathcal{V}\big(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)\big) = \Gamma$, l'ensemble des voisins de v (cf. le point v de la définition I.2.12,) est

$$N(v) = \{vs \ , \ s \in S\} .$$

***Démonstration** : (cf. IV.1.1.ii.)*

iii) ***(Régularité)***
Le graphe $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ est $\#(S)$-régulier (cf. la définition I.4.8.)

Exemple IV.1.8 (L'hypercube) On devrait d'ailleurs plutôt dire les *hypercubes* ; puisque pour tout $d \in \mathbb{N}^*$ nous allons définir un *hypercube de dimension* d . Ces *graphes finis simples non-orientés* sont un peu moins élémentaires que les *graphes circulants* (cf. la définition IV.1.9 ;) mais l'on peut néanmoins établir un grand nombre de leur propriétés sans avoir recours à des théorèmes particulièrement difficiles.

On fixe ici un certains nombre de notations que nous reprendrons dès que nous étudierons certaines propriétés des *hypercubes* . On note $\mathbb{F}_2 := \big(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, *\big)$ le *corps* (cf. la définition III.1.1.12,) à deux *éléments* .

Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma_d := {\mathbb{F}_2}^d$ est un $\mathbb{F}_2$-*espace vectoriel* de *dimension* d. On désigne par $S_d := (e_i)_{1 \leq i \leq d}$ sa *base canonique* .

Le $\mathbb{F}_2$-*espace vectoriel* $\Gamma_d = {\mathbb{F}_2}^d$ est en particulier un *groupe abélien* (cf. la définition II.8.1.4,) et S_d vérifie la condition Cay_1 et la condition Cay_2 (cf. la question 1 de l'exercice IV.5.3,) si bien qu'on peut définir

$$\mathbf{Q}_d := \mathrm{Cay}(\Gamma_d, S_d)$$

le *graphe de* CAYLEY associé à $({\mathbb{F}_2}^d, S_d)$ qu'on appellera l'*hypercube de dimension* d .

Définition IV.1.9 (Graphe circulant) On dit qu'un *graphe fini simple non-orienté* G est un *graphe circulant* s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, et $S \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tels que $G \cong \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, S)$.

Exemple IV.1.10 (Cycle) Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, le *cycle* $\mathbf{C}_n$ à n *sommets* (cf. la définition I.4.12,) est *isomorphe* au *graphe de* CAYLEY $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ pour $\Gamma = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $S = \{-1, 1\}$; c'est même un *graphe circulant* au sens de la définition IV.1.9.

IV.2 . −Automorphismes des graphes de CAYLEY

Dans tout ce paragraphe (IV.2,) Γ est un *groupe* et $S \subset \Gamma$ vérifie la condition Cay_2 et la condition Cay_1 de la notation IV.1.1 ; $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big) := \mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ est le *graphede* CAYLEY *associé* à (Γ, S) (cf. la définition IV.1.4.)

Proposition IV.2.1 (Automorphismes) *On note*

— $\forall (g, v) \in \Gamma \times \Gamma,\ \tau(g)(v) := gv$;
— $\forall \big(\{v, w\}, g\big) \in \mathcal{E}(G) \times \Gamma,\ \theta(g)\big(\{v, w\}\big) := \{gv, gw\}$.

i) Pour tout $g \in \Gamma$, $\big(\tau(g), \theta(g)\big)$ est un automorphisme de graphes non-orientés de G (cf. la définition II.5.1.)

Démonstration :

— $\tau(g)$ est *bijective* puisque

$$\tau(g) \circ \tau(g^{-1}) = \tau(g^{-1}) \circ \tau(g) = \mathrm{Id}_\Gamma .$$

— $\theta(g)$ est à *valeurs* dans $\mathcal{E}(G)$ on a la suite d'implications :

$$\begin{array}{lrcl} \forall \{v, w\} \in \mathcal{E}(G), & f^{-1}w & \in & S \\ \Rightarrow & v^{-1}g^{-1}gv & \in & S \\ \Rightarrow & (gv)^{-1}gw & \in & S \\ \Rightarrow & \{gv, gw\} & \in & \mathcal{E}(G) \\ \Rightarrow & \theta(g)\big(\{v, w\}\big) & \in & \mathcal{E}(G) . \end{array}$$

— $\theta(g)$ *est bijective* puisque

$$\theta(g) \circ \theta(g^{-1}) = \theta(g^{-1}) \circ \theta(g) = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}(G)} .$$

— *Enfin* $\big(\tau(g), \theta(g)\big)$ *est un endomorphisme de graphes non-orientés (cf. la définition II.4.1 ;) puisque*

$$\varepsilon(G)\big(\theta(g)\big(\{v,w\}\big)\big) = \{gv, gw\} = \big\{\tau(g)(v), \tau(g)(w)\big\} .$$

On peut alors appliquer la proposition II.5.3.

ii) L'application $\Gamma \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{Gph}^{\mathbf{N-O}}}(G)$, $g \mapsto \big(\tau(g), \theta(g)\big)$ *est un morphisme de groupes injectif .*

***Démonstration** : Il est clair que*

$$\forall (g,h) \in \Gamma \times \Gamma,\ \tau(gh) = \tau(g) \circ \tau(h) \text{ et } \theta(gh) = \theta(g) \circ \theta(h) ;$$

ce qui assure que $g \mapsto \big(\tau(g), \theta(g)\big)$ *est bien un morphisme de groupes (cf. la définition II.8.2.1.)*

Par ailleurs :

$$\begin{array}{lrcl} \forall g \in \Gamma, & \big(\tau(g), \theta(g)\big) & = & \mathrm{Id}_G \\ \Rightarrow & \forall v \in \mathcal{V}(G),\ gv & = & v \\ \Rightarrow & gvv^{-1} & = & vv^{-1} \\ \Rightarrow & g & = & 1_\Gamma ; \end{array}$$

ce qui prouve l'injectivité.

Corollaire IV.2.2 (Sommet-transitivité) *Le graphe fini simple non-orienté* G *est sommet-transitif (cf. la définition II.5.6.)*

***Démonstration** : Soit* $(v,w) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$. *Avec les notations de la proposition IV.2.1,* $\tau(wv^{-1})(v) = w$.

IV.3 . – Caractères d'un groupe

Bien que ce ne soient en définitive que des *morphismes de groupes* (cf. la définition II.8.2.1,) les *caractères* d'un *groupe* ont des propriétés spécifiques. C'est le fait qu'ils sont à *valeurs* dans $\mathbb{C}^*$ [7] qui permet d'établir le résultat sans doute le plus significatif qu'est le point iii de la proposition IV.3.8. Ce dernier a, en particulier pour conséquence le théorème IV.3.9.

Dans le cadre de l'étude des *graphes de* CAYLEY , on en tire le théorème IV.4.4 particulièrement fructueux dans la rechercher des *éléments propres* de l'*endomorphisme d'adjacence* .

Définition IV.3.1 (Caractère) Étant donné un *groupe* $(\Gamma, \cdot)$, on appelle *caractère du groupe* Γ un *morphisme de groupes* $(\Gamma, \cdot) \to (\mathbb{C}^*, \times)$ où $\mathbb{C}^*$ est l'*ensemble des nombres complexes* non nuls et $\times$ la *multiplication* .

Lemme IV.3.2 (Groupe des caractères) *Étant donné un groupe* Γ, *l'ensemble des caractères du groupe* Γ *est un groupe abélien (cf. la définition II.8.1.4,) appelé groupe des caractères du groupe* Γ *est usuellement noté* $\widehat{\Gamma}$.

***Démonstration** : (cf. la question 3 de l'exercice II.9.1.7.)*

7. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ suffifait ; mais ce dernier objet est sans doute bien moins familier au lecteur que $\mathbb{C}^*$.

Notation IV.3.3 (Racines de l'unité) On note :

i) $\mathbf{S}_1 := \{z \in \mathbb{C} \,;\, \|z\| = 1\}$;

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{U}(n) := \{z \in \mathbb{C} \,;\, z^n = 1\}$;

iii) $\mathbf{U} := \{z \in \mathbb{C} \,;\, \exists n \in \mathbb{N}, \;, z^n = 1\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{U}(n)$.

Lemme IV.3.4 (Groupe des racines de l'unité) *i) Le sous-ensemble* $\mathbf{S}_1$ *de* $\mathbb{C}^*$ *est un sous-groupe (cf. la définition II.8.3.1,) de* $(\mathbb{C}^*, \times)$ *isomorphe à* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Démonstration : *(cf. la question 1 de l'exercice IV.5.1.)*

ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{U}(n)$ *est un sous-groupe de* $\big(\mathbf{S}_1, \times\big)$ *isomorphe à* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *et appelé groupe des racines* $n^{\text{ième}}$ *de l'unité .*

Démonstration : *(cf. la question 2 de l'exercice IV.5.1.)*

iii) Le sous-ensemble $\mathbf{U}$ *de* $\mathbb{C}$ *est un sous-groupe de* $\mathbf{S}_1$ *isomorphe à* $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ *et appelé groupe des racines de l'unité .*

Démonstration : *(cf. la question 3 de l'exercice IV.5.1.)*

Lemme IV.3.5 (Caractères d'un groupe fini) *Soit* Γ *un groupe fini (cf. la définition II.8.12.1,). Pour tout caractère du groupe* Γ $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^*$, χ *est à valeurs dans* $\mathbf{U}\big(\#(\Gamma)\big)$.

Démonstration : *Pour tout* $x \in \Gamma$, $x^{\#(\Gamma)} = 1_\Gamma$ *où* 1_Γ *est l'élément neutre de* Γ *(cf. le théorème II.8.12.12.) Puisque* χ *est un morphisme de groupes ,* $\chi(1_\Gamma) = 1$ *(cf. le point i de la proposition II.8.2.9.)*

Il s'ensuit que

$$\chi(x)^{\#(\Gamma)} = \chi\big(x^{\#(\Gamma)}\big) = \chi(1_\Gamma) = 1 \,;$$

c'est-à-dire que $\chi(x) \in \mathbf{U}\big(\#(\Gamma)\big)$.

Proposition IV.3.6 (Caractères des groupes cycliques) *Soit* Γ *un groupe et* $\widehat{\Gamma}$ *le groupe des caractères du groupe* Γ.

*i) (**Morphisme**)*

L'application

$$v : \widehat{\Gamma} \to \mathbf{U}(n) \,,\; \chi \mapsto \chi(1) \text{ est un morphisme de groupes .}$$

Démonstration : *C'est tautologique étant donnée la définition de la structure de groupe sur* $\widehat{\Gamma} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Gr}}(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ *(cf. la question 3 de l'exercice II.9.1.7.)*

ii) ***(Le cas d'un groupe fini)***
Si Γ est un groupe fini , le morphisme υ est à valeurs dans $\mathbf{U}(\#(\Gamma))$.

***Démonstration** : C'est une conséquence du lemme IV.3.5.*

iii) ***(Le cas d'un groupe cyclique)***
Si $\Gamma \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe cyclique (cf. le point ii de la définition II.8.12.13,) pour $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel , le morphisme υ est un isomorphisme

$$\upsilon : \widehat{\Gamma} \cong \mathbf{U}(n) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} .$$

***Démonstration** : Rappelon que l'application $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $m \mapsto \overline{m}$ qui a un entier relatif m associe sa classe modulo n est un morphisme de groupes ; c'est même la surjection canonique .*

Ainsi pour tout $\chi \in \widehat{\Gamma}$

$$\tilde{\chi} : \mathbb{Z} \to \mathbf{U}(n) , \; m \mapsto \chi(\overline{m})$$

est un morphisme de groupes comme composé de morphismes de groupes . Ainsi

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \; \tilde{\chi}(m) = \tilde{\chi}(1)^m = \chi(1)^m .$$

Il s'ensuit que, pour tout $\zeta \in \mathbf{U}(n)$, S'il existe $\chi \in \widehat{\Gamma}$ tel que

$$\upsilon(\chi) = \chi(1) = \zeta ,$$

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \; \chi(\overline{m}) = \tilde{\chi}(m) = \chi(1)^m = \zeta^m .$$

Ceci prouve l'unicité de χ et par conséquent que υ est injectif .

Pour tout $\zeta \in \mathbf{U}(n)$ l'application

$$\tilde{\chi} : \mathbb{Z} \to \mathbf{U}(n) , \; m \mapsto \zeta^m \text{ est un morphisme de groupes} .$$

De plus

$$\tilde{\chi}(n) = \zeta = 1 ; \text{ si bien que } n\mathbb{Z} \subset \operatorname{Ker} \tilde{\chi} .$$

Il résulte alors de la proposition II.8.11.4 qu'il existe un unique morphisme de groupes $\chi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbf{U}(n)$ tel que

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \; \chi(\overline{m}) = \tilde{\chi}(m) .$$

En particulier $\chi(1) = \zeta$; ce qui prouve que υ est un morphisme surjectif .

Proposition IV.3.7 (Action du quotient) *Soient G un groupe et $H \subset G$ un sous-groupe distingué (cf. la définition II.8.10.4.) On note $\pi : G \to G/H$ la surjection canonique (cf. la définition II.8.11.2,)*

Pour tout $(\chi, \psi) \in \widehat{G} \times \widehat{G}$ les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\chi_{|H} = \psi_{|H}$.

b) $\exists \rho \in \widehat{G/H}, \forall x \in G, \; \psi(x) = \chi(x)\rho\big(\pi(x)\big)$; *et dans ce cas ρ est unique.*

Démonstration :

b ⇒ a *Rappelons (cf. la proposition III.5.4,) que* $\operatorname{Ker}\pi = H$ *. Par conséquent s'il existe* ρ *comme au point b*

$$\begin{array}{rcl}\forall x \in H, \quad \psi(x) & = & \chi(x)\rho\big(\pi(x)\big) \\ & = & \chi(x)\rho(1) \\ & = & \chi(x) .\end{array}$$

a ⇒ b *Soit*

$$\tilde\rho \;:\; G \;\to\; \mathbb{C}\;,\; x \;\mapsto\; \frac{\psi(x)}{\chi(x)} .$$

Alors :

$$\begin{array}{rcl}\forall (x,y) \in G\times G, \quad \tilde\rho(xy) & = & \dfrac{\psi(xy)}{\chi(xy)} \\ & = & \dfrac{\psi(x)\psi(y)}{\chi(x)\chi(y)} \\ & = & \dfrac{\psi(x)}{\chi(x)} \cdot \dfrac{\psi(y)}{\chi(y)} \\ & = & \tilde\rho(x)\tilde\rho(y) ;\end{array}$$

si bien que $\tilde\rho$ *est un morphisme de groupes . De plus il résulte du point a que*

$$\forall x \in H,\; \tilde\rho(x) \;=\; \frac{\psi(x)}{\chi(x)} \;=\; 1 .$$

Il résulte alors de la proposition II.8.11.4 qu'il existe un unique morphisme de groupes

$$\rho \;:\; G/H \;\to\; \mathbb{C}^* \;\text{ tel que }\; \tilde\rho \;=\; \pi \;\circ\; \rho .$$

Alors

$$\forall x \in G,\; \rho\big(\pi(x)\big) \;=\; \tilde\rho(x) \;=\; \frac{\psi(x)}{\chi(x)} .$$

Proposition IV.3.8 (Prolongement des caractères) *Soit* A *un groupe abélien fini (cf. la définition II.8.1.4 et la définition II.8.12.1.) Soit* $B \subset A$ *un sous-groupe et* $x \in A \setminus B$ *. Soit enfin* $C := \big\langle \{x\} \cup B \big\rangle$ *(cf. la définition II.8.4.2.) On notera* $\pi : C \to C/B$ *la surjection canonique (cf. la définition II.8.11.2.)*

i) Le groupe C/B *est un groupe cyclique (cf. le point ii de la définition II.8.12.13.)*

Démonstration : *Pour tout* $y \in C/B$ *il existe* $z \in C$ *tel que* $y = \pi(z)$ *. Or* $C = \big\langle \{x\} \cup B \big\rangle$ *; si bien que*

$$\exists (w,k) \;\in\; B\times\mathbb{Z},\; z \;=\; w \;+\; kx .$$

Ainsi

$$y \;=\; \pi(z) \;=\; \pi(w) \;+\; \pi(kx) \;=\; k\pi(x) \text{ (cf. le point ii de la proposition III.5.4 ;)}$$

ainsi $C/B = \big\langle \pi(x) \big\rangle$ *.*

ii) Il existe un unique

$$d \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } dx \in B \text{ et } \forall k \in \mathbb{Z},\ kx \in B \Rightarrow d|k\ .$$

Démonstration : *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $kx \in B$ si et seulement si $\pi(kx) = 0$ si et suelement si $k\pi(x) = 0$ si et seulement si $d|k$ où d est l'unique entier naturel non nul tel que $C/B \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$; puisque d'après le point i , C/B est un groupe cyclique .*

iii) Pour tout caractère $\chi_B \in \widehat{B}$ il existe un caractère

$$\chi_C \in \widehat{C} \text{ tel que } \chi_{C|B} = \chi_B\ ;$$

autrement dit, le caractère χ_B se prolonge à C.

Démonstration : *L'entier $d \in \mathbb{N}^*$ est défini comme au point ii . Si un tel caractère $\chi_C \in \widehat{C}$ existe,*

$$\chi_C(x)^d = \chi_C(x^d) = \chi_B(x^d)\ .$$

Or

$$\exists \alpha \in \mathbb{C}^*, \quad \text{et même } \alpha \in \mathbf{S}_1 \text{ et même } \alpha \in \mathbf{U} \text{ tel que } \alpha^d = \chi_B(x^d)\ .$$

Soit donc α comme ci-dessus et posons

$$\forall (y,k) \in B \times \mathbb{Z},\ \chi_C(y+kx) := \chi_B(y)\alpha^k\ .$$

Cependant pour $z \in C$ l'écriture $z = y + kx$, $y \in b$, $k \in \mathbb{Z}$, n'est, a priori pas unique ; si bien qu'on ne peut pas affirmer que χ_C est bien défini.

$$\begin{array}{lrcl}
\forall (y,z,k,\ell) \in B \times B \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, & y+kx & = & z+\ell x \\
\Rightarrow & (k-\ell)x & = & z-y \\
\Rightarrow & (k-\ell)x & \in & B \\
\Rightarrow & \exists m \in \mathbb{Z},\ \ell & = & k+md \\
\Rightarrow & y+kx & = & z+mdx+kx \\
\Rightarrow & y & = & z+md\ .
\end{array}$$

Alors :

$$\begin{array}{rcl}
\chi_C(y+kx) & = & \chi_C(z+mdx+kx) \\
& = & \chi_B(z)\chi_B(x^d)^m\alpha^k \\
& = & \chi_B(z)\alpha^{dm}\alpha_k \\
& = & \chi_B(z)\alpha^{dm+k} \\
& = & \chi_B(z)\alpha^{\ell} \\
& = & \chi_C(z+\ell x)\ .
\end{array}$$

Ainsi χ_C est bien défini ; et il reste à vérifier que c'est bien un caractère i.e. un morphisme de groupes . Or

$$\begin{array}{rcl}
\forall (y,z,k,\ell) \in B \times B \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\quad \chi_C\big((y+kx)+(z+\ell x)\big) & = & \chi_C\big(y+z+(k+\ell)x\big) \\
& = & \chi_B(y+z)\alpha^{k+\ell} \\
& = & \chi_B(y)\chi_B(z)\alpha^{k+\ell} \\
& = & \chi_B(y)\alpha^k\chi_B(z)\alpha^{\ell} \\
& = & \chi_C(y+kx)+\chi_C(z+\ell x)\ .
\end{array}$$

Théorème IV.3.9 (Cardinal de $\widehat{A}$) *i)* ***(Le cas d'un groupe cyclique)***
Pour tout groupe cyclique C *(cf. le point ii de la définition II.8.12.13,)*

$$\#(\widehat{C}) = \#(C) .$$

Démonstration : *Cela découle du point iii de la proposition IV.3.6 et du point ii du lemme IV.3.4.*

ii) ***(Le cas d'un groupe abélien)***
Pour tout groupe abélien fini A *(cf. la définition II.8.1.4 et la définition II.8.12.1,)*

$$\#(\widehat{A}) = \#(A) .$$

Démonstration : *Soit* A *un groupe abélien fini . Notons* $\mathcal{E}$ *l'ensemble des sous-groupes* B *de* A *tels que* $\#(\widehat{B}) = \#(B)$.

D'après le point i , tout sous-groupe B *de* A *qui est un groupe cyclique appartient à* $\mathcal{E}$ *et donc, à tout le moins,* $\{1\}$; *si bien que*

$$\mathcal{E} \neq \emptyset .$$

L'ensemble $\{\#(B) \, , \, B \in \mathcal{E}\}$ *est bien évidemment majoré par* $\#(A)$; *si bien que*

$$\exists B \in \mathcal{E}, \forall C \in \mathcal{E}, \#(C) \leq \#(B) .$$

Soit donc un tel B. *Si* $B = A$, *alors* $A \in \mathcal{E}$ *et le résultat est établi. Sinon* $\exists x \in A, \; x \notin B$. *Soit alors*

$$C := \langle \{x\} \cup B \rangle \text{ (cf. la définition II.8.4.2 .)}$$

On note $\pi : C \to C/B$ *la surjection canonique (cf. la définition II.8.11.2,)*

Pour tout $\chi \in \widehat{B}$, *notons*

$$\widehat{C}_\chi := \{\psi \in \widehat{C} \, ; \, \psi_{|B} = \chi\} .$$

Lemme ii.1 $\forall \chi \in \widehat{B}, \; \#(\widehat{C}_\chi) = \#(\widehat{C/B})$.

Démonstration : *Psoit* $\chi \in \widehat{B}$. *Alors d'après le point iii de la proposition IV.3.8*[8],

$$\exists \overline{\chi} \in \widehat{C}, \; \overline{\chi}_{|B} = \chi \text{ i.e. } \overline{\chi} \in \widehat{C}_\chi .$$

$$\begin{aligned} \forall (\rho, x, y) \in \widehat{C/B} \times C \times C, \quad \overline{\chi}(x+y)\rho\big(\pi(x+y)\big) &= \overline{\chi}(x)\overline{\chi}(y)\rho\big(\pi(x)+\pi(y)\big) \\ &= \overline{\chi}(x)\overline{\chi}(y)\rho\big(\pi(x)\big)\rho\big(\pi(y)\big) \; ; \end{aligned}$$

si bien que

$$\overline{\chi}_\rho : C \to \mathbb{C}^* , \; x \mapsto \overline{\chi}(x)\rho\big(\pi(x)\big)$$

est bien un caractère i.e. un élément de $\widehat{C}$.

8. et c'est évidemment le point clef de la démonstration et même de la théorie. C'est en effet ici qu'on utilise précisément le fait qu'on a des caractères.

Or puisque $\operatorname{Ker}\pi \;=\; B$ *(cf. le point ii de la proposition III.5.4,)*

$$\forall x \in B,\quad \begin{aligned} \overline{\chi}_\rho(x) &= \overline{\chi}(x)\rho\big(\pi(x)\big) \\ &= \chi(x)\rho(0) \\ &= \chi(-x) \;< \end{aligned}$$

si bien qu'en fait $\overline{\chi}_\rho \;\in\; \widehat{C}_\chi$ *. On a ainsi défini une application*

$$\widehat{C/B} \;\to\; \widehat{C}_\chi \;,\; \rho \;\mapsto\; \overline{\chi}_\rho \;.$$

La proposition IV.3.7 assure alors que l'application ci-dessus est bijective ; ce qui entraîne que

$$\#\big(\widehat{C}_\chi\big) \;=\; \#\big(\widehat{C/B}\big) \;.$$

Lemme ii.2 $\#\big(\widehat{C}\big) \;=\; \sum_{\chi \,\in\, \widehat{B}} \#\big(\widehat{C}_\chi\big) \;=\; \#\big(\widehat{B}\big)\cdot\#\big(\widehat{C/B}\big)\;.$

***Démonstration** : On constate que la relation* $\sim$ *définie sur* $\widehat{C}$ *par* $\chi \;\sim\; \psi$ *si* $\chi_{|B} \;=\; \psi_{|B}$ *est une relation d'équivalence dont l'ensemble des classes d'équivalence est* $\big\{\widehat{C}_\chi\big\}_{\chi\,\in\,\widehat{B}}$ *. Il en résulte (cf. la proposition I.3.11.3.4,), que*

$$\widehat{C} \;=\; \coprod_{\chi\,\in\,\widehat{B}} \widehat{C}_\chi\;;$$

si bien que

$$\#\big(\widehat{C}\big) \;=\; \sum_{\chi\,\in\,\widehat{B}} \#\big(\widehat{C}_\chi\big)\;.$$

Il découle alors du lemme ii.1 , que

$$\#\big(\widehat{C}\big) \;=\; \#\big(\widehat{B}\big)\cdot\#\big(\widehat{C/B}\big)\;.$$

Or par hypothèse $\#\big(\widehat{B}\big) \;=\; \#(B)$ *. Par ailleurs* C/B *est un groupe cyclique (cf. le point i de la proposition IV.3.8.) Le point i entraîne alors que* $\#\big(\widehat{C/B}\big) \;=\; \#\big(C/B\big)$ *. Il suit alors du lemme ii.2 que*

$$\#\big(\widehat{C}\big) \;=\; \#(B)\cdot\#\big(C/B\big)\;.$$

Il résulte alors du corollaire II.8.12.7 appliqué à la surjection canonique π *que*

$$\#\big(\widehat{C}\big) \;=\; \#(B)\ldots\#\big(C/B\big) \;=\; \#(C)\;.$$

Ainsi $C \;\in\; \mathcal{E}$*. Mais* $\#(C) \;>\; \#(B)$*, puisque* $x \;\in\; C$ *et* $x \;\notin\; B$*. On contredit ainsi la maximalité du cardinal de* B *dans* $\mathcal{E}$ *; si bien que* $A \;\in\; \mathcal{E}$ *; c'est-à-dire que*

$$\#\big(\widehat{A}\big) \;=\; \#(A)\;.$$

IV.4 . –Spectres des graphes de CAYLEY

Dans la suite de ce paragraphe (IV.4,) Γ est un *groupe* et $S \subset \Gamma$ satisfait la condition Cay$_1$ et la condition Cay$_2$ de la notation IV.1.1. On note $G := \mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ le *graphede* CAYLEY *associé* (cf. la définition IV.1.4.)

Remarque IV.4.1 Un *caractère* de Γ (cf. la définition IV.3.1,) est en particulier une *application*

$$\Gamma = \mathcal{V}\big(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)\big) \to \mathbb{C}$$

c'est-à-dire un *élément* de l'*espace vectoriel* $\mathbb{C}^G = \mathbb{C}^\Gamma$ de la proposition III.1.6 :

$$\widehat{\Gamma} \subset \mathbb{C}^G .$$

L'*ensemble* $\widehat{\Gamma}$ n'est cependant en général pas un *sous-espace vectoriel* de $\mathbb{C}^G$.

Proposition IV.4.2 (Orthogonalité des caractères) *Si Γ est un groupe fini le sous-ensemble $\widehat{\Gamma} \subset \mathbb{C}^G$ est une partie ortogonale (cf. le point ii de la définition III.8.5,) pour la structure euclidienne (resp. hermitienne) définie sur $\mathbb{C}^G$ par la proposition III.2.2.*

C'est donc en particulier une partie libre .

***Démonstration** : Remarquons immédiatement qu'il découle du point v de la proposition III.8.6 que, dès lors que $\widehat{\Gamma}$ est une partie ortogonale c'est une partie libre puisque*

$$\forall \chi \in \widehat{\Gamma},\ \chi \neq 0_{\mathbb{C}^G} .$$

Montrons donc que $\widehat{\Gamma}$ est une partie ortogonale . Pour tout $h \in \Gamma$, l'application $\Gamma \to \Gamma$, $g \mapsto hg$ est une bijection de bijection réciproque $\Gamma \to \Gamma$, $g \mapsto h^{-1}g$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\forall (\chi, \psi) \in \widehat{\Gamma} \times \widehat{\Gamma},\quad \langle \chi \mid \psi \rangle &= \sum_{g \in \Gamma} \overline{\chi(g)}\psi(g) \\
&= \sum_{g \in \Gamma} \overline{\chi(hg)}\psi(hg) \\
&= \sum_{g \in \Gamma} \overline{\chi(h)}\psi(h)\overline{\chi(g)}\psi(g) \\
&= \overline{\chi(h)}\psi(h) \sum_{g \in \Gamma} \overline{\chi(g)}\psi(g) \\
&= \overline{\chi(h)}\psi(h) \,\langle \chi \mid \psi \rangle .
\end{aligned}$$

Il en résulte alors que

$$\forall (\chi, \psi, h) \in \widehat{\Gamma} \times \widehat{\Gamma} \times \Gamma,\ \big(1 - \overline{\chi(h)}\psi(h)\big) \langle \chi \mid \psi \rangle = 0 . \qquad \textit{IV.4.2.1}$$

Remarquons alors que, puisque $\forall h \in \Gamma,\ qq(h) \in \mathbf{U}(n), \chi(h)\overline{\chi(h)} = 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\forall h \in \Gamma,\quad \overline{\chi(h)}\psi(h) &= 1 \\
\Rightarrow \qquad \psi(h) &= \chi(h) \\
\Rightarrow \qquad \chi &= \psi .
\end{aligned}$$

Ainsi $\chi \neq \psi$ entraîne $\exists h \in \Gamma,\ 1 - \overline{\chi(h)}\psi(h) \neq 0$; ce qui entraîne encore, grâce à IV.4.2.1,

$$\forall (\chi, \psi) \in \widehat{\Gamma} \times \widehat{\Gamma},\ \chi \neq \psi \Rightarrow \langle \chi \mid \psi \rangle = 0 .$$

Proposition IV.4.3 (Vecteurs propres, valeurs propres) *Soit Γ un groupe fini (cf. la définition II.8.12.1,) $S \subset \Gamma$ satisfaisant la condition Cay$_1$ et la condition Cay$_2$ de la notation IV.1.1 et $\mathrm{Cay}(\gamma, S)$ le graphe de* CAYLEY *associé à (Γ, S) (cf. la définition IV.1.4.)*

Tout caractère du groupe Γ, $\chi : \Gamma \to \mathbf{U}$ est un élément de $\mathbb{C}^{\mathrm{Cay}(\Gamma,S)} = \mathbb{C}^{\Gamma}$ (cf. la notation III.1.5.) C'est un vecteur propre de l'endomorphisme d'adjacence $\Phi = \Phi\big(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)\big)$ (cf. la définition III.1.7,) associé à la valeur propre

$$\lambda_\chi = \sum_{s \in S} \chi(s) . \qquad \text{IV.4.3.1}$$

Démonstration : *Soit $\chi \in \widehat{\Gamma}$. C'est en particulier une application $\Gamma \to \mathbb{C}$.*

Pour tout sommet $v \in \mathcal{V}\big(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)\big) = \Gamma$, $\Phi(\chi)(v) = \sum_{w \in N(v)} \chi(w)$; c'est-à-dire, d'après le point ii de la proposition IV.1.7,

$$\begin{aligned}\Phi(\chi)(v) &= \sum_{s \in S} \chi(vs) \\ &= \sum_{s \in S} \chi(v)\chi(s) \\ &= \big(\sum_{s \in S} \chi(s)\big)\chi(v) \ ;\end{aligned}$$

si bien que

$$\forall \chi \in \widehat{\Gamma},\ \Phi(\chi) = \sum_{s \in S} \chi(s)\chi .$$

Théorème IV.4.4 (Le cas d'un groupe abélien) *Si Γ est un groupe abélien fini (cf. la définition II.8.1.4 et la définition II.8.12.1,) $\widehat{\Gamma}$ est une base ortogonale de vecteurs propres de l'endomorphisme d'adjacence $\Phi(G)$ de G.*

Démonstration : *Puisque Γ est un groupe fini la proposition IV.4.2, assure que $\widehat{\Gamma}$ est une partie ortogonale de $\mathbb{C}^G$ et même une partie libre .*

Le point ii du théorème IV.3.9 et le point 3 du point ii de la proposition III.1.6 assurent que

$$\#\big(\widehat{\Gamma}\big) = \#(\Gamma) = \dim_{\mathbb{C}}\big(\mathbb{C}^G\big) \ ;$$

si bien que $\widehat{\Gamma}$ est une base de $\mathbb{C}^G$.

Enfin la proposition IV.4.3 assure que tout $\chi \in \widehat{\Gamma}$ est un vecteur propre de $\Phi(G)$.

IV.5 . −Exercices

Exercice IV.5.1 (Groupe des racines de l'unité) On note $\upsilon \;:\; \mathbb{R} \;\to\; \mathbf{S}_1 \;,\; x \;\mapsto\; e^{2i\pi x}$.

1) $(\mathbf{S}_1)$

a) Montrer que υ est un *morphisme de groupes* de $(\mathbb{R}, +)$ à *valeurs* dans $(\mathbf{S}_1, \times)$.

b) Quel est le *noyau* $\operatorname{Ker} \upsilon$ de υ ?

c) En déduire un *isomorphisme de groupes* $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \;\cong\; \mathbf{S}_1$.

2) $(\mathbf{U}(n))$
On note
$\upsilon_n \;:\; \mathbb{Z} \;\to\; \mathbf{U}(n) \;,\; k \;\mapsto\; e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

a) Montrer que υ_n est un *morphisme de groupes* de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbf{U}(n), \times)$.

b) Quel est son *noyau* ?

c) En déduire un *isomorphisme de groupes* $\overline{\upsilon} \;:\; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \;\cong\; \mathbf{U}(n)$.

3) $(\mathbf{U})$

a) Montrer que la *restriction* $\upsilon_{|\mathbb{Q}}$ de υ à $\mathbb{Q}$ est à *valeurs* dans $\mathbf{U}$.

b) Quel est le *noyau* de $\upsilon_{|\mathbb{Q}}$?

c) En déduire un *isomorphisme de groupes* $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \;\cong\; \mathbf{U}$.

d) Montrer que
$$\mathbf{U} \;=\; \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{U}(n) \;.$$

Exercice IV.5.2 ($\mathbf{K}_4$) Soient $\Gamma_1 \;:=\; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \Gamma_2 \;:=\; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ **et** $S_i \;:=\; \Gamma_i \;\setminus\; \{0\}_{\,i\,=\,1 \text{ ou } 2}$.

1) Montrer qu'il existe des *isomorphismes de graphes non-orientés* $\operatorname{Cay}(\Gamma_1, S_1) \;\cong\; \mathbf{K}_4 \;\cong\; \operatorname{Cay}(\Gamma_2, S_2)$.

2) Existe-t-il un *isomorphisme de groupes* $\Gamma_1 \;\cong\; \Gamma_2$?

Exercice IV.5.3 (L'hypercube) Les notations sont celles de l'exemple IV.1.8.
Dans tout l'exercice IV.5.3, on note $\mathbb{F}_2 \;:=\; \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, *\right)$ **le *corps* à deux *éléments* .**

Pour $d \;\in\; \mathbb{N}$ **le** $\mathbb{F}_2$***-espace vectoriel*** ${\mathbb{F}_2}^d$ **est en particulier un *groupe* qu'on notera** Γ_d. **On notera** $S_d \;:=\; (e_i)_{1 \,\le\, i \,\le\, d} \;\in\; {\mathbb{F}_2}^d$ **la base canonique de** ${\mathbb{F}_2}^d$.

1) (Le graphe de CAYLEY)
Vérifier que S satisfait bien à la condition Cay_1 de la notation IV.1.1 et à la condition Cay_2 de la notation IV.1.1.

Dans toute la suite de l'exercice IV.5.3, on notera donc $\mathbf{Q}_d := \mathrm{Cay}(\Gamma_d, S_d)$ le *graphe de* CAYLEY associé au *groupe* $({\mathbb{F}_2}^d, +)$ et à $S_d \subset {\mathbb{F}_2}^d$. Il est usuel de l'appeler *hypercube de dimension* d .

2) (**En petite dimension**)

a) Décrire, c'est-à-dire donner un *isomorphisme* avec un *graphe* connu, $\mathbf{Q}_0$, $\mathbf{Q}_1$ et $\mathbf{Q}_2$.

b) Représenter $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$, $\mathbf{Q}_3$.

3) (**Régularité**)
Montrer que pour tout $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{Q}_d$ est *k-régulier* pour un entier $k \in \mathbb{N}$ que l'on déterminera.

4) (**Nombre de sommets, d'arêtes**)
Combien de *sommets* et d'*arêtes* $\mathbf{Q}_d$ posssède-t-il ?

5) (**Bipartition**)
Pour tout $d \in \mathbb{N}$, montrer que

a) $\mathbf{Q}_d$ est un *graphe biparti* ;

b) (**Cycle**)
si C est un *sous-graphe* de $\mathbf{Q}_d$ *isomorphe* à un *cycle* $\mathbf{C}_n$ alors n est pair.

Exercice IV.5.4 (Parcours dans l'hypercube) Les notations sont celles de l'exemple IV.1.8.

1) (**Caractères de** Γ_d)

a) Déterminer les *caractères du groupe* Γ_1 et montrer qu'il sont deux à deux *ortogonaux* .

b) Déterminer les *caractères du groupe* Γ_2 et montrer qu'il sont deux à deux *ortogonaux* .

c) Étant donné un *caractère* χ du *groupe* Γ_d, montrer que χ est à *valeurs* dans $\mathbf{U}(2)$.

d) L'*isomorphisme de groupes* $\overline{v}_2$ étant celui défini au point c de la question 2 de l'exercice IV.5.1, montrer que χ est un *caractère du groupe* Γ_d si et seulement si $\overline{v}_2^{-1} \circ \chi$ est une $\mathbb{F}_2$-*forme linéaire* .

e) En déduire que
$$\#\big(\widehat{\Gamma_d}\big) = \#(\Gamma_d) .$$

f) Montrer que pour tout $(\chi, \psi) \in \widehat{\Gamma_d} \times \widehat{\Gamma_d}$ et tout $h \in \Gamma_d$,
$$\big(1 - \chi(h)\psi(h)\big) \langle \chi \mid \psi \rangle = 0 .$$

g) En déduire que $\widehat{\Gamma_d}$ est une *partie ortogonale* de $\mathbb{C}^{\Gamma_d}$.

h) En déduire finalement une *base de vecteurs propres* pour l'*endomorphisme d'adjacence* de $\mathbf{Q}_d$.

2) Déterminer $\mathrm{Sp}(\mathbf{Q}_d)$ (avec les multiplicités).

3) Montrer que $\mathbf{Q}_d$ est *sommet-transitif* .

4) Pour $\ell \in \mathbb{N}^*$ un *entier naturel* , déterminer le *nombre de parcours de longueur ℓ* d'un *sommet* à lui-même.

Exercice IV.5.5 (Cycle couvrant) Les notations sont celles de l'exemple IV.1.8.

Soient $d \in \mathbb{N}$, $G_{d,0}$ **et** $G_{d,1}$ **les** ***sous-graphes induits*** **(cf. la définition II.2.4,) de** $\mathbf{Q}_{d+1}$ **définis** $\forall k \in \mathbb{F}_2$, **par** $\mathcal{V}(G_{d,k}) := \{x = \sum_{i=1}^{d+1} x_i e_i \in \mathcal{V}(\mathbf{Q}_{d+1})\ ;\ x_{d+1} = k\}$.

1) $(\mathcal{V}(\sigma_d))$
Montrer que $\mathcal{V}(\sigma_d) : \mathcal{V}(\mathbf{Q}_{d+1}) \to \mathcal{V}(\mathbf{Q}_{d+1})$, $x \mapsto x + e_{d+1}$ vérifie :

$*$) **(involution)**
$\mathcal{V}(\sigma_d) \circ \mathcal{V}(\sigma_d) = \mathrm{Id}_{\mathcal{V}(\mathbf{Q}_{d+1})}$;

†) **(restriction)**
$\forall k \in \mathbb{F}_2$, la *restriction* $\mathcal{V}(\sigma_d)_{|\mathcal{V}(G_{d,k})}$ de $\mathcal{V}(\sigma_d)$ à $\mathcal{V}(G_{d,k})$ est à valeurs dans $\mathcal{V}(G_{k+1})$;

‡) **(bijection)**
$\mathcal{V}(\sigma_d)_{|G_{d,k}}$ est une *bijection* de $\mathcal{V}(G_{d,k})$ sur $\mathcal{V}(G_{d,k+1})$.

2) Montrer qu'il existe une unique *application* $\mathcal{E}(\sigma_d) : \mathcal{E}(\mathbf{Q}_{d+1}) \to \mathcal{E}(\mathbf{Q}_{d+1})$, $\{x, y\} \mapsto \big\{\mathcal{V}(\sigma_d)(x), \mathcal{V}(\sigma_d)(y)\big\}$.

3) $(\mathcal{E}(\sigma_d))$
Montrer qu'alors $\mathcal{E}(\sigma_d)$ vérifie :

$*$) **(involution)**
$\mathcal{E}(\sigma_d) \circ \mathcal{E}(\sigma_d) = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}(\mathbf{Q}_{d+1})}$;

†) **(restriction)**
$\forall k \in \mathbb{F}_2$, la *restriction* $\mathcal{E}(\sigma_d)_{|\mathcal{E}(G_{d,k})}$ de $\mathcal{E}(\sigma_d)$ à $\mathcal{E}(G_{d,k})$ est à valeurs dans $\mathcal{E}(G_{k+1})$;

‡) **(bijection)**
$\mathcal{E}(\sigma_d)_{|G_{d,k}}$ est une *bijection* de $\mathcal{E}(G_{d,k})$ sur $\mathcal{E}(G_{d,k+1})$.

4) (σ_d)
Vérifier qu'alors $\sigma_d := \big(\mathcal{V}(\sigma_d), \mathcal{E}(\sigma_d)\big)$ est un *automorphisme de graphes non-orientés* de $\mathbf{Q}_{d+1}$, tel que pour tout $k \in \mathbb{F}_2$, sa *restriction* $\sigma_{d|G_{d,k}}$ est un *isomorphisme de graphes non-orientés* de Gd, k sur $G_{d,k+1}$.

5) (θ_d)

Montrer qu'il existe un *isomorphisme de graphes non-orientés*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(\mathbf{Q}_d) \arrow[r, "\mathcal{E}(\theta_d)"] \arrow[d, "\varepsilon(\mathbf{Q}_d)"'] & \mathcal{E}(G_{d,0}) \arrow[d, "\varepsilon(G_{d,0})"'] \\ \mathcal{P}_{1,2}([)\mathbf{Q}_d] \arrow[r, "\mathcal{P}_{1,2}([)\theta_d]"] & \mathcal{P}_{1,2}([)G_{d,0}] \end{tikzcd} .$$

On dit qu'un *graphe* G *possède un cycle couvrant* ; s'il existe un *sous-graphe* C *isomorphe* à *cycle* et tel que $\mathcal{V}(C) = \mathcal{V}(G)$ c'est-à-dire quie « passe par tous les *sommets* » de G. On remarque qu'alors nécessairement $C \cong \mathbf{C}_{\#\left(\mathcal{V}(G)\right)}$.

6) $(\mathbf{Q}_2)$
Montrer que $\mathbf{Q}_2$ possède un *cycle couvrant* .

7) $(\mathbf{Q}_d \Rightarrow \mathbf{Q}_{d+1})$
Soient $d \in \mathbb{N}, d \geq 2$ et $C_d \cong \mathbf{C}_{2^d}$ un *cycle couvrant* de $\mathbf{Q}_d$. Construire un *cycle couvrant* $C_{d+1} \cong \mathbf{C}_{2^{d+1}}$ de $\mathbf{Q}_{d+1}$.
Indication : *On pourra utiliser les isomorphismes de graphes non-orientés* σ_d *de la question 4 et* θ_d *de la question 5 .*

8) (**Cycle couvrant**)
Conclure.